Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОЙ ТЕОРИИ ИЗГИБА ПЛАСТИНКИ МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

А. Л. Гольденвейзер
(Москва)

Рассматриваются возможности уточнения классической теории изгиба пластинок базирующейся на гипотезе Кирхгофа. Задача изгиба пластинки формулируется как трехмерная задача теории упругости, которая решается итерационным методом; при этом предполагается, что одно из протяжений рассматриваемой области мало по сравнению с двумя другими. Искомое напряженное состояние пластинки составляется как сумма медленно затухающего напряженного состояния, которое строится при помощи основного итерационного процесса и быстро затухающих при удалении от краев напряженных состояний, которые строятся при помощи вспомогательных итерационных процессов. Такой подход часто применяется при асимптотическом интегрировании дифференциальных уравнений (см. обзорную статью [1]) и соответствует физической сущности явления. Основной итерационный процесс позволяет находить то напряженное состояние, которое в первом приближении дает классическая теория. Вспомогательный итерационный процесс позволяет учесть те краевые напряженные состояния, которые обнаружились при попытке уточнить классическую теорию с помощью замены гипотезы Кирхгофа другим предположением (см., например, [2-6]).

1. Будем интегрировать следующую систему дифференциальных уравнений теории упругости.

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}=0 \qquad (xy) \qquad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=0 \tag{1.1}$$

Формулы перемещения — напряжения

$$\begin{gathered} E\frac{\partial u}{\partial x}=\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z) \quad (xy), \qquad E\frac{\partial w}{\partial z}=\sigma_z-\nu(\sigma_x+\sigma_y) \\ E\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=2(1+\nu)\tau_{xz} \quad (xy), \qquad E\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=2(1+\nu)\tau_{xy} \end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь и в дальнейшем символ (xy) означает, что имеет место второе соотношение, которое получается из приведенного заменой x и u на y и v и наоборот.

Предполагается, что ось z декартовой системы координат перпендикулярна к плоскости пластинки, а оси x, y лежат в срединной плоскости. Исследуется изгиб пластинки; поэтому всюду принимается, что искомое напряженное и деформированное состояние пластинки обратно симметрично относительно плоскости xoy.

Обозначим толщину пластинки через $2h$, тогда на плоскостях $z=\pm h$ должны выполняться следующие граничные условия:

$$\sigma_z=\pm\frac{1}{2}p\,(x, y), \qquad \tau_{xz}=0, \qquad \tau_{yz}=0 \tag{1.3}$$

где $p\,(x, y)$ — интенсивность внешней нормальной нагрузки.

Будет использовано соотношение

$$\partial \sigma_z / \partial z = 0 \qquad \text{при } z = \pm h \tag{1.4}$$

которое вытекает из (1.3) и третьего уравнения (1.1).

Граничные условия на боковых поверхностях пластинки будут сформулированы ниже.

2. Назовем основным итерационный процесс, который позволяет находить основные (не обладающие свойством быстрого затухания при удалении от бокового края пластинки напряженные состояния).

Примем, что в основном напряженном состоянии напряжения и перемещения не слишком быстро изменяются по переменным (x, y). В направлении z эти величины, очевидно, должны изменяться быстро. Поэтому применим известный прием растяжения масштаба, заменив z по формуле

$$z = h\zeta \tag{2.1}$$

и примем, что по переменным (x, y, ζ) быстрота изменения напряжений и перемещений будет не слишком велика.

Уравнения (1.1), (1.2) после замены принимают вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + h^{-1} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \zeta} = 0 \quad (xy), \qquad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + h^{-1} \frac{\partial \sigma_z}{\partial \zeta} = 0 \\
E \frac{\partial u}{\partial x} = \sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \quad (xy), \qquad E h^{-1} \frac{\partial w}{\partial \zeta} = \sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \\
E \left(h^{-1} \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 2 (1 + \nu) \tau_{xz} \quad (xy), \qquad E \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 2 (1 + \nu) \tau_{xy}
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Пусть Q есть любое из напряжений или перемещений. Зададим его в виде

$$Q = h^{-q} \sum_{s=1}^{s=S} h^{s-1} Q^{(s)} \tag{2.3}$$

Здесь q — целое число, различное для различных перемещений и напряжений, определяемое следующими соотношениями:

$$\begin{gathered}
(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \to q = \varkappa + 2, \qquad (\tau_{xz}, \tau_{yz}) \to q = \varkappa + 1, \qquad \sigma_z \to q = \varkappa \\
(u, v) \to q = \varkappa + 2, \qquad w \to q = \varkappa + 3
\end{gathered} \tag{2.4}$$

(число $\varkappa$ пока остается неопределенным).

Выразим в уравнениях (2.2) напряжения и перемещения в виде (2.3), (2.4) и приравняем коэффициенты при равных степенях h в левых и правых частях каждого отдельно взятого уравнения. Получим систему

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \sigma_x^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0 \quad (xy), \qquad \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^{(s)}}{\partial \zeta} = 0 \\
E \frac{\partial u^{(s)}}{\partial x} = \sigma_x^{(s)} - \nu (\sigma_y^{(s)} + \sigma_z^{(s-2)}) \quad (xy) \\
E \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \zeta} = \sigma_z^{(s-4)} - \nu (\sigma_x^{(s-2)} + \sigma_y^{(s-2)}) \\
E \left(\frac{\partial u^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w^{(s)}}{\partial x} \right) = 2 (1 + \nu) \tau_{xz}^{(s-2)} \quad (xy) \\
E \left(\frac{\partial u^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(s)}}{\partial x} \right) = 2 (1 + \nu) \tau_{xy}^{(s)}
\end{gathered} \tag{2.5}$$

Здесь и в дальнейшем считается, что величины $Q^{(s)} \equiv 0$ при $s < 1$.

Уравнения (2.5) образуют цепочку систем уравнений и основной итерационный процесс заключается в последовательном (в порядке возрастания индекса s) определении $Q^{(s)}$ из соответствующей системы. При этом при построении $Q^{(s+1)}$ надо считать известным $Q^{(1)}, Q^{(2)}, \ldots, Q^{(s)}$.

3. Величину $Q^{(s)}$, т. е. интеграл системы уравнений (2.5), будем строить в виде суммы двух слагаемых $Q_i^{(s)} + Q^{*(s)}$. Под первым слагаемым подразумевается интеграл однородной системы

$$\frac{\partial \sigma_x^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0 \quad (xy), \qquad \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^{(s)}}{\partial \zeta} = 0$$

$$E\frac{\partial u^{(s)}}{\partial x} = \sigma_x^{(s)} - \nu\sigma_y^{(s)} \quad (xy), \qquad E\frac{\partial w^{(s)}}{\partial \zeta} = 0 \tag{3.1}$$

$$E\left(\frac{\partial u^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w^{(s)}}{\partial x}\right) = 0 \quad (xy), \qquad E\left(\frac{\partial u^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(s)}}{\partial x}\right) = 2(1+\nu)\tau_{xy}^{(s)}$$

получающейся за счет отбрасывания в (2.5) величин с верхним индексом меньшим s, а под вторым слагаемым подразумевается какой-либо частный интеграл неоднородной системы (2.5), в которой все величины с верхним индексом, меньшим s, рассматриваются как известные.

Система (3.1) интегрируется легко. Получаем

$$u_i^{(s)} = \zeta u_1^{(s)} \quad (xy), \qquad w_i^{(s)} = w_0^{(s)}$$

$$\sigma_{xi}^{(s)} = \zeta\sigma_{x_1}^{(s)} \quad (xy), \qquad \tau_{xyi}^{(s)} = \zeta\tau_{xy1}^{(s)}, \qquad \tau_{xzi}^{(s)} = \zeta^2\tau_{xz2}^{(s)} + \tau_{xz0}^{(s)} \quad (xy)$$

$$\sigma_{zi} = \zeta^3\sigma_{z3}^{(s)} + \zeta\sigma_{z1}^{(s)} \tag{3.2}$$

Здесь величины, отмеченные дополнительными числовыми индексами внизу (индексы равны степени ζ, на которую множится эта величина),— функции двух переменных (x, y), связанные следующими равенствами:

$$u_1^{(s)} = -\frac{\partial w_0^{(s)}}{\partial x} \quad (xy), \qquad \sigma_{x1}^{(s)} = -\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w_0^{(s)}}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w_0^{(s)}}{\partial y^2}\right) \quad (xy)$$

$$\tau_{xy1}^{(s)} = -\frac{E}{1+\nu}\frac{\partial^2 w_0^{(s)}}{\partial x\partial y}, \qquad \tau_{xz2}^{(s)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \sigma_{x1}^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy1}^{(s)}}{\partial y}\right) \quad (xy) \tag{3.3}$$

$$\sigma_{z3}^{(s)} = \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^2 \sigma_{x1}^{(s)}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \tau_{xy1}^{(s)}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_{y1}^{(s)}}{\partial y^2}\right), \qquad \sigma_{z1}^{(s)} = -\left(\frac{\partial \tau_{xz0}^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz0}^{(s)}}{\partial y}\right)$$

Интеграл уравнений (2.5) можно представить так:

$$Ew^{*(s)} = \int_0^\zeta [\sigma_z^{(s-4)} - \nu(\sigma_x^{(s-2)} + \sigma_y^{(s-2)})]\,d\zeta$$

$$Eu^{*(s)} = 2(1+\nu)\int_0^\zeta \tau_{xz}^{(s-2)}\,d\zeta - E\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\zeta w^{*(s)}\,d\zeta \quad (xy) \tag{3.4}$$

$$\sigma_x^{*(s)} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u^{*(s)}}{\partial x} + \nu\frac{\partial v^{*(s)}}{\partial y}\right) + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_z^{(s-2)} \quad (xy)$$

$$\tau_{xy}^{*(s)} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u^{*(s)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{*(s)}}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{xz}^{*(s)} = -\int_0^\zeta \left(\frac{\partial \sigma_x^{*(s)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{*(s)}}{\partial y}\right)d\zeta \quad (xy), \qquad \sigma_z^{*(s)} = -\int_0^\zeta \left(\frac{\partial \tau_{xz}^{*(s)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^{*(s)}}{\partial y}\right)d\zeta$$

Здесь величины, отмеченные звездочкой,—функции переменных (x, y, ζ); величины, не отмеченные звездочкой и имеющие индекс меньше s, считаются известными.

