Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОГО СЛОЯ И ТОЛСТОЙ ПЛИТЫ

С. Г. Лехницкий

(Ленинград)

Задача об упругом равновесии бесконечного изотропного слоя подробно изложена в книге А. И. Лурье [1], применившего для ее решения метод, основанный на использовании специальных дифференциальных операторов. Зная решение для бесконечного слоя, легко получить решение и для ограниченной толстой плиты, если отказаться от точного удовлетворения условиям на боковой поверхности и заменить их приближенными, интегральными или осредненными.

В предлагаемой статье рассматривается задача о равновесии упругого слоя, обладающего анизотропией частного вида, а именно — трансверсально изотропного; общее и частное решения удается построить при помощи метода, аналогичного методу А. И. Лурье.

1. Общие уравнения и формулы для трансверсально изотропной среды. Пусть имеется упругое однородное трансверсально изотропное тело, следующее обобщенному закону Гука и испытывающее под действием внешних нагрузок малые деформации. Анизотропия такого тела характеризуется, как известно, наличием плоскости изотропии в каждой точке или, что то же самое, оси упругой симметрии бесконечно высокого порядка ([2], стр. 172). Задача об упругом равновесии трансверсально изотропной среды представляет определенный интерес для горного дела; такого рода анизотропию естественно приписать (по крайней мере, в первом приближений) осадочным горным породам — песчаникам, алевролитам, филлитам и др., в которых плоскости наслоения являются в силу самой структуры и образования плоскостями изотропии.

Если направить ось z нормально к плоскостям изотропии и использовать обычные обозначения для составляющих напряжения и деформации, то уравнения, выражающие обобщенный закон Гука, можно записать таким образом:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) - \frac{\nu_1}{E_1}\sigma_z, & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G_1}\tau_{yz}\\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}(-\nu\sigma_x + \sigma_y) - \frac{\nu_1}{E_1}\sigma_z, & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G_1}\tau_{xz}\\
\varepsilon_z &= -\frac{\nu_2}{E}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{E_1}\sigma_z, & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}
\end{aligned} \qquad (1.1)$$

Здесь E, E_1 — модули Юнга для растяжения-сжатия в плоскости изотропии и в поперечном направлении, ν, ν_1, ν_2 — коэффициенты Пуассона, G, G_1 — модули сдвига для плоскостей изотропии и нормальных к ним. Из семи упругих постоянных только пять будут независимыми, так как

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{E}{E_1}, \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (1.2)$$

Введем обозначения

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 \tag{1.3}$$

(D^2 — оператор Лапласа для функции двух переменных x и y)

$$H = E\nu_1 + G_1(1 - \nu - 2\nu_1\nu_2)$$

$$\alpha = \frac{2GG_1(1-\nu_1\nu_2)}{H}, \qquad \beta = \frac{G_1E\nu_1}{H}, \qquad \gamma = 2G\frac{1-\nu_1\nu_2}{H}$$

$$\alpha_1 = 2G\frac{E_1 - G_1\nu_1(1+\nu)}{H}, \qquad \beta_1 = G_1E_1\frac{1-\nu}{H}, \qquad \delta = G_1\frac{1-\nu-2\nu_1\nu_2}{H}$$

$$s_0 = \sqrt{\frac{G}{G_1}}, \qquad s_{1,2} = \sqrt{\frac{\alpha_1 - \beta \pm \sqrt{(\alpha_1-\beta)^2 - 4\alpha\beta_1}}{2\beta_1}}$$

$$n = \frac{2}{s_1s_2(\alpha\beta_1 + \alpha_1\beta)} = \frac{H}{s_1s_2E_1G_1G} \tag{1.4}$$

Здесь s_1, s_2 — корни уравнения

$$\beta_1 s^4 + (\beta - \alpha_1)s^2 + \alpha = 0 \tag{1.5}$$

Как известно, составляющие напряжения и проекции перемещения в трансверсально изотропной среде в общем случае деформации выражаются через две функции φ и F, удовлетворяющие уравнениям [3]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + s_0^2D^2\right)\varphi = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + s_1^2D^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + s_2^2D^2\right)F = 0 \tag{1.6}$$

Общие выражения для напряжений и перемещений имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -2G\partial_1\partial_2\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\left(2G\partial_2^2 - \alpha D^2 + \beta\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)F,\\ \sigma_y &= 2G\partial_1\partial_2\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\left(2G\partial_1^2 - \alpha D^2 + \beta\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)F,\end{aligned} \qquad \sigma_z = \frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha_1D^2 + \beta_1\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)F \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= G(\partial_1^2 - \partial_2^2)\varphi - \frac{\partial}{\partial z}(2G\partial_1\partial_2F)\\ \tau_{xz} &= -G_1\frac{\partial}{\partial z}(\partial_2\varphi) + \partial_1\left(\alpha D^2 - \beta\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)F\\ \tau_{yz} &= G_1\frac{\partial}{\partial z}(\partial_1\varphi) + \partial_2\left(\alpha D^2 - \beta\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)F\end{aligned} \tag{1.8}$$

$$u = -\partial_2\varphi - \frac{\partial}{\partial z}(\partial_1F), \qquad v = \partial_1\varphi - \frac{\partial}{\partial z}(\partial_2F), \qquad w = \left(\gamma D^2 + \delta\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)F \tag{1.9}$$

2. Упругое равновесие бесконечного слоя. Рассмотрим бесконечный плоско-параллельный упругий трансверсально изотропный слой постоянной толщины h, находящийся в равновесии под действием усилий, приложенных к ограничивающим плоскостям; объемных сил рассматривать не будем. Предполагаем, что плоскости изотропии в любой точке параллельны срединной плоскости. Приняв последнюю за плоскость xy, имеем уравнения обобщенного закона Гука в форме (1.1).

