Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ СПЛОШНОГО КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Г. М. Валов

(Кострома)

В статье решена основная смешанная задача и вторая основная задача теории упругости об осесимметричной деформации сплошного кругового цилиндра конечной длины. Смешанная задача решается в двух вариантах: 1) на основаниях цилиндра заданы произвольные напряжения, а на боковой поверхности — перемещения; 2) на основаниях цилиндра заданы произвольные перемещения, а на боковой поверхности — напряжения. Частным случаем первой задачи является изгиб жестко заделанной по боковой поверхности толстой круговой плиты под действием нагрузки, приложенной к одному из оснований.

Смешанная задача для цилиндра рассматривалась в работе Файлона [1], при этом граничные условия для касательных перемещений на основаниях цилиндра не были удовлетворены. Приближенным методом эта задача решалась в работе [2]. Другие смешанные задачи об упругой деформации цилиндра конечной длины рассматривались в ряде работ [3-14].

§ 1. На основаниях цилиндра заданы напряжения, на боковой поверхности — перемещения. Требуется найти функции $u(r, z)$ и $w(r, z)$, удовлетворяющие внутри цилиндра $0 \leqslant r \leqslant R$, $-l \leqslant z \leqslant l$ дифференциальным уравнениям Ляме

$$\begin{aligned} &\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{\partial\theta}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}\right)\right] = 0 \\ &\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial r} = 0 \end{aligned} \qquad (1.1)$$

а на его поверхности условиям

$$w(R, z) = \chi(z), \qquad \tau_{rz}(r, l) = f_1(r), \qquad \tau_{rz}(r, -l) = f_2(r) \qquad (1.2)$$

$$u(R, z) = \psi(z), \qquad \sigma_z(r, l) = \varphi_1(r), \qquad \sigma_z(r, -l) = \varphi_2(r) \qquad (1.3)$$

Здесь σ — коэффициент Пуассона, G — модуль сдвига, θ — объемная деформация, $\sigma_z(r, z)$ и $\tau_{rz}(r, z)$ — компоненты тензора напряжения, причем

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \sigma_z = 2G\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\theta\right), \quad \tau_{rz} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) \qquad (1.4)$$

Граничные функции $\varphi_1(r)$, $\varphi_2(r)$, $f_1(r)$, $f_2(r)$ предполагаются представимыми рядами Фурье по функциям Бесселя первого рода

$$\varphi_i(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{(i)} J_0(\lambda_n r), \quad f_i(r) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(i)} J_1(\lambda_n r) \quad (i = 1, 2) \quad (0 \leqslant r \leqslant R) \qquad (1.5)$$

где $\lambda_n R = \mu_n$ — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$

$$\varphi_n^{(i)} = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)}\int_0^R r\varphi_i(r) J_0(\lambda_n r)\,dr, \quad f_n^{(i)} = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)}\int_0^R r f_i(r) J_1(\lambda_n r)\,dr \qquad (1.6)$$

а функции $\psi(z)$ и $\chi(z)$ — рядами Фурье

$$\psi(z) = \frac{\psi_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m \cos\frac{m\pi(z-l)}{2l} \qquad (-l \leqslant z \leqslant l) \qquad \chi(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \chi_m \sin\frac{m\pi(z-l)}{2l} \tag{1.7}$$

Для решения задачи введем представление решения уравнений Ляме в форме Папковича — Нейбера, которое в цилиндрических координатах для случая осесимметричной деформации принимает вид

$$u = -\frac{1}{4(1-\sigma)}\frac{\partial}{\partial r}(z\delta_1+\delta) - \frac{1}{2(1-\sigma)}\left[(4\sigma-1)\frac{\partial\delta_2}{\partial r} + r\frac{\partial^2\delta_2}{\partial r^2}\right]$$
$$w = \delta_1 - \frac{1}{4(1-\sigma)}\frac{\partial}{\partial z}(z\delta_1+\delta) - \frac{1}{2(1-\sigma)}\left[2\frac{\partial\delta_2}{\partial z} + r\frac{\partial^2\delta_2}{\partial r\,\partial z}\right] \tag{1.8}$$