Как указывалось ранее, $Q^{(s)} \equiv 0$ при $s < 1$. Поэтому из (3.4) следует, что, $Q^{*(1)}$ и $Q^{*(2)}$ величины, отмеченные звездочкой, пви $s = 1$ и $s = 2$ тождественно равны нулю. При $s > 2$ эти величины представляют собой полиномы по переменной ζ и строятся при помощи рекуррентных формул (3.4).

Потребуем, чтобы напряжения, вычисляемые при помощи основного итерационного процесса, удовлетворяли граничным условиям (1.3), (1.4). Точнее говоря, поставим еще более жесткие требования, чтобы

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_z^{(1)} = \frac{1}{2} p, \quad \sigma_z^{(s)} = 0 \quad (s > 1) \\ &\partial \sigma_z^{(s)} / \partial z = 0, \quad \tau_{xz}^{(s)} = 0, \quad \tau_{yz}^{(s)} = 0, \quad (s \geqslant 1) \end{aligned}\right\} \text{при } z = h\,(\zeta = 1)$$

Аналогичные условия будут автоматически выполняться при $z = -h$, так как задача обратно симметрична.

При помощи (2.3), (2.4) и (3.2) получим

$$h^{s-\varkappa-1}(\sigma_{z3}^{(s)} + \sigma_{z1}^{(s)} + \sigma_z^{*(s)}) = \frac{1}{2} p_s, \qquad h^{s-\varkappa-2}\left(3\sigma_{z3}^{(s)} + \sigma_{z1}^{(s)} + \frac{\partial \sigma_z^{*(s)}}{\partial \zeta}\right) = 0$$

$$h^{s-\varkappa-2}(\tau_{xz2}^{(s)} + \tau_{xz0}^{(s)} + \tau_{xz}^{*(s)}) = 0 \quad (xy) \tag{3.5}$$

Здесь $p_1 = p$ и $p_s = 0$ при $s > 1$.

Предполагается, что $p\,(x, y)$ не зависит от h и величины $Q^{(s)}$ и $Q^{*(s)}$ также не должны зависеть от h. Выполняя это требование, положим $\varkappa = 0$ и будем решать уравнения (3.5) относительно $\sigma_{z3}^{*(s)}$, $\sigma_{z1}^{(s)}$, $\tau_{xz0}^{(s)}$, $\tau_{yz0}^{(s)}$. Получим, учтя, что величины, отмеченные звездочкой, отличны от нуля только при $s > 2$

$$\sigma_{z3}^{(1)} = -\frac{1}{4} p, \qquad \sigma_{z1}^{(1)} = \frac{3}{4} p$$

$$\sigma_{z3}^{(s)} = \frac{1}{2}\left(\sigma_z^{*(s)} - \frac{\partial \sigma_z^{*(s)}}{\partial \zeta}\right), \qquad \sigma_{z1}^{(s)} = -\frac{1}{2}\left(3\sigma_z^{*(s)} - \frac{\partial \sigma_z^{*(s)}}{\partial \zeta}\right) (s>1) \tag{3.6}$$

$$\tau_{xz0}^{(s)} = -\tau_{xz2}^{(s)} - \tau_{xz}^{*(s)} \qquad (xy)$$

Таким образом, $\sigma_{z3}^{(1)}$ выражается через p, $\sigma_{z3}^{(2)} = 0$, а при $s > 2$ σ_{z3} выражается через величины, отмеченные индексом (s) и звездочкой. Это значит, что при любых s можно считать $\sigma_{z3}^{(s)}$ известной величиной, если уже построены $s-2$ первых приближений и, следовательно, (3.3) образуют систему, из которой можно определить

$$u_1^{(s)}, \quad v_1^{(s)}, \quad w_0^{(s)}, \quad \sigma_{x1}^{(s)}, \quad \sigma_{y1}^{(s)}, \quad \tau_{xy1}^{(s)}, \quad \tau_{xz2}^{(s)}, \quad \tau_{yz2}^{(s)}$$

Легко заметить, что эта система приводится к неоднородному (при $s > 2$) бигармоническому уравнению (по x, y) относительно $w_0^{(s)}$.

4. Обратимся к построению вспомогательного итерационного процесса, т. е. процесса, при помощи которого можно находить напряженные состояния сколь угодно быстро (при достаточно малом h), затухающие при удалении от некоторой фиксированной линии плоскости xoy. Для упро-

щения выкладок всюду предполагается, что эта линия есть $x=0$, а затухание происходит в сторону $x<0$.

Сделаем в (1.1), (1.2) замены переменных

$$x = h\xi, \qquad z = h\zeta$$

из которых вторая совпадает с (2.1). Получим

$$\begin{gathered}
h^{-1}\frac{\partial\sigma_x}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+h^{-1}\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial\zeta}=0, \qquad Eh^{-1}\frac{\partial u}{\partial\xi}=\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)\\
h^{-1}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+h^{-1}\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial\zeta}=0, \qquad E\frac{\partial v}{\partial y}=\sigma_y-\nu(\sigma_z+\sigma_x)\\
h^{-1}\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+h^{-1}\frac{\partial\sigma_z}{\partial\zeta}=0, \qquad Eh^{-1}\frac{\partial w}{\partial\zeta}=\sigma_z-\nu(\sigma_x+\sigma_y) \qquad (4.1)\\
E\left(h^{-1}\frac{\partial v}{\partial\zeta}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)=2(1+\nu)\tau_{yz}, \qquad Eh^{-1}\left(\frac{\partial u}{\partial\zeta}+\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)=2(1+\nu)\tau_{xz}\\
E\left(\frac{\partial u}{\partial y}+h^{-1}\frac{\partial v}{\partial\xi}\right)=2(1+\nu)\tau_{xy}
\end{gathered}$$

В дальнейшем принимается, что скорость изменения искомых величин по переменным (ξ, y, ζ) не слишком велика.

Обозначим через R произвольное искомое напряжение или перемещение и зададим R так:

$$R = h^r\sum_{s=1}^{s=S} h^{s-1}R^{(s)} \qquad (4.2)$$

Здесь r имеет различные значения для разных напряжений и перемещений, причем для выбора значений r возможны два варианта.

Вариант I

$$\begin{gathered}
(\tau_{xy}, \tau_{yz})\to r=-\lambda, \qquad (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xz}, \sigma_z)\to r=-\lambda+1\\
(u, w)\to r=-\lambda+2, \qquad v\to r=-\lambda+1 \qquad (4.3)
\end{gathered}$$

Вариант II

$$\begin{gathered}
(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xz}, \sigma_z)\to r=-\mu+1, \qquad (\tau_{xy}, \tau_{yz})\to r=-\mu+2\\
(u, w)\to r=-\mu+2, \qquad v\to r=-\mu+3 \qquad (4.4)
\end{gathered}$$

(λ и μ — пока произвольные числа).

В соответствии с этим можно построить два варианта вспомогательного итерационного процесса. Для этого надо подставить в уравнения (4.1) разложения (4.2), расшифровать r по формулам (4.3) или (4.4) и затем требовать, чтобы в каждом отдельно взятом равенстве, при равных степенях h справа и слева были равны коэффициенты. Получим

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_x^{(\alpha)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{xy}^{(\beta)}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}^{(\alpha)}}{\partial\zeta}=0, \qquad E\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial\xi}=\sigma_x^{(\alpha)}-\nu(\sigma_y^{(\alpha)}+\sigma_z^{(\alpha)})\\
\frac{\partial\tau_{xy}^{(\alpha)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_y^{(\gamma)}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}^{(\alpha)}}{\partial\zeta}=0, \qquad E\frac{\partial v^{(\beta)}}{\partial y}=\sigma_y^{(\alpha)}-\nu(\sigma_z^{(\alpha)}+\sigma_x^{(\alpha)}) \qquad (4.5)\\
\frac{\partial\tau_{xz}^{(\alpha)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{yz}^{(\beta)}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z^{(\alpha)}}{\partial\zeta}=0, \qquad E\frac{\partial w^{(\alpha)}}{\partial\zeta}=\sigma_z^{(\alpha)}-\nu(\sigma_x^{(\alpha)}+\sigma_y^{(\alpha)})\\
E\left(\frac{\partial v^{(\alpha)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial w^{(\gamma)}}{\partial y}\right)=2(1+\nu)\tau_{yz}^{(\alpha)}, \qquad E\left(\frac{\partial u^{(\alpha)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial w^{(\alpha)}}{\partial\xi}\right)=2(1+\nu)\tau_{xz}^{(\alpha)}\\
E\left(\frac{\partial u^{(\gamma)}}{\partial y}+\frac{\partial v^{(\alpha)}}{\partial\xi}\right)=2(1+\nu)\tau_{xy}^{(\alpha)}
\end{gathered}$$

Здесь под α, β, γ надо подразумевать

$$\alpha = s, \quad \beta = s, \quad \gamma = s-2 \quad \text{для варианта I} \tag{4.6}$$

$$\alpha = s, \quad \beta = s-2, \quad \gamma = s \quad \text{для варианта II} \tag{4.7}$$

В уравнениях (4.5), как и раньше, $R^{(s)} \equiv 0$ при $s<1$.

5. Рассмотрим более подробно первый вариант вспомогательного итерационного процесса. Согласно (4.6) систему (4.5) представим так:

$$\frac{\partial \tau_{xy}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_y^{(s-2)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0 \tag{5.1}$$

$$E\left(\frac{\partial v^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w^{(s-2)}}{\partial y}\right) = 2(1+\nu)\,\tau_{yz}^{(s)}, \qquad E\left(\frac{\partial v^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(s-2)}}{\partial y}\right) = 2(1+\nu)\tau_{xy}^{(s)}$$

$$\frac{\partial \sigma_x^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(s)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^{(s)}}{\partial \zeta} = 0 \tag{5.2}$$

$$E\,\frac{\partial u^{(s)}}{\partial \xi} = \sigma_x^{(s)} - \nu\left(\sigma_y^{(s)} + \sigma_z^{(s)}\right), \qquad E\,\frac{\partial v^{(s)}}{\partial y} = \sigma_y^{(s)} - \nu\left(\sigma_z^{(s)} + \sigma_x^{(s)}\right)$$

$$E\,\frac{\partial w^{(s)}}{\partial \zeta} = \sigma_z^{(s)} - \nu\left(\sigma_x^{(s)} + \sigma_y^{(s)}\right), \qquad E\left(\frac{\partial u^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \xi}\right) = 2(1+\nu)\,\tau_{xz}^{(s)}$$

Интеграл уравнений (5.1), (5.2) представим в виде

$$R^{(s)} = R_{\mathrm{I}}^{(s)} + R_{\mathrm{I}}^{*(s)} \tag{5.3}$$

и будем считать, что:

$(\tau_{xy\mathrm{I}}^{(s)}, \tau_{yz\mathrm{I}}^{(s)}, v_{\mathrm{I}}^{(s)})$ — общий интеграл однородной системы, которая получается, если в (5.1) положить величины с индексом $(s-2)$ равными нулю

$(\sigma_{x\mathrm{I}}^{(s)}, \tau_{xz\mathrm{I}}^{(s)}, \sigma_{y\mathrm{I}}^{(s)}, \sigma_{z\mathrm{I}}^{(s)}, u_{\mathrm{I}}^{(s)}, w_{\mathrm{I}}^{(s)})$ — частный интеграл неоднородной системы уравнений, которая получается, если в (5.2) положить

$$\tau_{xy}^{(s)} = \tau_{xy\mathrm{I}}^{(s)}, \qquad \tau_{yz}^{(s)} = \tau_{yz\mathrm{I}}^{(s)}, \qquad v^{(s)} = v_{\mathrm{I}}^{(s)}$$

и считать эти величины известными;

$(\tau_{xy\mathrm{I}}^{*(s)}, \tau_{yz\mathrm{I}}^{*(s)}, v_{\mathrm{I}}^{*(s)})$ — частный интеграл неоднородной системы (5.1), в которой величины с верхним индексом $(s-2)$ рассматриваются как известные

$(\sigma_{x\mathrm{I}}^{*(s)}, \tau_{xz\mathrm{I}}^{*(s)}, \sigma_{y\mathrm{I}}^{*(s)}, \sigma_{z\mathrm{I}}^{*(s)}, u_{\mathrm{I}}^{*(s)}, w_{\mathrm{I}}^{*(s)})$ — частный интеграл неоднородной системы (5.2), которая получается, если положить

$$\tau_{xy}^{(s)} = \tau_{xy\mathrm{I}}^{*(s)}, \qquad \tau_{yz}^{(s)} = \tau_{yz\mathrm{I}}^{*(s)}, \qquad v^{(s)} = v_{\mathrm{I}}^{*(s)}$$

и считать эти величины известными.

Так как $R^{(s-2)} = 0$ при $s = 1,2$, то можно положить $R_{\mathrm{I}}^{*(1)} = 0, R_{\mathrm{I}}^{*(2)} = 0$.

В первом варианте вспомогательного итерационного процесса основной является система уравнений, из которой определяются $(\tau_{xy\mathrm{I}}^{(s)}, \tau_{yz\mathrm{I}}^{(s)}, v_{\mathrm{I}}^{(s)})$. Она представляет собой систему дифференциальных уравнений задачи о кручении призматических стержней (с осью, проходящей вдоль оси y).

6. Построение решения, которое в формуле (5.3) обозначено через $R_{\mathrm{I}}^{(s)}$, сводится к интегрированию гармонического уравнения. Действительно, отбросив в (5.1) величины, отмеченные индексом $(s-2)$, можно выполнить все эти уравнения, положив

$$\tau_{xy}^{(s)} = \tau_{xy\mathrm{I}}^{(s)} = \frac{\partial^2 \Psi^{(s)}}{\partial \xi^2}, \quad \tau_{yz}^{(s)} = \tau_{yz\mathrm{I}}^{(s)} = \frac{\partial^2 \Psi^{(s)}}{\partial \xi \partial \zeta}, \quad Ev^{(s)} = Ev_{\mathrm{I}}^{(s)} = 2(1+\nu)\frac{\partial \Psi^{(s)}}{\partial \xi} \tag{6.1}$$

где $\Psi^{(s)}$ — гармоническая функция переменных ξ, ζ

$$\frac{\partial^2\Psi^{(s)}}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\Psi^{(s)}}{\partial\zeta^2}=0 \tag{6.2}$$

Уравнения (5.2) будут также выполняться, если положить

$$\begin{gathered}
\sigma_x{}^{(s)}=\sigma_{x\mathrm{I}}^{(s)}=-2\frac{\partial^2\Psi^{(s)}}{\partial\xi\partial y}, \qquad \tau_{xz}^{(s)}=\tau_{xz\mathrm{I}}^{(s)}=-\frac{\partial^2\Psi^{(s)}}{\partial y\,\partial\zeta}\\
\sigma_z{}^{(s)}=\sigma_{z\mathrm{I}}^{(s)}=0, \qquad \sigma_y{}^{(s)}=\sigma_{y\mathrm{I}}^{(s)}=2\frac{\partial^2\Psi^{(s)}}{\partial\xi\,\partial y}\\
Eu^{(s)}=Eu_{\mathrm{I}}{}^{(s)}=-2(1+\nu)\frac{\partial\Psi^{(s)}}{\partial y}, \qquad Ew^{(s)}=Ew_{\mathrm{I}}{}^{(s)}=0
\end{gathered} \tag{6.3}$$

7. Рассмотрим второй вариант вспомогательного итерационного процесса; согласно (4.7) представим систему (4.5) так:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_x{}^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{xy}^{(s-2)}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}^{(s)}}{\partial\zeta}=0, \qquad \frac{\partial\tau_{xz}^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{yz}^{(s-2)}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z{}^{(s)}}{\partial\zeta}=0\\
E\frac{\partial u^{(s)}}{\partial\xi}=\sigma_x{}^{(s)}-\nu\left(\sigma_y{}^{(s)}+\sigma_z{}^{(s)}\right), \qquad E\frac{\partial v^{(s-2)}}{\partial y}=\sigma_y{}^{(s)}-\nu\left(\sigma_z{}^{(s)}+\sigma_x{}^{(s)}\right)\\
E\frac{\partial w^{(s)}}{\partial\zeta}=\sigma_z{}^{(s)}-\nu\left(\sigma_x{}^{(s)}+\sigma_y{}^{(s)}\right), \qquad E\left(\frac{\partial u^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial w^{(s)}}{\partial\xi}\right)=2(1+\nu)\tau_{xz}^{(s)}
\end{gathered} \tag{7.1}$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\tau_{xy}^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_y{}^{(s)}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}^{(s)}}{\partial\zeta}=0\\
E\left(\frac{\partial v^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial w^{(s)}}{\partial y}\right)=2(1+\nu)\tau_{yz}^{(s)}, \qquad E\left(\frac{\partial v^{(s)}}{\partial\xi}+\frac{\partial u^{(s)}}{\partial y}\right)=2(1+\nu)\tau_{xy}^{(s)}
\end{gathered} \tag{7.2}$$

Интеграл этой системы представим в виде

$$R^{(s)}=R_{\mathrm{II}}{}^{(s)}+R_{\mathrm{II}}{}^{*(s)} \tag{7.3}$$

и будем считать, что:

$\left(\sigma_{x\mathrm{II}}^{(s)},\ \tau_{xz\mathrm{II}}^{(s)},\ \sigma_{y\mathrm{II}}^{(s)},\ \sigma_{z\mathrm{II}}^{(s)},\ u_{\mathrm{II}}{}^{(s)},\ w_{\mathrm{II}}{}^{(s)}\right)$ — общий интеграл однородной системы уравнений, которая получается, если в (7.1) положить величины с верхним индексом $(s-2)$, равным нулю;

$\left(\tau_{xy\mathrm{II}}^{(s)},\ \tau_{yz\mathrm{II}}^{(s)},\ v_{\mathrm{II}}{}^{(s)}\right)$ — частный интеграл неоднородной системы уравнений, которая получается, если в (7.2) положить

$$\begin{gathered}
\sigma_x{}^{(s)}=\sigma_{x\mathrm{II}}^{(s)}, \qquad \tau_{xz}^{(s)}=\tau_{xz\mathrm{II}}^{(s)}, \qquad \sigma_z{}^{(s)}=\sigma_{z\mathrm{II}}^{(s)}, \qquad \sigma_y{}^{(s)}=\sigma_{y\mathrm{II}}^{(s)}\\
u^{(s)}=u_{\mathrm{II}}{}^{(s)}, \qquad w^{(s)}=w_{\mathrm{II}}{}^{(s)}
\end{gathered}$$

и считать эти величины известными;

$\left(\sigma_{x\mathrm{II}}^{*(s)},\ \tau_{xz\mathrm{II}}^{*(s)},\ \sigma_{y\mathrm{II}}^{*(s)},\ \sigma_{z\mathrm{II}}^{*(s)},\ u_{\mathrm{II}}{}^{*(s)},\ w_{\mathrm{II}}{}^{*(s)}\right)$ — частный интеграл неоднородной системы (7.1), в которой величины с верхним индексом $(s-2)$ рассматриваются как известные;

$\left(\tau_{xy\mathrm{II}}^{*(s)},\ \tau_{yz\mathrm{II}}^{*(s)},\ v_{\mathrm{II}}{}^{*(s)}\right)$ — частный интеграл неоднородной системы, которая получается, если в (7.2) положить

$$\begin{gathered}
\sigma_x{}^{(s)}=\sigma_{x\mathrm{II}}^{*(s)}, \qquad \tau_{xz}^{(s)}=\tau_{xz\mathrm{II}}^{*(s)}, \qquad \sigma_y{}^{(s)}=\sigma_{y\mathrm{II}}^{*(s)}, \qquad \sigma_z{}^{(s)}=\sigma_{z\mathrm{II}}^{*(s)}\\
u^{(s)}=u_{\mathrm{II}}{}^{*(s)}, \qquad w^{(s)}=w_{\mathrm{II}}{}^{*(s)}
\end{gathered}$$

и считать эти величины известными.

Величины $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$ равны нулю, а поэтому можно принять, что $R_{\mathrm{II}}^{*(1)}$ и $R_{\mathrm{II}}^{*(2)}$ обращаются в нуль.

Во втором варианте вспомогательного итерационного процесса основной является система уравнений, из которой определяются

$$\sigma_{xII}^{(s)},\ \tau_{xzII}^{(s)},\ \sigma_{yII}^{(s)},\ \sigma_{zII}^{(s)},\ u_{II}^{(s)},\ w_{II}^{(s)}$$

Она представляет собой систему дифференциальных уравнений задачи о плоской деформации (в плоскости xOz).