Любую нагрузку, приложенную к плоскостям, можно разложить на две нагрузки: А) симметричную относительно срединной плоскости и Б) кососимметричную. Нагрузка типа А вызывает деформации, которые характеризуются тем, что срединная поверхность остается плоской и испытывает растяжение или сжатие; нагрузкам типа Б соответствуют деформации, при которых срединная поверхность изгибается, причем линейные ее элементы не меняют длины. Следуя А. И. Лурье ([1], стр. 148), назовем задачу, соответствующую симметричным нагрузкам, задачей растяжения-сжатия, а соответствующую кососимметричным нагрузкам—задачей изгиба. Решения той и другой задачи будем строить при помощи функций φ и F в виде рядов, расположенных по положительным степеням z. Будем искать решения уравнений (1.6) в виде

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x, y) z^k, \qquad F = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(x, y) z^k \tag{2.1}$$

Подставляя выражения (2.1) в уравнения (1.6) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях z, получим рекуррентные дифференциальные уравнения для функций φ_k и F_k с разными индексами.

Из этих уравнений коэффициенты φ_k можно выразить через две произвольные функции φ_0, φ_0' переменных x и y, а коэффициенты F_k — через четыре функции F_1, F_2, F_1', F_2'.

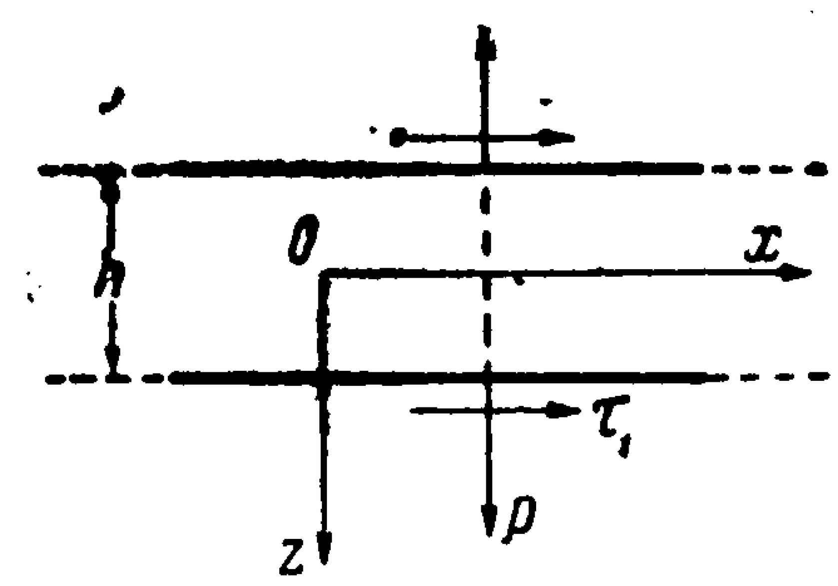
Доказано, что параметры s_1 и s_2 могут быть только вещественными или комплексными, но не могут быть чисто мнимыми числами [4]. Если они различны, то окончательные выражения для φ и F можно записать в следующей компактной форме

$$\varphi = \cos s_0 zD \cdot \varphi_0 + \sin s_0 zD \cdot \varphi_0' \tag{2.2}$$

$$F = \cos s_1 zD \cdot F_1 + \cos s_2 zD \cdot F_2 + \sin s_1 zD \cdot F_1' + \sin s_2 zD \cdot F_2'$$

Здесь $\cos s_k zD$ и $\sin s_k zD$ — дифференциальные операторы, имеющие вид

$$\cos s_k zD = 1 - \frac{s_k^2 z^2 D^2}{2!} + \frac{s_k^4 z^4 D^4}{4!} - \ldots$$
$$\sin s_k zD = s_k zD - \frac{s_k^3 z^3 D^3}{3!} + \frac{s_k^5 z^5 D^5}{5!} - \ldots \tag{2.3}$$



Фиг. 1

По формулам (1.7) — (1.9) найдем выражения для напряжений и перемещений, которые будут содержать те же операторы (2.3). В задаче растяжения-сжатия распределение напряжений будет симметричным относительно плоскости xy и можно заранее положить $\varphi_0' = F_1 = F_2 = 0$; в задаче изгиба $\varphi_0 = F_1' = F_2' = 0$. В дальнейшем будем всегда предполагать, что $s_1 \neq s_2$. При равных параметрах все формулы будут несколько сложнее, но мы на этом случае останавливаться не будем, так как он сведется к случаю изотропного слоя, если ввести новую переменную $z' = s_1 z$. С другой стороны, решение любой частной задачи при $s_1 = s_2$ можно получить из решения для случая неравных параметров путем предельного перехода.