где δ, δ_1, δ_2 — произвольные гармонические функции. Полагая в (1.8)

$$\delta_1 = 0,\ \delta = \frac{C_m^{(1)} I_0(k_m r)}{k_m^2 I_0(k_m R)}\cos\frac{m\pi(z-l)}{2l}, \qquad \delta_2 = \frac{C_m I_0(k_m r)}{k_m^2 I_0(k_m R)}\cos\frac{m\pi(z-l)}{2l}$$

получим следующие частные решения уравнений Ляме (1.1):

$$u_m^{(1)} = -\left\{\frac{1}{2}C_m^{(1)} I_1(k_m r) + C_m[(4\sigma-2)I_1(k_m r) + k_m r I_0'(k_m r)]\right\}\frac{\cos[m\pi(z-l)/2l]}{2(1-\sigma)k_m I_0(k_m R)}$$
$$w_m^{(1)} = \left\{\frac{1}{2}C_m^{(1)} I_0(k_m r) + C_m[2I_0(k_m r) + k_m r I_1(k_m r)]\right\}\frac{\sin[m\pi(z-l)/2l]}{2(1-\sigma)k_m I_0(k_m R)} \tag{1.9}$$

где C_m, $C_m^{(1)}$ — произвольные постоянные, $I_0(k_m r)$, $I_1(k_m r)$ — модифицированные функции Бесселя

$$k_m = \frac{m\pi}{2l} \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{1.10}$$

Далее, полагая в (1.8)

$$\delta = \frac{1}{\lambda_n J_1(\lambda_n R)\,\mathrm{sh}\,\lambda_n l}[A_n^{(3)}\,\mathrm{th}\,\lambda_n l\,\mathrm{sh}\,\lambda_n z + A_n^{(4)}\,\mathrm{ch}\,\lambda_n z]\,J_0(\lambda_n r)$$
$$\delta_1 = \frac{1}{\lambda_n J_1(\lambda_n R)\,\mathrm{sh}\,\lambda_n l}[A_n^{(1)}\,\mathrm{sh}\,\lambda_n z + A_n^{(2)}\,\mathrm{th}\,\lambda_n l\,\mathrm{ch}\,\lambda_n z]\,J_0(\lambda_n r)$$
$$\delta_2 = 0, \qquad \lambda_n R = \mu_n, \qquad J_0(\mu_n) = 0, \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1.11}$$

получим второй тип частных решений уравнений (1.1)

$$u_n^{(2)} = \frac{1}{4(1-\sigma)J_1(\lambda_n R)\,\mathrm{sh}\,\lambda_n l}[A_n^{(3)}\,\mathrm{th}\,\lambda_n l\,\mathrm{sh}\,\lambda_n z + A_n^{(4)}\,\mathrm{ch}\,\lambda_n z + A_n^{(1)} z\,\mathrm{sh}\,\lambda_n z + A_n^{(2)}\,\mathrm{th}\,\lambda_n l\, z\,\mathrm{ch}\,\lambda_n z]\,J_1(\lambda_n r)$$
$$w_n^{(2)} = \frac{1}{4(1-\sigma)J_1(\lambda_n R)\,\mathrm{sh}\,\lambda_n l}[-A_n^{(3)}\,\mathrm{th}\,\lambda_n l\,\mathrm{ch}\,\lambda_n z - A_n^{(4)}\,\mathrm{sh}\,\lambda_n z - A_n^{(1)} z\,\mathrm{ch}\,\lambda_n z - A_n^{(2)}\,\mathrm{th}\,\lambda_n l\, z\,\mathrm{sh}\,\lambda_n z + \frac{3-4\sigma}{\lambda_n}(A_n^{(1)}\,\mathrm{sh}\,\lambda_n z + A_n^{(2)}\,\mathrm{th}\,\lambda_n l\,\mathrm{ch}\,\lambda_n z)]\,J_0(\lambda_n r) \tag{1.12}$$

где $A_n^{(1)}$, $A_n^{(2)}$, $A_n^{(3)}$, $A_n^{(4)}$ — произвольные постоянные.