8. Построение решения, которое в формуле (7.3) обозначено через $R_{II}^{(s)}$, сводится к интегрированию бигармонического уравнения. Действительно, отбросив в (7.1) величины, отмеченные индексом $(s-2)$, можно выполнить все эти уравнения, положив

$$\begin{gathered}
\sigma_x^{(s)} = \sigma_{xII}^{(s)} = \frac{\partial^3\Phi^{(s)}}{\partial\xi\partial\zeta^2}, \qquad \sigma_z^{(s)} = \sigma_{zII}^{(s)} = \frac{\partial^3\Phi^{(s)}}{\partial\xi^3} \\
\sigma_y^{(s)} = \sigma_{yII}^{(s)} = \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)\frac{\partial\Phi^{(s)}}{\partial\xi}, \qquad \tau_{xz}^{(s)} = \tau_{xzII}^{(s)} = -\frac{\partial^3\Phi^{(s)}}{\partial\xi^2\partial\zeta} \\
Eu^{(s)} = Eu_{II}^{(s)} = (1-\nu^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)\Phi^{(s)} - (1+\nu)\frac{\partial^2\Phi^{(s)}}{\partial\xi^2} \\
Ew^{(s)} = Ew_{II}^{(s)} = (1-\nu^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)\int\frac{\partial\Phi^{(s)}}{\partial\xi}\,d\zeta - (1+\nu)\frac{\partial^2\Phi^{(s)}}{\partial\xi\partial\zeta}
\end{gathered} \tag{8.1}$$

где $\Phi^{(s)}$ — бигармоническая функция переменных ξ, ζ

$$\frac{\partial^4\Phi^{(s)}}{\partial\xi^4} + 2\frac{\partial^4\Phi^{(s)}}{\partial\xi^2\partial\zeta^2} + \frac{\partial^4\Phi^{(s)}}{\partial\zeta^4} = 0 \tag{8.2}$$

Уравнения (7.2) будут также выполняться, если положить

$$\begin{gathered}
\tau_{xy}^{(s)} = \tau_{xyII}^{(s)} = \frac{\partial^3\Phi^{(s)}}{\partial y\partial\zeta^2} - \nu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)\Phi^{(s)}, \qquad \tau_{yz}^{(s)} = \tau_{yzII}^{(s)} = -\frac{\partial^3\Phi^{(s)}}{\partial\xi\partial y\partial\zeta} \\
Ev^{(s)} = Ev_{II}^{(s)} = (1-\nu^2)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)\int\Phi^{(s)}d\xi - (1+\nu)\frac{\partial^2\Phi^{(s)}}{\partial\xi\partial y}
\end{gathered} \tag{8.3}$$

9. Потребуем, чтобы в обоих вариантах вспомогательного итерационного процесса в каждом приближении выполнялись однородные граничные условия (1.3), тем самым будет обеспечено выполнение (1.3) для суммы интегралов, соответствующих всем трем итерационным процессам.

Примем, что в формулах (5.3) и (7.3) частные интегралы $R_I^{*(s)}$ и $R_{II}^{*(s)}$ выбраны так, что каждый из них удовлетворяет при любом s однородным граничным условиям (1.3) и обладает свойством затухания при удалении от $\xi = 0$ в область $\xi < 0$.

Построение $R_I^{*(s)}$ и $R_{II}^{*(s)}$, каждое в отдельности, сводится к интегрированию системы уравнений, эквивалентной одному уравнению Пуассона и одному неоднородному бигармоническому уравнению. Поэтому можно рассчитывать, что произволов интегрирования будет достаточно, чтобы выполнить все эти требования, так как на краю $\xi = 0$ на $R_I^{*(s)}$ и $R_{II}^{*(s)}$ никаких условий не накладывается.

При таком выборе $R_I^{*(s)}$ и $R_{II}^{*(s)}$ интегралы $R_I^{(s)}$ и $R_{II}^{(s)}$ в (5.3) и (7.3) также должны удовлетворять однородным граничным условиям (1.3) и условию затухания при $\xi \to -\infty$. Кроме того, при построении $R_I^{(s)}$

и $R_{\text{II}}^{(s)}$ надо сохранить некоторые произволы для выполнения граничных условий на боковых краях пластинки.

Будем поэтому требовать, чтобы, кроме однородных граничных условий и условий затухания, выполнялись:

для $R_{\text{I}}^{(s)}$ одно граничное условие вида

$$\Gamma_{\text{I}}^{(s)} = \gamma_{\text{I}}^{(s)} \qquad \text{при } \xi = 0 \tag{9.1}$$

для $R_{\text{II}}^{(s)}$ два граничных условия вида

$$\Gamma_{\text{II}k}^{(s)} = \gamma_{\text{II}k}^{(s)} \qquad \text{при } \xi = 0 \qquad (k = 1,2) \tag{9.2}$$

Здесь $\Gamma_{\text{I}}^{(s)}$ и $\Gamma_{\text{II}k}^{(s)}$ — однородные линейные функции от величин, которым были даны объединяющие обозначения $R_{\text{I}}^{(s)}$ и $R_{\text{II}}^{(s)}$ соответственно, а $\gamma_{\text{I}}^{(s)}$ и $\gamma_{\text{II}k}^{(s)}$ — произвольные функции переменных (y, ζ).

Величины $R_{\text{I}}^{(s)}$ определяются формулами (6.1) и (6.3). Легко видеть, что они будут удовлетворять однородным граничным условиям (1.3), если потребовать, чтобы $\Psi^{(s)}$, кроме уравнения (6.2), удовлетворяла граничным условиям

$$\frac{\partial \Psi^{(s)}}{\partial \zeta} = 0 \qquad \text{при } \zeta = \pm 1 \tag{9.3}$$

Для дальнейшего представляют интерес только два варианта условий (9.1)

$$\tau_{xy\text{I}}^{(s)} = \gamma_{\text{I}}, \qquad v_{\text{I}}^{(s)} = \gamma_{\text{I}} \tag{9.4}$$

Легко показать, что уравнение (6.2) имеет решение (единственное), которое удовлетворяет при $\zeta = \pm 1$ условию (9.3), обладает свойством затухания при $\xi \to -\infty$, а при $\xi = 0$ удовлетворяет одному из условий (9.4), какова бы ни была функция γ_{I} (конечно, обладающая некоторыми свойствами непрерывности).

Это решение можно фактически построить методом разделения переменных.

Для $R_{\text{II}}^{(s)}$ вопрос о существовании таких решений оказывается более сложным. Величины $R_{\text{II}}^{(s)}$ определяются формулами (8.1) и (8.3). Легко видеть, что они будут удовлетворять однородным граничным условиям (1.3), если потребовать, чтобы $\Phi^{(s)}$, кроме уравнения (8.2), удовлетворяла граничным условиям

$$\Phi^{(s)} = \frac{\partial \Phi^{(s)}}{\partial \zeta} = 0 \qquad \text{при } \zeta = \pm 1 \tag{9.5}$$

Для того чтобы уравнение (8.2) имело решение, удовлетворяющее при $\zeta = \pm 1$ условиям (9.5), обладающее свойством затухания при $\xi \to -\infty$ и удовлетворяющее при $\xi = 0$ двум условиям (9.2), необходимо выполнить некоторые соотношения согласованности условий (9.5) и (9.2), смысл которых разъясняется в п. 10.

10. Отбросив в первых двух равенствах (7.1) слагаемые, отмеченные индексом $(s - 2)$, получим два уравнения

$$\frac{\partial \sigma_x^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial \zeta} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_z^{(s)}}{\partial \zeta} = 0 \tag{10.1}$$

которым, в числе других, должны удовлетворять величины $R_{\text{II}}^{(s)}$.

Произведем операции интегрирований: первую над первым равенством (10.1), а вторую над вторым равенством (10.1)

$$\int\limits_{-\infty}^{0} d\xi \int\limits_{-1}^{+1} d\zeta \int\limits_{-1}^{\zeta} d\zeta, \qquad \int\limits_{-\infty}^{0} d\xi \int\limits_{-\infty}^{\xi} d\xi \int\limits_{-1}^{+1} d\zeta$$

при этом, где понадобится, будем менять порядок интегрирования и выносить за знак интеграла символы дифференцирования. Тогда, учитывая однородные граничные условия (1.3) и приняв во внимание, что условия затухания можно трактовать как требования, чтобы при $\xi = -\infty$ все напряжения и перемещения обращались в нуль, получим: из первого равенства (10.1)

$$\int\limits_{-1}^{+1} d\zeta \int\limits_{-1}^{\zeta} \sigma_{x\mathrm{II}}^{(s)} \Big|_{\xi=0} d\zeta = 0, \quad \text{или} \quad \int\limits_{-1}^{+1} \zeta \sigma_{x\mathrm{II}}^{(s)} \Big|_{\xi=0} d\zeta = 0 \tag{10.2}$$

Произведя операцию $\int\limits_{-\infty}^{0} d\xi \int\limits_{-1}^{+1} d\zeta$ над вторым равенством (10.1), получим

$$\int\limits_{-1}^{+1} \tau_{xz\mathrm{II}}^{(s)} \Big|_{\xi=0} d\zeta = 0 \tag{10.3}$$

В силу (1.3) имеем

$$\tau_{xz}^{(s)} \Big|_{\xi=0} = \int\limits_{-1}^{\zeta} \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial \zeta} \Big|_{\xi=0} d\zeta$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{-1}^{+1} d\zeta \int\limits_{-1}^{\zeta} \frac{\partial \tau_{xz}^{(s)}}{\partial \zeta} \Big|_{\xi=0} d\zeta = 0 \tag{10.4}$$

Равенства (10.2) — (10.4) представляют собой для некоторых случаев соотношения согласованности. Они показывают, какие требования надо накладывать на граничные (при $\xi = 0$) значения $\sigma_{x\mathrm{II}}^{(s)}$ и $\tau_{xz\mathrm{II}}^{(s)}$, если эти величины задаются граничными условиями (9.2), чтобы стало возможным такое решение задачи о построении $R_{\mathrm{II}}{}^{(s)}$, в котором на ребрах пластинки ($\xi = 0$, $\zeta = \pm 1$) не возникают разрывы.

Замечание. Равенства (10.2) и (10.3) имеют простой физический смысл. Первое из них обозначает обращение в нуль изгибающего момента, создаваемого краевыми нормальными напряжениями $\sigma_{x\mathrm{II}}^{(s)}$, второе — обращение в нуль перерезывающего усилия, создаваемого краевыми сдвигающими напряжениями $\tau_{xz\mathrm{II}}^{(s)}$.

Введем для соотношений согласованности обозначение

$$A\, [\varphi\, (y, \zeta);\, P] = 0 \tag{10.5}$$

подразумевая под этим соотношение, которому должна подчиняться функция $\varphi\, (y, \zeta)$, если она является граничным значением P, так например, запись

$$A\, [\varphi;\, \sigma_{x\mathrm{II}}^{(s)}] = 0$$

при помощи (10.2) расшифровывается так:

$$\int\limits_{-1}^{+1} \zeta \varphi\, d\zeta = 0$$

Символическая запись (10.5) будет использоваться и в тех случаях, когда $P = u_{\text{II}}{}^{(s)}$ или $P = w_{\text{II}}{}^{(s)}$, хотя вопрос о том, как можно конкретизировать эти равенства, ждет еще решения.