3. Растяжение-сжатие слоя. Пусть на ограничивающих плоскостях заданы нормальные и касательные усилия, распределенные симметрично относительно срединной поверхности (фиг. 1).

Обозначим через p, τ_1, τ_2 — интенсивности внешних усилий; нормальные усилия будем считать положительными, если они растягивающие, для касательных усилий примем такое же правило знаков, какое установлено для касательных напряжений.

Напряжения удовлетворяют граничным условиям

$$\tau_{xz} = \pm \tau_1, \qquad \tau_{yz} = \pm \tau_2, \qquad \sigma_z = p \quad \text{при} \quad z = \pm \frac{1}{2} h \tag{3.1}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} A &= -D^3 \left[s_1 (\alpha + \beta s_1^2) \cos s_1 zD \cdot F_1' + s_2 (\alpha + \beta s_2^2) \cos s_2 zD \cdot F_2' \right] \\ B &= D \left(s_1 \cos s_1 zD \cdot F_1' + s_2 \cos s_2 zD \cdot F_2' \right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

На основании выражений (2.2) по формулам (1.7) — (1.9) получим:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -2G\partial_1\partial_2 \cos s_0 zD \cdot \varphi_0 + A + 2G\partial_2^2 B \\ \sigma_y &= 2G\partial_1\partial_2 \cos s_0 zD \cdot \varphi_0 + A + 2G\partial_1^2 B \\ \sigma_z &= D^3 \left[s_1 (\alpha_1 - \beta_1 s_1^2) \cos s_1 zD \cdot F_1' + s_2 (\alpha_1 - \beta_1 s_2^2) \cos s_2 zD \cdot F_2' \right] \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= G (\partial_1^2 - \partial_2^2) \cos s_0 zD \cdot \varphi_0 - 2G\partial_1\partial_2 B \\ \tau_{xz} &= G_1 s_0 \partial_2 D \sin s_0 zD \cdot \varphi_0 + \partial_1 D^2 \left[(\alpha + \beta s_1^2) \sin s_1 zD \cdot F_1' + \right. \\ &\quad \left. + (\alpha + \beta s_2^2) \sin s_2 zD \cdot F_2' \right] \\ \tau_{yz} &= -G_1 s_0 \partial_1 D \sin s_0 zD \cdot \varphi_0 + \partial_2 D^2 \left[(\alpha + \beta s_1^2) \sin s_1 zD \cdot F_1' + \right. \\ &\quad \left. + (\alpha + \beta s_2^2) \sin s_2 zD \cdot F_2' \right] \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} u &= -\partial_2 \cos s_0 zD \cdot \varphi_0 - \partial_1 B, \qquad v = \partial_1 \cos s_0 zD \cdot \varphi_0 - \partial_2 B \\ w &= D^2 \left[(\gamma - \delta s_1^2) \sin s_1 zD \cdot F_1' + (\gamma - \delta s_2^2) \sin s_2 zD \cdot F_2' \right] \end{aligned} \tag{3.5}$$

Удовлетворяя условиям (3.1), для φ_0, F_1', F_2' получим уравнения

$$\begin{aligned} & G_1 s_0 \partial_2 D \sin \frac{s_0 hD}{2} \cdot \varphi_0 + (\alpha + \beta s_1^2) \partial_1 D^2 \sin \frac{s_1 hD}{2} \cdot F_1' + \\ & \quad + (\alpha + \beta s_2^2) \partial_1 D^2 \sin \frac{s_2 hD}{2} \cdot F_2' = \tau_1 \\ & -G_1 s_0 \partial_1 D \sin \frac{s_0 hD}{2} \cdot \varphi_0 + (\alpha + \beta s_1^2) \partial_2 D^2 \sin \frac{s_1 hD}{2} \cdot F_1' + \\ & \quad + (\alpha + \beta s_2^2) \partial_2 D^2 \sin \frac{s_2 hD}{2} \cdot F_2' = \tau_2 \\ & s_1 (\alpha_1 - \beta_1 s_1^2) D^3 \cos \frac{s_1 hD}{2} \cdot F_1' + s_2 (\alpha_1 - \beta_1 s_2^2) D^3 \cos \frac{s_2 hD}{2} \cdot F_2' = p \end{aligned} \tag{3.6}$$

Будем решать эти уравнения так же, как в соответствующем случае изотропного слоя ([1], стр. 153—156). Составим оператор-определитель системы (3.7) Q' и миноры Q_{ij}'; получим

$$Q' = \frac{G_1 s_0}{h} D^6 Q \tag{3.7}$$

где

$$Q = D^2 \sin \frac{s_0 hD}{2} \left[(s_1 + s_2) \sin (s_1 - s_2) \frac{hD}{2} + (s_1 - s_2) \sin (s_1 + s_2) \frac{hD}{2} \right] \tag{3.8}$$