Ищем решение поставленной выше граничной задачи в виде рядов

$$u = \frac{a_2 r}{8(1-\sigma)} + \sum_{m=1}^{\infty} u_m^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(2)}, \qquad w = \sum_{m=1}^{\infty} w_m^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} w_n^{(2)} \tag{1.13}$$

Слагаемое, содержащее произвольную постоянную a_2, очевидно, удовлетворяет уравнениям (1.1).

Удовлетворяя граничным условиям (1.2) и учитывая разложения (1.5) и (1.7), получим три тождества. Приравнивая коэффициенты Фурье функций, стоящих слева и справа в этих тождествах, найдем следующие соотношения для неизвестных постоянных

$$C_m^{(1)} = -2C_m\left[2 + k_m R\,\frac{I_1(k_m R)}{I_0(k_m R)}\right] + 4(1-\sigma)k_m\chi_m$$

$$\begin{aligned} A_n^{(3)} &= \frac{A_n^{(2)}}{\lambda_n}[1 - 2\sigma - \lambda_n l\,\mathrm{th}\,\lambda_n l] + \frac{1-\sigma}{G\lambda_n}[f_n^{(1)} + f_n^{(2)}]\,J_1(\lambda_n R) \\ A_n^{(4)} &= \frac{A_n^{(1)}}{\lambda_n}[1 - 2\sigma - \lambda_n l\,\mathrm{cth}\,\lambda_n l] + \frac{1-\sigma}{G\lambda_n}[f_n^{(1)} - f_n^{(2)}]\,J_1(\lambda_n R) \end{aligned} \tag{1.14}$$

Удовлетворяя оставшимся граничным условиям (1.3) и учитывая разложения (1.5) и (1.7), получим три равенства

$$\frac{a_2 R}{8(1-\sigma)} + \sum_{n=1}^{\infty} F_1(z, n) - \sum_{m=1}^{\infty} R_m^{(1)} \cos\frac{m\pi(z-l)}{2l} = \frac{\psi_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m \cos\frac{m\pi(z-l)}{2l}$$

$$\frac{\sigma G a_2 (1-\sigma)^{-1}}{2(1-2\sigma)} + \sum_{m=1}^{\infty} F_2(r, m) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[R_n^{(2)} + R_n^{(3)}]\,J_0(\lambda_n r) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{(1)} J_0(\lambda_n r)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\sigma G a_2}{2(1-\sigma)(1-2\sigma)} + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m F_2(r, m) + \\ &\qquad + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[R_n^{(2)} - R_n^{(3)}]\,J_0(\lambda_n r) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{(2)} J_0(\lambda_n r) \end{aligned} \tag{1.15}$$

в которых

$$\begin{aligned} F_1(z, n) = \frac{1}{4(1-\sigma)\,\mathrm{sh}\,\lambda_n l}\,[&A_n^{(3)}\,\mathrm{th}\,\lambda_n l\,\mathrm{sh}\,\lambda_n z + A_n^{(4)}\,\mathrm{ch}\,\lambda_n z + \\ &+ A_n^{(1)} z\,\mathrm{sh}\,\lambda_n z + A_n^{(2)}\,\mathrm{th}\,\lambda_n l\; z\,\mathrm{ch}\,\lambda_n z] \end{aligned} \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned} F_2(r, m) = \frac{G}{(1-\sigma)I_0(k_m R)}\Big\{&\frac{1}{2}C_m^{(1)} I_0(k_m r) + \\ &+ C_m[2(1+\sigma)I_0(k_m r) + k_m r I_1(k_m r)]\Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_m^{(1)} = \frac{1}{2(1-\sigma)k_m I_0(k_m R)}\Big\{&\frac{1}{2}C_m^{(1)} I_1(k_m R) + \\ &+ C_m[(4\sigma - 2)I_1(k_m R) + k_m R I_0(k_m R)]\Big\} \end{aligned} \tag{1.17}$$