11. Рассмотрим пять следующих вариантов граничных условий на боковых краях пластинки:

$$\sigma_x = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = 0 \tag{11.1}$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0 \tag{11.2}$$

$$u = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \quad w = 0 \tag{11.3}$$

$$\sigma_x = 0, \quad v = 0, \quad w = 0 \tag{11.4}$$

$$\sigma_x = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \quad w = 0 \tag{11.5}$$

Всюду считается, что край проходит вдоль линии $x = 0$, а пластинка простирается в сторону отрицательных x.

В классической теории изгиба пластинок край, на котором выполняются такие граничные условия, рассматривается как свободный в случае (11.1), как жестко заделанный в случаях (11.2) и (11.3), как шарнирно опертый в случаях (11.4) и (11.5).

Жесткая заделка более естественно схематизируется трехмерными граничными условиями (11.2), а шарнирная опора трехмерными граничными условиями (11.5), однако для сравнения будут исследованы и граничные условия (11.3) и (11.4).

Легко показать, что в рассматриваемой задаче граничные условия

$$\tau_{xz}\,|_{\xi=0} = 0, \qquad \partial\tau_{xz} \,/\, \partial\zeta\,|_{\xi=0} = 0$$

эквивалентны одно другому. Действительно, в решении, которое удовлетворяет второму условию, τ_{xz} при $\xi = 0$ должно быть постоянным по ζ, а так как при $\zeta = \pm 1$ эта величина равна нулю, то должно выполняться и первое равенство.

Так же доказывается эквивалентность граничных условий

$$v|_{\xi=0} = 0, \qquad \partial v \,/\, \partial\zeta\,|_{\xi=0} = 0$$

Так как v, по предположению, нечетная функция ζ.

Очевидным следствием доказанных утверждений является эквивалентность каждой из двух пар граничных условий

$$(\tau_{xy} = 0,\ \tau_{xz} = 0), \qquad (v = 0,\ w = 0) \tag{11.6}$$

соответственно следующим двум парам граничных условий:

$$\left(\tau_{xy} = 0, \quad \tau \equiv \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} - h^{-1}\,\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial\zeta} = 0\right) \quad \left(\gamma_{yz} \equiv h^{-1}\frac{\partial v}{\partial\zeta} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0,\ w = 0\right) \tag{11.7}$$

12. Будем считать, что напряжения и перемещения составляются как сумма трех слагаемых, соответствующих основному итерационному процессу и двум вариантам вспомогательных процессов. Другими словами, примем, что напряжения и перемещения выражаются так

$$\sigma_x = h^{-2}\sum h^{s-1}(\zeta\sigma_{x\text{I}}^{(s)} + \sigma_x{}^{*(s)}) + h^{-\lambda+1}\sum h^{s-1}(\sigma_{x\text{I}}^{(s)} + \sigma_{x\text{I}}^{*(s)}) +$$

$$+ h^{-\mu+1}\sum h^{s-1}(\sigma_{x\text{II}}^{(s)} + \sigma_{x\text{II}}^{*(s)})$$

$$\tau_{xy}=h^{-2}\sum h^{s-1}(\zeta\tau_{xyI}^{(s)}+\tau_{xy}^{*(s)})+h^{-\lambda}\sum h^{s-1}(\tau_{xyI}^{(s)}+\tau_{xyI}^{*(s)})+$$
$$+h^{-\mu+2}\sum h^{s-1}(\tau_{xyII}^{(s)}+\tau_{xyII}^{*(s)})$$
$$\tau_{xz}=h^{-1}\sum h^{s-1}(\zeta^2\tau_{xz2}^{(s)}+\tau_{xz0}^{(s)}+\tau_{xz}^{*(s)})+$$
$$+h^{-\lambda+1}\sum h^{s-1}(\tau_{xzI}^{(s)}+\tau_{xzI}^{*(s)})+h^{-\mu+1}\sum h^{s-1}(\tau_{xzII}^{(s)}+\tau_{xzII}^{*(s)})$$
$$u=h^{-2}\sum h^{s-1}(\zeta u_1{}^{(s)}+u^{*(s)})+h^{-\lambda+2}\sum h^{s-1}(u_I{}^{(s)}+u_I{}^{*(s)})+$$
$$+h^{-\mu+2}\sum h^{s-1}(u_{II}{}^{(s)}+u_{II}{}^{*(s)})$$
$$v=h^{-2}\sum h^{s-1}(\zeta v_1{}^{(s)}+v^{*(s)})+h^{-\lambda+1}\sum h^{s-1}(v_I{}^{(s)}+v_I{}^{*(s)})+$$
$$+h^{-\mu+3}\sum h^{s-1}(v_{II}^{(s)}+v_{II}{}^{*(s)})$$
$$w=h^{-3}\sum h^{s-1}(w_0{}^{(s)}+w^{*(s)})+h^{-\lambda+2}\sum h^{s-1}(w_I{}^{(s)}+w_I{}^{*(s)})+$$
$$+h^{-\mu+2}\sum h^{s-1}(w_{II}{}^{(s)}+w_{II}{}^{*(s)}) \tag{12.1}$$

Суммирование здесь всюду по целым значениям s, начиная с $s-1$. Составим также выражения τ и γ_{yz}, входящие в (11.7)

$$\tau=h^{-2}\sum h^{s-1}(\zeta\tau_1{}^{(s)}+\tau^{*(s)})+h^{-\lambda+2}\sum h^{s-3}\tau_1{}^{*(s)}-$$
$$-h^{-\mu}\sum h^{s-1}\frac{\partial}{\partial\zeta}(\tau_{xzII}^{(s)}+\tau_{xz\,II}^{*(s)})+h^{-\mu+2}\sum h^{s-1}\frac{\partial}{\partial y}(\tau_{xyII}^{(s)}+\tau_{xy\,II}^{*(s)}) \tag{12.2}$$
$$\gamma_{yz}=h^{-1}\sum h^{s-3}\gamma_{yz}^{*(s)}+h^{-\lambda}\sum h^{s-1}\frac{\partial}{\partial\zeta}(v_I{}^{(s)}+v_I{}^{*(s)})+$$
$$+h^{-\lambda+2}\sum h^{s-1}\frac{\partial}{\partial y}(w_I{}^{(s)}+w_I{}^{*(s)})+h^{-\mu+2}\sum h^{s-1}(\gamma_{yzII}^{(s)}+\gamma_{yzII}^{*(s)})$$

Здесь принято во внимание, что в силу (3.3), (6.1) — (6.3)

$$\tau_I{}^{(s)}\equiv\frac{\partial\tau_{xyI}^{(s)}}{\partial y}-\frac{\partial\tau_{xzI}^{(s)}}{\partial\zeta}=0,\qquad \gamma_{yz_1}^{(s)}\equiv v_1{}^{(s)}+\frac{\partial w_0{}^{(s)}}{\partial y}=0$$

Кроме того, использованы обозначения

$$\frac{\partial v^{*(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial w^{*(s)}}{\partial y}=\gamma_{yz}^{*(s)},\qquad \frac{\partial v_{II}{}^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial w_{II}{}^{(s)}}{\partial y}=\gamma_{yzII}^{(s)}$$
$$\frac{\partial v_{II}{}^{*(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial w_{II}{}^{*(s)}}{\partial y}=\gamma_{yzII}^{*(s)},\qquad \tau_1{}^{(s)}=\frac{\partial\tau_{xy1}^{(s)}}{\partial y}-2\tau_{xz2}^{(s)} \tag{12.3}$$
$$\tau^{*(s)}=\frac{\partial\tau_{xy}{}^{*(s)}}{\partial y}-\frac{\partial\tau_{xz}{}^{*(s)}}{\partial\zeta}$$

Надо помнить, что величины, отмеченные звездочкой, при $s=1, 2$ обращаются в нуль, поэтому в (12.2) в выражениях

$$\sum h^{s-3}\gamma_{yz}^{*(s)},\qquad \sum h^{s-3}\tau_I{}^{*(s)}$$

первые два члена пропадают, и эти суммы, так же как все другие, начинаются с членов, содержащих h в нулевой степени.

В правых частях формул (12.1) и (12.2) числа λ, μ пока не определены и метод наложения граничных условий будет заключаться в следующем. В граничные условия вносятся выражения (12.1) и (12.2), выбираются некоторым образом числа λ, μ и ставится требование, чтобы в каждом отдельно взятом граничном условии справа и слева были равны коэффициенты при одинаковых степенях h.

В результате получится последовательность граничных соотношений, вид которой зависит от выбора чисел λ, μ. Значения λ, μ надо подобрать так, чтобы последовательность граничных соотношений не находилась в противоречии с теми дифференциальными уравнениями, которым удовлетворяют в каждом приближении величины, связанные с тем или иным итерационным процессом.