Выражений миноров приводить не будем; структура их ясна (см. систему (3.6)). Далее вводим три функции напряжений, требуя, чтобы они удовлетворяли уравнениям

$$Q'\chi_1' = \tau_1, \qquad Q'\chi_2' = \tau_2, \qquad Q'\chi_3' = p \tag{3.9}$$

Для этого нужно положить

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= Q_{11}'\chi_1' + Q_{21}'\chi_2' + Q_{31}'\chi_3' \\ F_1' &= Q_{12}'\chi_1' + Q_{22}'\chi_2' + Q_{32}'\chi_3' \\ F_2' &= Q_{13}'\chi_1' + Q_{23}'\chi_2' + Q_{33}'\chi_3' \end{aligned} \tag{3.10}$$

Введем новые функции

$$\chi_k = \frac{s_0}{n} D^6 \chi_k' \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{3.11}$$

Эти функции удовлетворяют уравнениям

$$Q\chi_1 = \frac{\tau_1}{G_1}, \qquad Q\chi_2 = \frac{\tau_2}{G_1}, \qquad Q\chi_3 = \frac{p}{G_1} \tag{3.12}$$

Получаем окончательные выражения

$$\varphi_0 = \frac{Q}{s_0 D^3 \sin s_0 hD/2} (\partial_2\chi_1 - \partial_1\chi_2)$$

$$\begin{aligned} F_1' = G_1 n \frac{1}{D^2} \sin\frac{s_0hD}{2}\Big[& s_2(\alpha_1 - \beta_1 s_2^2)\cos\frac{s_2hD}{2}(\partial_1\chi_1 + \partial_2\chi_2) - \\ & - (\alpha + \beta s_2^2) D \sin\frac{s_2hD}{2}\chi_3\Big] \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} F_2' = G_1 n \frac{1}{D^2} \sin\frac{s_0hD}{2}\Big[& - s_1(\alpha_1 - \beta_1 s_1^2)\cos\frac{s_1hD}{2}(\partial_1\chi_1 + \partial_2\chi_2) + \\ & + (\alpha + \beta s_1^2) D \sin\frac{s_1hD}{2}\chi_3\Big] \end{aligned}$$

Эти функции нужно подставить в формулы (2.3) — (3.5). Тогда получим выражения для напряжений и перемещений, но мы их приводить не будем. Отметим только, что все дифференциальные операторы коммутативны, а поэтому при подстановке никаких осложнений возникнуть не может.

4. Частные случаи растяжения-сжатия. Все формулы и уравнения значительно упрощаются в двух частных случаях задания нагрузки,

Случай 1. На поверхности действуют только нормальные усилия ($\tau_1 = \tau_2 = 0$). Так как χ_1, χ_2 удовлетворяют однородным уравнениям, то можно принять их равными нулю. Введем вместо χ_3 новую функцию напряжений

$$\chi = D \sin\frac{s_0hD}{2}\chi_3 \tag{4.1}$$

Эта функция удовлетворяет уравнению

$$D\left[(s_1 + s_2)\sin(s_1 - s_2)\frac{hD}{2} + (s_1 - s_2)\sin(s_1 + s_2)\frac{hD}{2}\right]\chi = \frac{p}{G_1} \tag{4.2}$$

Получаем $\varphi_0 = 0$ (4.3)

$$F_1' = -G_1 n(\alpha + \beta s_2^2)\frac{1}{D^2}\sin\frac{s_2hD}{2}\chi, \qquad F_2' = G_1 n(\alpha + \beta s_1^2)\frac{1}{D^2}\sin\frac{s_1hD}{2}\chi$$

Случай 2. Нормальные усилия отсутствуют, а касательные имеют потенциал, т. е.

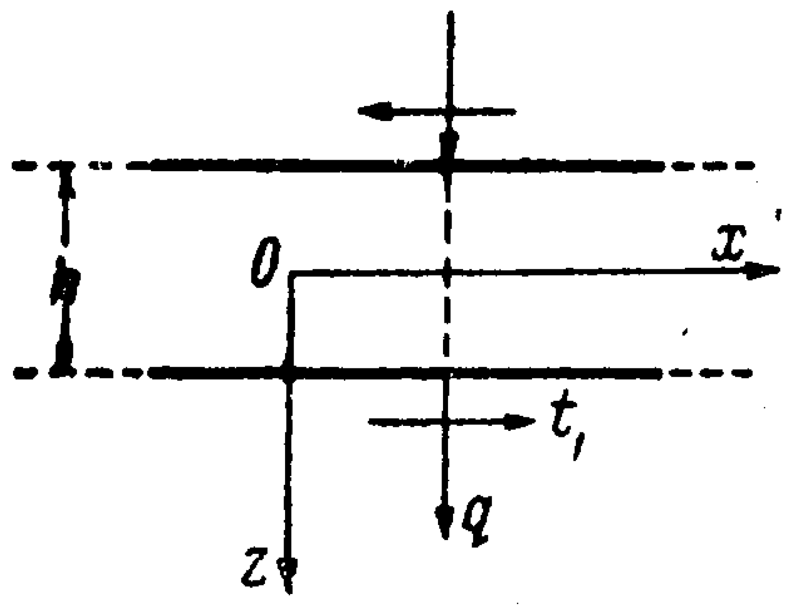
$$p = 0, \qquad \tau_1 = \partial_1\tau, \qquad \tau_2 = \partial_2\tau \tag{4.4}$$

Вводим новую функцию χ^*, полагая

$$\chi_1 = \frac{\partial_1\chi^*}{D\sin s_0hD/2}, \qquad \chi_2 = \frac{\partial_2\chi^*}{D\sin s_0hD/2}, \qquad \chi_3 = 0 \tag{4.5}$$

Функция χ^* удовлетворяет уравнению (4.2), куда вместо p нужно **подставить** τ.