$$R_n^{(2)} = \frac{1}{J_1(\lambda_n R)}\left[-\frac{G\lambda_n}{1-\sigma}A_n^{(4)}\,\mathrm{cth}\,\lambda_n l + 2GA_n^{(1)}\,\mathrm{cth}\,\lambda_n l - \frac{\lambda_n G}{1-\sigma}A_n^{(1)} l\right]$$

$$R_n^{(3)} = \frac{1}{J_1(\lambda_n R)}\left[-\frac{G\lambda_n}{1-\sigma}A_n^{(3)}\,\mathrm{th}\,\lambda_n l + 2GA_n^{(2)}\,\mathrm{th}\,\lambda_n l - \frac{\lambda_n G}{1-\sigma}A_n^{(2)} l\right]$$

Выражения величин $R_m^{(1)}$, $R_n^{(2)}$ и $R_n^{(3)}$ при помощи формул (1.14) легко преобразуются к виду

$$R_m^{(1)} = -\frac{C_m L_m}{2(1-\sigma)k_m} + \frac{\chi_m I_1(k_m R)}{I_0(k_m R)}$$

$$R_n^{(2)} = \frac{GA_n^{(1)} L_n^{(1)}}{(1-\sigma)J_1(\lambda_n R)} + [f_n^{(2)} - f_n^{(1)}]\operatorname{cth}\lambda_n l \tag{1.18}$$

$$R_n^{(3)} = \frac{GA_n^{(2)} L_n^{(2)}}{(1-\sigma)J_1(\lambda_n R)} - [f_n^{(1)} + f_n^{(2)}]\operatorname{th}\lambda_n l$$

где

$$L_n^{(1)} = \operatorname{cth}\lambda_n l + \frac{\lambda_n l}{\operatorname{sh}^2\lambda_n l}, \qquad L_n^{(2)} = \operatorname{th}\lambda_n l - \frac{\lambda_n l}{\operatorname{ch}^2\lambda_n l} \tag{1.19}$$

$$L_m = (4-4\sigma)\frac{I_1(k_m R)}{I_0(k_m R)} - k_m R\left[1 - \frac{I_1^2(k_m R)}{I_0^2(k_m R)}\right] \tag{1.20}$$

Чтобы приравнять коэффициенты Фурье функций, стоящих слева и справа в равенствах (1.15), и найти соотношения для неизвестных постоянных C_m, $A_n^{(1)}$, $A_n^{(2)}$ и a_2, разложим функции (1.16) и (1.17) в ряды Фурье

$$F_1(z, n) = \frac{1}{2}F_0^{(1)}(n) + \sum_{m=1}^{\infty} F_m^{(1)}(n)\cos\frac{m\pi(z-l)}{2l}, \quad (-l \leqslant z \leqslant l)$$

$$F_2(r, m) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n^{(2)}(m) J_0(\lambda_n r), \qquad J_0(\lambda_n R) = 0 \qquad (0 \leqslant r < R) \tag{1.21}$$

Нетрудно подсчитать, что коэффициенты Фурье имеют выражение

$$F_0^{(1)}(n) = -\frac{\sigma A_n^{(1)}}{l(1-\sigma)\lambda_n^2} + \frac{J_1(\lambda_n R)[f_n^{(1)} - f_n^{(2)}]}{2lG\lambda_n^2}$$

$$F_m^{(1)}(n) = \frac{A_n^{(2)} H_{mn}^{(1)}}{2(1-\sigma)k_m} + \frac{[f_n^{(1)} + f_n^{(2)}]J_1(\lambda_n R)}{2lG(k_m^2 + \lambda_n^2)} \qquad (m = 1, 3, \ldots)$$

$$F_m^{(1)}(n) = \frac{A_n^{(1)} H_{mn}^{(1)}}{2(1-\sigma)k_m} + \frac{[f_n^{(1)} - f_n^{(2)}]J_1(\lambda_n R)}{2lG(k_m^2 + \lambda_n^2)} \qquad (m = 2, 4, \ldots) \tag{1.22}$$

$$F_n^{(2)}(m) = \frac{GC_m H_{mn}^{(2)}}{2(1-\sigma)J_1(\lambda_n R)} + \frac{4G\chi_m k_m \lambda_n}{R(\lambda_n^2 + k_m^2)J_1(\lambda_n R)}$$