13. Применим, описанный метод к граничным условиям (11.1) — (11.5). Из (11.1), положив $\lambda = 2$, $\mu = 2$, получим последовательность граничных соотношений

$$
\begin{gathered}
\zeta\sigma_{x\mathrm{I}}^{(1)} = 0, \quad \zeta\sigma_{x\mathrm{I}}^{(2)} + \sigma_{x\mathrm{I}}^{(1)} + \sigma_{x\mathrm{II}}^{(1)} = 0, \quad \zeta\sigma_{x\mathrm{I}}^{(3)} + \sigma_{x\mathrm{I}}^{*(3)} + \sigma_{x\mathrm{I}}^{(2)} + \sigma_{x\mathrm{II}}^{(2)} = 0, \ldots \\
\zeta\tau_{xy\mathrm{I}}^{(1)} + \tau_{xy\mathrm{I}}^{(1)} = 0, \quad \zeta\tau_{xy\mathrm{I}}^{(2)} + \tau_{xy\mathrm{I}}^{(2)} = 0 \\
\zeta\tau_{xy}^{(3)} + \tau_{xy}^{*(3)} + \tau_{xy\mathrm{I}}^{(3)} + \tau_{xy\mathrm{I}}^{*(3)} + \tau_{xy\mathrm{II}}^{(1)} = 0, \ldots \qquad (13.1) \\
\zeta\tau_1^{(1)} - \frac{\partial\tau_{xz\mathrm{II}}^{(1)}}{\partial\zeta} = 0, \quad \zeta\tau_1^{(2)} - \frac{\partial\tau_{xz\mathrm{II}}^{(2)}}{\partial\zeta} = 0 \\
\zeta\tau_1^{(3)} + \tau^{*(3)} + \tau_{\mathrm{I}}^{*(3)} - \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\tau_{xz\mathrm{II}}^{(3)} + \tau_{xz\mathrm{II}}^{*(3)}\right) + \frac{\partial\tau_{xy\mathrm{II}}^{(1)}}{\partial y} = 0
\end{gathered}
$$

Здесь первая пара граничных условий (11.6) заменена первой парой граничных условий (11.7)

Из (11.2), положив $\lambda = 1$, $\mu = 3$, получим

$$
\begin{gathered}
\zeta u_1^{(1)} = 0, \quad \zeta u_1^{(2)} + u_{\mathrm{II}}^{(1)} = 0, \quad \zeta u_1^{(3)} + u^{*(3)} + u_{\mathrm{II}}^{(2)} = 0, \ldots \\
\gamma_{yz}^{*(3)} + \frac{\partial v_{\mathrm{I}}^{(1)}}{\partial\zeta} + \gamma_{yz\mathrm{II}}^{(1)} = 0, \quad \gamma_{yz}^{*(4)} + \frac{\partial v_{\mathrm{I}}^{(2)}}{\partial\zeta} + \gamma_{yz\mathrm{II}}^{(2)} = 0, \ldots \qquad (13.2) \\
w_0^{(1)} = 0, \quad w_0^{(2)} = 0, \quad w_0^{(3)} + w^{*(3)} + w_{\mathrm{II}}^{(1)} = 0, \ldots
\end{gathered}
$$

Здесь вторая пара граничных условий (11.6) заменена второй парой граничных условий (11.7).

Из (11.3), положив $\lambda = 2$, $\mu = 3$, получим

$$
\begin{gathered}
\zeta u_1^{(1)} = 0, \quad \zeta u_1^{(2)} + u_{\mathrm{II}}^{(1)} = 0, \quad \zeta u_1^{(3)} + u^{*(3)} + u_{\mathrm{II}}^{(2)} + u_{\mathrm{I}}^{(1)} = 0, \ldots \\
\zeta\tau_{xy\mathrm{I}}^{(1)} + \tau_{xy\mathrm{I}}^{(1)} = 0, \quad \zeta\tau_{xy\mathrm{I}}^{(2)} + \tau_{xy\mathrm{I}}^{(2)} + \tau_{xy\mathrm{II}}^{(1)} = 0, \ldots \qquad (13.3) \\
w_0^{(1)} = 0, \quad w_0^{(2)} = 0, \quad w_0^{(3)} + w^{*(3)} + w_{\mathrm{II}}^{(1)} = 0, \ldots
\end{gathered}
$$

Из (11.4), положив $\lambda = 1$, $\mu = 3$, получим

$$
\begin{gathered}
\zeta\sigma_{x\mathrm{I}}^{(1)} + \sigma_{x\mathrm{II}}^{(1)} = 0, \ \zeta\sigma_{x\mathrm{I}}^{(2)} + \sigma_{x\mathrm{II}}^{(2)} = 0, \quad \zeta\sigma_{x\mathrm{I}}^{(3)} + \sigma_x^{*(3)} + \sigma_{x\mathrm{II}}^{(3)} + \sigma_{x\mathrm{II}}^{*(3)} + \sigma_{x\mathrm{I}}^{(1)} = 0, \ldots \\
\gamma_{yz}^{*(3)} + \frac{\partial v_{\mathrm{I}}^{(1)}}{\partial\zeta} + \gamma_{yz\mathrm{II}}^{(1)} = 0, \quad \gamma_{yz}^{*(4)} + \frac{\partial v_{\mathrm{I}}^{(2)}}{\partial\zeta} + \gamma_{yz\mathrm{II}}^{(2)} = 0, \ldots \qquad (13.4) \\
w_0^{(1)} = 0, \quad w_0^{(2)} = 0, \quad w_0^{(3)} + w^{*(3)} + w_{\mathrm{II}}^{(1)} = 0, \ldots
\end{gathered}
$$

Здесь граничные условия преобразованы так же, как в случае (11.2). Из (11.5), положив $\lambda = 2$, $\mu = 3$, получим

$$\zeta\sigma_{x\mathrm{I}}^{(1)} + \sigma_{x\mathrm{II}}^{(1)} = 0, \quad \zeta\sigma_{x\mathrm{I}}^{(2)} + \sigma_{x\mathrm{II}}^{(2)} + \sigma_{x\mathrm{I}}^{(1)} = 0,$$
$$\zeta\sigma_{x\mathrm{I}}^{(3)} + \sigma_x^{*(3)} + \sigma_{x\mathrm{II}}^{(3)} + \sigma_{x\mathrm{II}}^{*(3)} + \sigma_{x\mathrm{I}}^{(2)} = 0, \ldots$$
$$\zeta\tau_{xy\mathrm{I}}^{(1)} + \tau_{xy\mathrm{I}}^{(1)} = 0, \qquad \zeta\tau_{xy\mathrm{I}}^{(2)} + \tau_{xy\mathrm{I}}^{(2)} + \tau_{xy\mathrm{II}}^{(1)} = 0, \ldots \tag{13.5}$$
$$w_0^{(1)} = 0, \qquad w_0^{(2)} = 0, \qquad w_0^{(3)} + w^{*(3)} + w_{\mathrm{II}}^{(1)} = 0, \ldots$$

Непротиворечивость граничных соотношений (13.1)—(13.5) будет показана ниже.

14. Каждая последовательность граничных соотношений (13.1) — (13.5) состоит из равенств, образующих три группы, соответственно числу граничных условий. Первую и третью группы можно рассматривать как уравнения, определяющие граничные значения величин, отмеченных дополнительным индексом II. Исключение, в некоторых случаях, представляет одно или несколько первых равенств каждой группы, в которые эти величины не входят. Для величин, отмеченных индексом II, должны выполняться требования согласованности (10.5). Это позволяет написать для каждого из граничных условий (11.1) — (11.5) по две группы дополнительных соотношений.

Для граничных условий (13.1) дополнительные соотношения

$$\sigma_{x\mathrm{I}}^{(1)} = 0, \quad A\left(-\zeta\sigma_{x\mathrm{I}}^{(2)} - \sigma_{x\mathrm{I}}^{(1)}, \sigma_{x\mathrm{II}}^{(1)}\right) \equiv -\frac{2}{3}\sigma_{x\mathrm{I}}^{(2)} - \int_{-1}^{+1}\zeta\sigma_{x\mathrm{I}}^{(1)}d\zeta = 0$$
$$A\left(-\zeta\sigma_{x\mathrm{I}}^{(3)} - \sigma_{x\mathrm{I}}^{*(3)} - \sigma_{x\mathrm{I}}^{(2)}, \sigma_{x\mathrm{II}}^{(2)}\right) \equiv -\frac{2}{3}\sigma_{x\mathrm{I}}^{(3)} - \int_{-1}^{+1}\zeta\left(\sigma_{x\mathrm{I}}^{*(3)} + \sigma_{x\mathrm{I}}^{(2)}\right)d\zeta, \ldots$$
$$A\left(\zeta\tau_1^{(1)}, \frac{\partial\tau_{xz\mathrm{II}}^{(1)}}{\partial\zeta}\right) \equiv \frac{2}{3}\tau_1^{(1)} = 0$$
$$A\left(\zeta\tau_1^{(2)}, \frac{\partial\tau_{xz\mathrm{II}}^{(2)}}{\partial\zeta}\right) \equiv -\frac{2}{3}\tau_1^{(2)} = 0, \ldots \tag{14.1}$$
$$A\left(\zeta\tau_1^{(3)} + \tau^{*(3)} + \tau_1^{*(3)} - \frac{\partial\tau_{xz\mathrm{II}}^{*(3)}}{\partial\zeta}, \frac{\partial\tau_{xz\mathrm{II}}^{(3)}}{\partial\zeta}\right) \equiv$$
$$\equiv -\frac{2}{3}\tau_1^{(3)} + \int_{-1}^{+1}d\zeta\int_{-1}^{\zeta}\left(\tau^{*(3)} + \tau_1^{*(3)} - \frac{\partial\tau_{xz\mathrm{II}}^{*(3)}}{\partial\zeta}\right)d\zeta = 0, \ldots$$

Здесь для расшифровки соотношений согласованности $A = 0$ использованы формулы (10.2) и (10.4). Кроме того, первое равенство в первой группе граничных соотношений, в которое не входит $\sigma_{x\mathrm{II}}^{(s)}$, переписано после сокращения на ζ здесь еще раз (так же делается и во всех последующих дополнительных соотношениях).

Для граничных условий (13.2) и (13.3) получаем

$$u_1^{(1)} = 0, \qquad A\left(-\zeta u_1^{(2)}, u_{\mathrm{II}}^{(1)}\right) = 0$$
$$A\left(-\zeta u_1^{(3)} - u^{*(3)} - ju_{\mathrm{I}}^{(1)}, \quad u_{\mathrm{II}}^{(2)}\right) = 0, \ldots \tag{14.2}$$
$$w_0^{(1)} = 0, \qquad w_0^{(2)} = 0, \qquad A\left(-w_0^{(3)} - w^{*(3)}, \ w_{\mathrm{II}}^{(1)}\right) = 0, \ldots$$

В третьем из этих равенств надо положить $j=0$ для граничных условий (13.2) и $j=1$ для граничных условий (13.3).