5. Изгиб слоя. Пусть на поверхностях слоя задана кососимметричная нагрузка с составляющими $\pm q$, t_1, t_2 на единицу площади (фиг. 2).



Фиг. 2

В этом случае имеем граничные условия

$$\tau_{xz} = t_1, \qquad \tau_{yz} = t_2, \qquad \sigma_z = \pm q \qquad \text{при } z = \pm \frac{1}{2} h \tag{5.1}$$

Введя сокращенные обозначения

$$A_1 = D^3 \left[s_1 (\alpha + \beta s_1^2) \sin s_1 zD \cdot F_1 + s_2 (\alpha + \beta s_2^2) \sin s_2 zD \cdot F_2 \right] \tag{5.2}$$

$$B_1 = -D \left(s_1 \sin s_1 zD \cdot F_1 + s_2 \sin s_2 zD \cdot F_2 \right)$$

формулы для напряжений и перемещений представим в следующем виде

$$\sigma_x = -2G\partial_1\partial_2 \sin s_0 zD \cdot \varphi_0' + A_1 + 2G\partial_2^2 B_1$$

$$\sigma_y = 2G\partial_1\partial_2 \sin s_0 zD \cdot \varphi_0' + A_1 + 2G\partial_1^2 B_1 \tag{5.3}$$

$$\sigma_z = -D^3 \left[s_1 (\alpha_1 - \beta_1 s_1^2) \sin s_1 zD \cdot F_1 + s_2 (\alpha_1 - \beta_1 s_2^2) \sin s_2 zD \cdot F_2 \right]$$

$$\tau_{xy} = G (\partial_1^2 - \partial_2^2) \sin s_0 zD \cdot \varphi_0' - 2G\partial_1\partial_2 B_1$$

$$\tau_{xz} = -G_1 s_0 \partial_2 D \cos s_0 zD \cdot \varphi_0' + \partial_1 D^2 \left[(\alpha + \beta s_1^2) \cos s_1 zD \cdot F_1 + (\alpha + \beta s_2^2) \cos s_2 zD \cdot F_2 \right] \tag{5.4}$$

(5.5)

$$\tau_{yz} = G_1 s_0 \partial_1 D \cos s_0 zD \cdot \varphi_0' + \partial_2 D^2 \left[(\alpha + \beta s_1^2) \cos s_1 zD \cdot F_1 + (\alpha + \beta s_2^2) \cos s_2 zD \cdot F_2 \right]$$

$$u = -\partial_2 \sin s_0 zD \cdot \varphi_0' - \partial_1 B_1$$

$$v = \partial_1 \sin s_0 zD \cdot \varphi_0' - \partial_2 B_1$$

$$w = D^2 \left[(\gamma - \delta s_1^2) \cos s_1 zD \cdot F_1 + (\gamma - \delta s_2^2) \cos s_2 zD \cdot F_2 \right]$$

Удовлетворяя граничным условиям (5.1), получим систему уравнений для неизвестных функций φ_0', F_1, F_2, которую решим совершенно так же, как в случае растяжения-сжатия; в результате все величины выразятся через три функции напряжений, удовлетворяющие уравнениям

$$Q_1 \psi_1 = \frac{t_1}{G_1}, \qquad Q_1 \psi_2 = \frac{t_2}{G_1}, \qquad Q_1 \psi_3 = \frac{q}{G_1} \tag{5.6}$$

Здесь

$$Q_1 = D \cos \frac{s_0 hD}{2} \left[(s_1 + s_2) \sin (s_1 - s_2) \frac{hD}{2} - (s_1 - s_2) \sin (s_1 + s_2) \frac{hD}{2} \right] \tag{5.7}$$

Окончательные формулы будут иметь вид

$$\varphi_0' = -\frac{Q_1}{s_0 D^3 \cos s_0 hD/2} (\partial_2 \psi_1 - \partial_1 \psi_2) \tag{5.8}$$

$$F_1 = -\frac{G_1 n}{D^3} \cos \frac{s_0 hD}{2} \left[s_2 (\alpha_1 - \beta_1 s_2^2) \sin \frac{s_2 hD}{2} (\partial_1 \psi_1 + \partial_2 \psi_2) + (\alpha + \beta s_2^2) D \cos \frac{s_2 hD}{2} \cdot \psi_3 \right]$$

$$F_2 = \frac{G_1 n}{D^3} \cos \frac{s_0 hD}{2} \left[s_1 (\alpha_1 - \beta_1 s_2^2) \sin \frac{s_1 hD}{2} (\partial_1 \psi_1 + \partial_2 \psi_2) + (\alpha + \beta s_1^2) D \cos \frac{s_1 hD}{2} \cdot \psi_3 \right]$$

6. Частные случаи изгиба. В задаче изгиба также можно отметить два частных случая, приводящих к значительным упрощениям.

Случай 1. Изгиб нормальной нагрузкой.

Пусть $t_1 = t_2$. Тогда можно принять $\psi_1 = \psi_2 = 0$ и ввести новую функцию напряжений

$$\psi = \cos \frac{s_0 hD}{2} \cdot \psi_3 \tag{6.1}$$

Функция ψ удовлетворяет уравнению

$$D\left[(s_1 + s_2)\sin(s_1 - s_2)\frac{hD}{2} - (s_1 - s_2)\sin(s_1 + s_2)\frac{hD}{2}\right]\psi = \frac{q}{G_1} \tag{6.2}$$

В этом случае $\varphi_0' = 0$

$$F_1 = -\frac{G_1 n}{D^2}(\alpha + \beta s_2^2)\cos\frac{s_2 hD}{2}\psi, \qquad F_2 = \frac{G_1 n}{D^2}(\alpha + \beta s_1^2)\cos\frac{s_1 hD}{2}\psi \tag{6.3}$$

Случай 2. На поверхностях заданы касательные усилия, имеющие потенциал

$$q = 0, \qquad t_1 = \partial_1 t_1, \qquad t_2 = \partial_2 t \tag{6.4}$$

В этом случае $\varphi_0' = 0$

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{G_1 n}{D} s_2 (\alpha_1 - \beta_1 s_2^2)\sin\frac{s_2 hD}{2}\psi^* \\ F_2 &= \frac{G_1 n}{D} s_1 (\alpha_1 - \beta_1 s_1^2)\sin\frac{s_1 hD}{2}\psi^* \end{aligned} \tag{6.5}$$

Для функции ψ^* получается уравнение (6.2), где $q = t$.

7. Однородные решения и задача о равновесии толстой плиты конечных размеров. Однородными будем называть решения уравнений, которым удовлетворяют функции напряжений при отсутствии нагрузок на плоскостях $z = \pm h / 2$. При помощи однородных решений можно получить распределение напряжений и перемещения в толстой плите конечных размеров, нагруженной по плоским поверхностям произвольной нагрузкой, которую всегда можно разложить на симметричную относительной срединной плоскости и кососимметричную.

Полагая в (3.12) и (5.6) $p = \tau_1 = \tau_2 = 0$ и $q = t_1 = t_2 = 0$, получим для функций χ_k и ψ_k однородные линейные уравнения бесконечно высокого порядка, в соответствии со структурой операторов Q и Q_1. Но если не удовлетворять условиям на боковой поверхности (т. е. на краю) точно и потребовать, чтобы выполнялись только условия осредненные или интегральные, как в теории тонких плит, то достаточно за χ_k и ψ_k принять частные решения уравнений (3.12) и (5.6), а именно — бигармонические функции.

Вывод формул для напряжений и перемещений, соответствующих однородным решениям, совершенно аналогичен выводу для изотропного слоя ([1], стр. 202—205), а поэтому на нем подробно останавливаться не будем.

А) Симметричное распределение напряжений. Считая функции χ_k бигармоническими, получаем в любой точке

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0 \tag{7.1}$$

Введем новую бигармоническую функцию $F\,(x, y)$, положив (7.2)

$$\partial_1\chi_1 = \partial_2\chi_2 = -\frac{F}{2G_1 s_0 (s_1{}^2 - s_2{}^2)(1+\nu)\,h}, \qquad \chi_3 = \frac{(3-\nu)\,E/G_1 - 8\nu\nu_2}{12E\nu_2 (s_1{}^2 - s_2{}^2)(1-\nu)}\, s_0 F$$

Тогда придем к известным формулам, описывающим плоское напряженное состояние трансверсально изотропной плиты [5]

$$\sigma_x = \partial_2{}^2 F_1, \qquad \sigma_y = \partial_1{}^2 F_1, \qquad \tau_{xy} = -\,\partial_1\partial_2 F_1 \tag{7.3}$$

где

$$F_1 = F + \frac{\nu_2}{2(1+\nu)}\left(\frac{h^2}{12} - z^2\right) D^2 F \tag{7.4}$$

Б) Кососимметричное распределение напряжений. Можно принять $\psi_1 = \psi_2 = 0$, а функцию ψ считать бигармонической.

Введем новую бигармоническую функцию w_0, связав ее с ψ таким образом

$$\psi = \frac{E}{2G_1 s_1 s_2 (s_1{}^2 - s_2{}^2)(1-\nu^2)}\left[w_0 + \frac{h^2}{8(1-\nu)}\left(\frac{2G}{G_1} - \nu_2\right) D^2 w_0\right] \tag{7.5}$$

Тогда получим известные зависимости [5], имеющие место при изгибе

$$u = -\,z\partial_1 w_1, \qquad v = -\,z\partial_2 w_1, \qquad w = w_0 + z^2 \frac{\nu_2}{2(1-\nu)} D^2 w_0 \tag{7.6}$$

Здесь w_0 — прогиб срединной плоскости

$$w_1 = w_0 + \frac{E}{2G_1(1-\nu^2)}\left[\frac{h^2}{4} - \left(1 - \frac{G_1\nu_2}{2G}\right)\frac{z^2}{3}\right] D^2 w_0 \tag{7.7}$$

Формул для напряжений приводить не будем. Для того чтобы решить задачу о равновесии плиты конечных размеров, прежде всего следует разложить нагрузку на симметричную и кососимметричную и определить соответствующие функции χ_k и ψ_k для бесконечного слоя. После этого определяем усилия и перемещения, которые получаются на боковой поверхности, а затем накладываем однородные решения типа *А* и *Б* и подбираем их так, чтобы на боковой поверхности (на краю) выполнялись нужные осредненные (интегральные) условия.