Для граничных условий (13.4) получаем

$$A(-\zeta\sigma_{x\mathrm{I}}^{(1)},\ \sigma_{x\mathrm{II}}^{(1)}) \equiv -\frac{2}{3}\sigma_{x\mathrm{I}}^{(1)} = 0, \qquad A(-\zeta\sigma_{x\mathrm{I}}^{(2)},\ \sigma_{x\mathrm{II}}^{(2)}) \equiv -\frac{2}{3}\sigma_{x\mathrm{I}}^{(2)} = 0$$

$$\begin{aligned} A(-\zeta\sigma_{x\mathrm{I}}^{(3)} - \sigma_x^{*(3)} - \sigma_{x\mathrm{II}}^{*(3)} - \sigma_{x\mathrm{I}}^{(1)},\ \sigma_{x\mathrm{II}}^{(3)}) = -\frac{2}{3}\sigma_{x\mathrm{I}}^{(3)} - \\ -\int_{-1}^{+1}\zeta(\sigma_x^{*(3)} + \sigma_{x\mathrm{II}}^{*(3)} + \sigma_{x\mathrm{I}}^{(1)})\,d\zeta = 0\ldots \end{aligned} \tag{14.3}$$

$$w_0^{(1)} = 0, \qquad w_0^{(2)} = 0, \qquad A(-w_0^{(3)} - w^{*(3)},\ w_{\mathrm{II}}^{(1)}) = 0\ldots$$

Для граничных условий (13.5) получаем

$$\begin{aligned} & A(-\zeta\sigma_{x\mathrm{I}}^{(1)},\ \sigma_{x\mathrm{II}}^{(1)}) \equiv -\frac{2}{3}\sigma_{x\mathrm{I}}^{(1)} = 0 \\ & A(-\zeta\sigma_{x\mathrm{I}}^{(2)} - \sigma_{x\mathrm{I}}^{(1)},\ \sigma_{x\mathrm{II}}^{(2)}) \equiv -\frac{2}{3}\sigma_{x\mathrm{I}}^{(2)} - \int_{-1}^{+1}\zeta\sigma_{x\mathrm{I}}^{(1)}\,d\zeta = 0 \\ & A(-\zeta\sigma_{x\mathrm{I}}^{(3)} - \sigma_x^{*(3)} - \sigma_{x\mathrm{II}}^{*(3)} - \sigma_{x\mathrm{I}}^{(2)},\ \sigma_{x\mathrm{II}}^{(2)}) \equiv \\ & \equiv -\frac{2}{3}\sigma_{x\mathrm{I}}^{(3)} - \int_{-1}^{+1}\zeta(\sigma_x^{*(3)} + \sigma_{x\mathrm{II}}^{*(3)} + \sigma_{x\mathrm{I}}^{(2)})\,d\zeta = 0 \end{aligned} \tag{14.4}$$

$$w_0^{(1)} = 0, \qquad w_0^{(2)} = 0, \qquad A(-w_0^{(3)} - w^{*(3)},\ w_{\mathrm{II}}^{(1)}) = 0\ldots$$

15. В рядах (12.1), (12.2) величины вида $Q_i^{(s)}$ являются функциями двух переменных (x, y) и для каждого s в отдельности удовлетворяют системе уравнений, эквивалентной бигармоническому уравнению. Это значит, что $Q_i^{(s)}$ можно выразить для каждого s через бигармоническую функцию $B^{(s)}$ переменных (x, y).

Величины вида $Q^{*(s)}$ представляют собой полиномы по ζ, коэффициенты которых выражают через $Q^{(1)}, Q^{(2)}, \ldots, Q^{(s-2)}$. Так как $Q^{(1)}, Q^{(2)}, Q^{(3)}, \ldots$ будет определяться последовательно (в порядке возрастания индексов), то величины $Q^{*(s)}$ при определении $Q^{(s)}$ или, что то же, $B^{(s)}$ можно считать известными.

Величины вида $R_{\mathrm{I}}^{(s)}$ выражаются для каждого s через гармоническую функцию $\Psi^{(s)}$ переменных (ξ, ζ). Величины вида $R_{\mathrm{II}}^{(s)}$ выражаются для каждого s через бигармоническую функцию $\Phi^{(s)}$ переменных (ξ, ζ). Наконец, величины вида $R_{\mathrm{I}}^{*(s)}$ и $R_{\mathrm{II}}^{*(s)}$ выражаются соответственно через $R_{\mathrm{I}}^{(1)}, R_{\mathrm{I}}^{(2)}, \ldots, R_{\mathrm{I}}^{(s-2)}$ и $R_{\mathrm{II}}^{(1)}, R_{\mathrm{II}}^{(2)}, \ldots, R_{\mathrm{II}}^{s-2}$. Это значит, что при определении $\Psi^{(s)}$ можно считать известными величины вида $R_{\mathrm{I}}^{*(s)}$, а при определении $\Phi^{(s)}$ можно считать известными величины вида $R_{\mathrm{II}}^{*(s)}$.

Итак, построению подлежат функции $B^{(s)}, \Psi^{(s)}, \Phi^{(s)}$, для которых граничными условиями должны служить соотношения (13.1) — (13.5) и (14.1) — (14.4).

При определении $B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots$ в качестве граничных условий надо использовать равенства соответствующих номеров из первой и второй группы дополнительных соотношений (14.1) — (14.4). При определении $\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}, \ldots$ в качестве граничных условий надо использовать равенство соответствующего номера из второй группы граничных соотношений (13.1) — (13.5). При определении $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \ldots$ в качестве граничных условий надо использовать равенства соответствующих номеров, из первой и третьей группы граничных соотношений (13.1) — (13.5), пропуская при этом равенства, не содержащие величин вида $Q_{\mathrm{II}}{}^{(s)}$ (они включены в дополнительные соотношения).

Для граничных условий (11.1), (11.3) и (11.5) функции $B^{(s)}$, $\Psi^{(s)}$, $\Phi^{(s)}$ надо определять в такой последовательности:

$$B^{(1)},\ \Psi^{(1)}, B^{(2)}, (\Psi^{(2)}, \Phi^{(1)}, B^{(3)}), \ldots \tag{15.1}$$

Четвертая, пятая и шестая функции объединены скобкой, указывающей, что в некоторых случаях порядок определения этих функций должен быть изменен, а в некоторых случаях все три функции надо определять одновременно.

Для определения $B^{(1)}$, $\Psi^{(1)}$, $B^{(2)}$ граничными условиями в рассматриваемых случаях служат такие равенства (они выписаны для каждой из этих трех функций в отдельности в квадратных скобках):

для граничных условий (11.1)

$$\begin{gathered} B^{(1)} \to [\sigma_{x\mathrm{I}}^{(1)} = 0;\ \tau_1{}^{(1)}=0], \qquad \Psi^{(1)} \to [\zeta\tau_{xy\mathrm{I}}^{(1)} + \tau_{xy\mathrm{I}}^{(1)} = 0] \\ B^{(2)} \to \left[\frac{2}{3}\sigma_{x\mathrm{I}}^{(2)} + \int\limits_{-1}^{+1} \zeta\sigma_{x\mathrm{I}}^{(1)}\, d\zeta = 0;\ \tau_1{}^{(2)} = 0\right] \end{gathered} \tag{15.2}$$

для граничных условий (11.3)

$$\begin{gathered} B^{(1)} \to [u^{(1)} = 0;\ w_0{}^{(1)} = 0], \qquad \Psi^{(1)} \to [\zeta\tau_{xy\mathrm{I}}^{(1)} + \tau_{xy\mathrm{I}}^{(1)} = 0], \\ B^{(2)} \to [A\,(-\,\zeta u_1{}^{(2)};\ u_{\mathrm{II}}{}^{(1)}) = 0;\ w_0{}^{(2)} = 0] \end{gathered} \tag{15.3}$$

для граничных условий (11.5)

$$\begin{gathered} B^{(1)} \to [\sigma_{x\mathrm{I}}^{(1)} = 0;\ w_0{}^{(1)} = 0], \qquad \Psi^{(1)} \to [\zeta\tau_{xy\mathrm{I}}^{(1)} + \tau_{xy\mathrm{I}}^{(1)} = 0] \\ B^{(2)} \to \left[\frac{2}{3}\sigma_{x\mathrm{I}}^{(2)} + \int\limits_{-1}^{+1} \zeta\sigma_{x\mathrm{I}}^{(1)}\, d\zeta = 0;\ w_0{}^{(2)} = 0\right] \end{gathered} \tag{15.4}$$

Для граничных условий (11.2) функции $B^{(s)}$, $\Psi^{(s)}$, $\Phi^{(s)}$ надо строить в такой последовательности:

$$B^{(1)}, B^{(2)}, B^{(3)},\ \Phi^{(1)},\ \Psi^{(1)}, \ldots \tag{15.5}$$

причем, граничными условиями будут служить равенства:

$$\begin{gathered} B^{(1)} \to [u_1{}^{(1)} = 0;\ w_0{}^{(1)} = 0], \qquad B^{(2)} \to [A\ (-\ \zeta u_1{}^{(2)};\ u_{\mathrm{II}}{}^{(1)}) = 0;\ w_0{}^{(2)} = 0] \\ B^{(3)} \to [A\ (-\ \zeta u_1{}^{(3)} - u^{*(3)};\ u_{\mathrm{II}}{}^{(2)}) = 0,\ A\ (-\ w_0{}^{(3)} - w^{*(3)};\ w_{\mathrm{II}}{}^{(1)}) = 0] \\ \Phi^{(1)} \to [\zeta u_1{}^{(2)} + u_{\mathrm{II}}{}^{(1)} = 0;\ w_0{}^{(3)} + w^{*(3)} + w_{\mathrm{II}}{}^{(1)} = 0] \\ \Psi^{(1)} \to \left[\gamma_{yz}^{*(3)} + \frac{\partial v_{\mathrm{I}}{}^{(1)}}{\partial\zeta} + \gamma_{yz\mathrm{II}}^{(1)} = 0\right] \end{gathered} \tag{15.6}$$

Для граничных условий (11.4) сохраняются все соотношения (15.6) кроме первого граничного условия, относящегося к функции $B^{(3)}$. Оно принимает вид

$$A\left(-\zeta u_1^{(3)}-u^{*(3)}-u_{\mathrm{I}}^{(1)};\ u_{\mathrm{II}}^{(2)}\right)=0$$

В связи с этим в последовательности (15.5) самостоятельно определяется только $B^{(1)}$. Функции $B^{(2)}$, $B^{(3)}$, $\Phi^{(1)}$, $\Psi^{(1)}$ надо строить одновременно.

16. Покажем, что построение каждого отдельно взятого приближения основного итерационного процесса в известном смысле эквивалентно расчету пластинки по классической теории. Введем обозначения

$$\begin{aligned}
&M_x^{(s)}=h^{s-3}\int\limits_{+h}^{+h} z\sigma_{xi}^{(s)}\,dz \quad (xy), \qquad H^{(s)}=h^{s-3}\int\limits_{-h}^{+h} z\tau_{xyi}^{(s)}\,dz\\
&V_x^{(s)}=h^{s-2}\int\limits_{-h}^{+h} \tau_{xzi}^{(s)}\,dz \quad (xy), \qquad w^{(s)}=h^{s-4}w_0^{(s)}
\end{aligned} \tag{16.1}$$

Физический смысл величин $M_x^{(s)}$, $M_y^{(s)}$, $H^{(s)}$, $V_x^{(s)}$, $V_y^{(s)}$ очевиден: это моменты и перерезывающие усилия, которые дают напряжения, соответствующие в s-ом приближении основного итерационного процесса общему интегралу однородных уравнений.