В такой постановке каждая из двух задач *А* и *Б* сведется к определению функции, бигармонической в области плиты.

8. Частные решения уравнений для функций напряжений. Остановимся на случаях, когда на плоских поверхностях действуют только нормальные нагрузки p и q и рассмотрим некоторые частные случаи задания нагрузок. Функции напряжений χ и ψ удовлетворяют следующим уравнениям:

задача растяжения-сжатия

$$D\left[(s_1 + s_2)\sin(s_1 - s_2)\frac{hD}{2} + (s_1 - s_2)\sin(s_1 + s_2)\frac{hD}{2}\right]\chi = \frac{p}{G_1} \tag{8.1}$$

задача изгиба

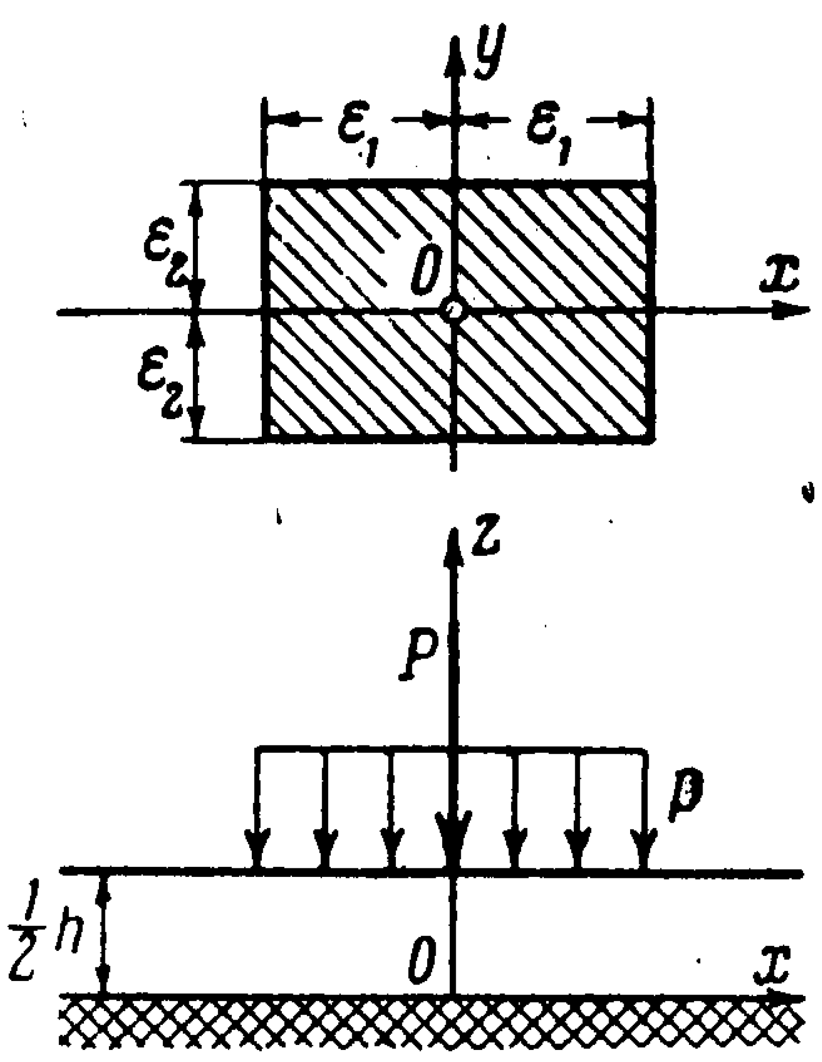
$$D\left[(s_1 + s_2)\sin(s_1 - s_2)\frac{hD}{2} - (s_1 - s_2)\sin(s_1 + s_2)\frac{hD}{2}\right]\psi = \frac{q}{G_1} \tag{8.2}$$

Если слой является изотропным ($s_1 = s_2 = 1$), то уравнения (8.1) и (8.2) должны быть заменены другими ([1], стр. 155—157)

$$D^2\left(1+\frac{\sin hD}{hD}\right)\chi = \frac{p}{2G}, \qquad D^2\left(1-\frac{\sin hD}{hD}\right)\psi = \frac{q}{2Gh} \tag{8.3}$$

Вопрос об отыскании частных решений уравнений для изотропного слоя достаточно подробно разобран в книге А. И. Лурье [1].

Все рассуждения по этому поводу, относящиеся к изотропному слою, можно без существенных изменений перенести и на случай трансверсально изотропного слоя, а поэтому можно ограничиться лишь указанием решений для двух наиболее типичных случаев нагрузки.



Фиг. 3

1. Нагрузка является полигармонической функцией координат x, y, т. е. удовлетворяет уравнению

$$D^{2n}p = 0 \quad \text{или} \quad D^{2n}q = 0 \tag{8.4}$$

В этом случае χ является $n+1$-гармонической функцией, а ψ — $n+2$-гармонической.

В частности, если p и q будут полиномами степени n относительно x и y, то χ есть полином степени $n+2$, а ψ — полином степени $n+4$. Разыскивая χ и ψ в виде полиномов указанных степеней с неопределенными коэффициентами, путем сравнения членов в левых и правых частях получим для коэффициентов уравнения, число которых меньше числа неизвестных. Вследствие этого некоторые коэффициенты можно зафиксировать произвольно, например, положить равными нулю.

2. Нагрузка удовлетворяет уравнению свободных колебаний мембраны, т. е.

$$D^2p = -m^2p \quad \text{или} \quad D^2q = -m^2q \qquad (m = \text{const}) \tag{8.5}$$

Функции χ и ψ определяются в виде

$$\chi = -\frac{1}{G_1 m}\,\frac{p}{(s_1+s_2)\,\text{sh}\,[(s_1-s_2)\,mh/2] + (s_1-s_2)\,\text{sh}\,[(s_1+s_2)\,mh/2]} \tag{8.6}$$

$$\psi = -\frac{1}{G_1 m}\,\frac{q}{(s_1+s_2)\,\text{sh}\,[(s_1-s_2)\,mh/2] - (s_1-s_2)\,\text{sh}\,[(s_1+s_2)\,mh/2]} \tag{8.7}$$

Пример. Бесконечный трансверсально изотропный слой толщиной $h/2$ покоится на гладком абсолютно жестком основании и сжимается нормальной нагрузкой, распределенной по верхней грани (фиг. 3).

Предложим, что трение по поверхности контакта пренебрежимо мало, т. е.

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \qquad w = 0 \quad \text{при } z = 0 \tag{8.8}$$

Тогда решение этой задачи будет тождественно с решением для слоя толщиной h, нагруженного с двух сторон данными усилиями, симметричными относительно срединной плоскости.

Допустим, что нагрузка может быть представлена интегралом Фурье

$$p = \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty Q(\alpha, \beta)\cos\alpha x\cos\beta y\, d\alpha\, d\beta \tag{8.9}$$

где

$$Q = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty p \cos \alpha\xi \cos \beta\eta \, d\xi \, d\eta \tag{8.10}$$

Очевидно, произведение $\cos \alpha x \cos \beta y$ удовлетворяет уравнению (8.5), где $m = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, а следовательно, функция χ найдется по формуле, полученной из (8.6) путем суммирования, т. е. интегрирования

$$\chi = -\frac{1}{G_1} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{Q}{m} \frac{\cos \alpha x \cos \beta y}{(s_1 + s_2) \operatorname{sh} [(s_1 - s_2) mh / 2] + (s_1 - s_2) \operatorname{sh} [(s_1 + s_2) mh / 2]} \, d\alpha \, d\beta \tag{8.11}$$

Пусть, например, сжимающая нагрузка равномерно распределена по площади прямоугольника со сторонами $2\varepsilon_1$, $2\varepsilon_2$. Обозначая через P ее равнодействующую, имеем

$$p = -\frac{P}{4\varepsilon_1\varepsilon_2} \tag{8.12}$$

внутри прямоугольника и $p = 0$ в других точках. Получаем

$$Q = -\frac{P}{\pi^2\varepsilon_1\varepsilon_2\alpha\beta} \sin \alpha\varepsilon_1 \sin \beta\varepsilon_2 \tag{8.13}$$

Устремляя ε_1 и ε_2 к нулю (при постоянном P), получим решение для случая сосредоточенной силы, приложенной в начале координат

$$\chi = \frac{P}{\pi^2 G_1} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{m} \frac{\cos \alpha x \cos \beta y}{(s_1 + s_2) \operatorname{sh} [(s_1 - s_2) mh / 2] + (s_1 - s_2) \operatorname{sh} [(s_1 + s_2) mh / 2]} \, d\alpha \, d\beta \tag{8.14}$$

Как и в соответствующем случае изотропного слоя ([1] стр. 175), интеграл (8.14) расходится, так как знаменатель обращается в нуль при $m = 0$, как m^2, но напряжения и перемещения, найденные при помощи функции χ по формулам (4.3), (3.3), (3.4) и (3,5), будут выражены через сходящиеся интегралы.

Поступила 1 IV 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. ГИТТЛ, М., 1955.
2. Ляв А. Математическая теория упругости, М. — Л., ОНТИ, 1935.
3. Hai-chang Hu. On the three-dimensional problems of the theory of elasticity of a transv. isotr. body. Acta sci. sinica, 1953, 2, No. 2.
4. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела, Гостехиздат, 1950.
5. Лехницкий С. Г. К теории анизотропных толстых плит. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 2.