Заменим в (16.1) функции $\sigma_{xi}^{(s)}$, $\sigma_{yi}^{(s)}$, $\tau_{xyi}^{(s)}$, $\tau_{xzi}^{(s)}$, $\tau_{yzi}^{(s)}$ их выражениями по формулам (3.2); учитывая (2.1) и последнюю из формул (3.6), получим

$$\begin{aligned}
&M_x^{(s)}=\frac{2}{3}h^{s-1}\sigma_{x1}^{(s)} \quad (xy), \qquad H^{(s)}=\frac{2}{3}h^{s-1}\tau_{xy1}^{(s)}\\
&V_x=-\frac{4}{3}h^{s-1}\tau_{xz}^{(s)}-h^{s-1}\int\limits_{-1}^{+1}\tau_{xz}^{*(s)}\,d\zeta \quad (xy)
\end{aligned} \tag{16.2}$$

Подставив этот результат в (3.3), получим:

$$\begin{aligned}
&M_x^{(s)}=-\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}^{(s)}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}^{(s)}\right) \quad (xy), \qquad H^{(s)}=-\frac{2Eh^3}{3(1+\nu)}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}^{(s)}\\
&V_x^{(s)}=\frac{\partial M_x^{(s)}}{\partial x}+\frac{\partial H^{(s)}}{\partial y}-h^{s-1}\int\limits_{-1}^{+1}\tau_{xz}^{*(s)}\,d\zeta \quad (xy)\\
&\frac{\partial^2 M_x^{(s)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H^{(s)}}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 M_y^{(s)}}{\partial y^2}=4h^{s-1}\sigma_{z3}^{(s)}
\end{aligned} \tag{16.3}$$

При построении s-го приближения можно считать известными величины, отмеченные звездочкой и индексом (s–1). Учитывая, кроме того формулы (3.6), можно в (16.3) считать известными $\tau_{xz}^{*(s)}$, $\tau_{yz}^{*(s)}$ и $\sigma_{z3}^{(s)}$. Таким образом, соотношения (16.3) представляют собой уравнения классической теории изгиба пластинок. Члены с $\tau_{xz}^{*(s)}$, $\tau_{yz}^{*(s)}$ и $\sigma_{z3}^{(s)}$ играют в них соответственно роль силовой и моментной внешних нагрузок.

При $s=1$ имеем $\tau_{xz}^{*(s)}=0$, $\tau_{yz}^{*(s)}=0$, $4\sigma_{z3}^{(s)}=p$ и условная нагрузка, действующая на пластинку, будет совпадать с той, которая учитывается при расчете пластинки по классической теории изгиба.

При $s=2$ имеем $\tau_{xz}^{*(s)}=0$, $\tau_{yz}^{*(s)}=0$, $\sigma_{z3}^{*(s)}=0$ и условная нагрузка обращается в нуль. При $s>2$ условная силовая и моментная нагрузка в s-ом приближении зависит от напряжений s — 2-го приближения. Интенсивность условной нагрузки убывает с возрастанием s по закону h^{s-1}.

Граничные условия для определения бигармонической функции $B^{(1)}$ приведены в (15.2) — (15.4) и (15.6). В этих равенствах $\tau_1^{(1)}$ расшифровывается формулой (12.3), а $u_1^{(1)}$ выражается через $w_0^{(1)}$ при помощи (3.3). Учитывая это и пользуясь формулами (16.2), получим:

граничные условия, соответствующие свободному краю

$$M_x^{(1)} = 0, \qquad V_x^{(1)} + \partial H^{(1)} / \partial y = 0$$

граничные условия, соответствующие жестко заделанному краю

$$\partial w^{(1)} / \partial x = 0, \qquad w^{(1)} = 0$$

граничные условия, соответствующие шарнирно опертому краю

$$M_x^{(1)} = 0, \qquad w^{(1)} = 0$$

Отсюда видно, что первое приближение основного итерационного процесса эквивалентно классической теории изгиба пластинок не только в смысле тождества дифференциальных уравнений, но и в смысле тождества граничных условий.

17. Самое существенное следствие полученных выше результатов заключается в том, что напряженное состояние, возникающее при изгибе тонкой пластинки, составляется из основного напряженного состояния, напряженного состояния краевого скручивания и напряженного состояния краевой плоской деформации.

Основное напряженное состояние соответствует основному итерационному процессу. Оно распространяется, вообще говоря, на всю пластинку и в первом приближении совпадает с тем напряженным состоянием, которое отвечает гипотезам классической теории изгиба пластинок. Напряженные состояния краевого скручивания и краевой плоской деформации соответствуют первому и второму вариантам вспомогательного итерационного процесса. Они локализуются вблизи краев или других линий искажений и в первом приближении совпадают, соответственно, с напряженными состояниями, которые получаются при скручивании или при плоской деформации узкой полоски, вырезанной вдоль данной линии искажения.

Все перечисленные состояния в первом приближении можно построить, используя хорошо известные физические гипотезы, а с помощью основного итерационного процесса и двух вариантов вспомогательного процесса их можно находить при достаточно малом h с любой степенью точности (последнее утверждение имеет условный характер, т. к. в работе не затронут вопрос об оценках погрешностей).

Проблему формулировки различных приближенных методов решения задачи об изгибе пластинки теперь можно трактовать как проблему построения того или иного числа приближений в вышеописанных итерационных процессах. В частности, классическая теория при таком подходе определится как приближенный метод, основанный на использовании одного основного итерационного процесса, для которого строится только первое приближение. Следуя этим путем, надо вводить в рассмотрение вспомогательные итерационные процессы, т. е. итерационные процессы, строящиеся с помощью интегрирования дифференциальных уравнений, в которых одной из независимых переменных является ζ. В этом заключается принципиальная разница между предлагаемым подходом и теми, которые применялись до сих пор. В них задача сводилась к интегрированию уравнений с независимыми переменными (x, y), задающими положение точки в срединной плоскости. В связи с этим сейчас затруднительно было бы сопоставить предлагаемый метод с такими подходами как, например, метод Е. Рейсснера [2]. Можно отметить только чисто качественное совпадение. Уравнения, получающиеся при уточнении классической теории, содержат дополнительные интегралы, соответствующие быстрозатухающим напряженным состояниям.

18. Не останавливаясь на подробностях, связанных с фактическим построением функций $B^{(s)}$, $\Psi^{(s)}$, $\Phi^{(s)}$, закончим некоторыми замечаниями общего характера.

Были получены формулы (2.3), (2.4), в которых, как показано в п.3, надо положить $\varkappa = 0$. Этими соотношениями определяется асимптотика основного напряженного состояния, т. е. скорость возрастания или убывания составляющих его напряжений и перемещений при неограниченно убывающем h. Главными (возрастающими быстрее других) напряжениями основного напряженного состояния являются σ_x, τ_{xy}, σ_y. Они возрастают как h^{-2}. Будем записывать это так:

$$\sigma_x, \quad \tau_{xy}, \quad \sigma_y \sim h^{-2} \tag{18.1}$$

Асимптотика напряженных состояний краевого скручивания и краевой плоской деформации определяются, соответственно, формулами (4.2), (4.3) и (4.2), (4.4). Из этих соотношений вытекает, что в напряженном состоянии краевого скручивания главными являются τ_{xy}, τ_{yz} причем

$$\tau_{xy}, \quad \tau_{yz} \sim h^{-\lambda} \tag{18.2}$$

а в напряженном состоянии краевой плоской деформации главными являются σ_x, σ_y, τ_{xz}, σ_z, причем

$$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xz}, \sigma_z \sim h^{-\mu+1} \tag{18.3}$$

Сопоставив (18.1), (18.2), (18.3), заключаем, что при $\lambda = 2$ и $\mu = 3$, соответственно, главные напряжения напряженных состояний краевого скручивания и краевой плоской деформации становятся соизмеримыми с главными напряжениями основного напряженного состояния. Но в п. 13 было показано, что по меньшей мере одна из величин λ, μ принимает именно такие значения при любых из рассмотренных выше граничных условий. Это значит, что краевые напряжения (или, вообще, напряжения вблизи линий возмущения) с помощью одного основного итерационного процесса, а следовательно, и по классической теории, нельзя построить даже в первом приближении.

Чтобы уточнить значения напряжений вдали от краев по предлагаемому методу, достаточно построить первые два приближения основного итерационного процесса. Значительно сложнее в большинстве случаев получить даже в самом грубом приближении краевые напряжения. Для этого надо построить первые приближения всех трех итерационных процессов, т. е. определить $B^{(1)}$, $\Psi^{(1)}$, $\Phi^{(1)}$, а функции $\Psi^{(1)}$, $\Phi^{(1)}$, как показано в п. 15, довольно далеко расположены в тех последовательностях, которые определяют порядок построения $B^{(s)}$, $\Psi^{(s)}$, $\Phi^{(s)}$.

Рассмотренные выше граничные условия (11.2) и (11.3), различные с точки зрения трехмерной теории упругости, в классической теории изгиба пластинок должны трактоваться одинаково: как условия жесткой заделки. Равным образом, (11.4) и (11.5) — это две различные трехмерные модели условий шарнирного опирания. Можно проследить, что в последовательности функций $B^{(s)}$, $\Psi^{(s)}$, $\Phi^{(s)}$ только $B^{(1)}$ не зависит от выбора того или иного варианта трехмерных граничных условий, моделирующих данное условие закрепления. Это значит, что только в рамках классической теории изгиба пластинок можно пользоваться такими общими понятиями, как жесткий край, шарнирная опора и т. д. Для построения методов, претендующих на большую точность, эти понятия надо должным образом конкретизировать.

Для упрощения выкладок при построении вспомогательных итерационных процессов принималось, что боковой край пластинки лежит в плоскости $x = 0$. Обобщение на произвольный случай не представляет труда, так как основные результаты легко формулируются в терминах, не связанных с избранной системой координат.

Поступила 5 IV 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. УМН, 1957, т. XII, вып. 5 (77).
2. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates. J. Math. and Phys., 1944, V. XXII
3. Гольденвейзер А. Л. К теории изгиба пластинок Рейсснера. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 4.
4. Власов Б. Ф. Об уравнениях теории изгиба пластинок. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 12.
5. Амбарцумян С. А. К теории изгиба анизотропных пластинок. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 5.
6. Амбарцумян С. А. К общей теории анизотропных оболочек. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 2.