Здесь

$$H_{mn}^{(1)} = \frac{2k_m[k_m^2 - \sigma(\lambda_n^2 + k_m^2)]}{l(k_m^2 + \lambda_n^2)^2}, \qquad H_{mn}^{(2)} = \frac{8\lambda_n[\sigma(k_m^2 + \lambda_n^2) - k_m^2]}{R[\lambda_n^2 + k_m^2]^2} \tag{1.23}$$

Теперь подставляя ряды (1.21) и разложение единицы

$$1 = \frac{2}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n J_1(\lambda_n R)} J_0(\lambda_n r) \qquad (0 \leqslant r < R)$$

в равенства (1.15) и приравнивая коэффициенты Фурье, получим четыре соотношения. Преобразуя полученные соотношения при помощи формул

(1.18) и (1.22), находим постоянные a_2, C_m, $A_n^{(1)}$ и $A_n^{(2)}$

$$a_2 = \frac{4\sigma}{Rl}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n^{(1)}}{\lambda_n^2} - \frac{2(1-\sigma)}{GlR}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}J_1(\lambda_n R)\,[f_n^{(1)} - f_n^{(2)}] + \frac{4(1-\sigma)\psi_0}{R} \tag{1.24}$$

$$C_m = -\frac{1}{L_m}\sum_{n=1}^{\infty}A_n^{(2)}H_{mn}^{(1)} + \xi_m^{(2)} \qquad (m = 1,\ 3, \ldots) \tag{1.25}$$

$$C_m = -\frac{1}{L_m}\sum_{n=1}^{\infty}A_n^{(1)}H_{mn}^{(1)} + \xi_m^{(1)} \qquad (m = 2,\ 4, \ldots) \tag{1.26}$$

$$A_n^{(1)} = -\frac{1}{L_n^{(1)}}\sum_{m=2,4,\ldots}^{\infty}C_m H_{mn}^{(2)} - \frac{8\sigma^2}{R^2 l(1-2\sigma)\lambda_n L_n^{(1)}}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{A_s^{(1)}}{\lambda_s^2} + \eta_n^{(1)}$$
$$(n = 1,\ 2, \ldots) \tag{1.27}$$

$$A_n^{(2)} = -\frac{1}{L_n^{(2)}}\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}C_m H_{mn}^{(2)} + \eta_n^{(2)} \qquad (n = 1,\ 2, \ldots) \tag{1.28}$$

где

$$\xi_m^{(2)} = \frac{2(1-\sigma)k_m}{L_m}\left[\frac{\chi_m I_1(k_m R)}{I_0(k_m R)} + \psi_m - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{[f_n^{(1)} + f_n^{(2)}]\,J_1(\lambda_n R)}{2Gl(\lambda_n^2 + k_m^2)}\right]$$

$$\xi_m^{(1)} = \frac{2(1-\sigma)k_m}{L_m}\left[\frac{\chi_m I_1(k_m R)}{I_0(k_m R)} + \psi_m - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{[f_n^{(1)} - f_n^{(2)}]\,J_1(\lambda_n R)}{2Gl(k_m^2 + \lambda_n^2)}\right]$$

$$\eta_n^{(1)} = \frac{(1-\sigma)J_1(\lambda_n R)}{GL_n^{(1)}}\left[(f_n^{(1)} - f_n^{(2)})\operatorname{cth}\lambda_n l + \varphi_n^{(1)} + \varphi_n^{(2)}\right] -$$
$$- \frac{8(1-\sigma)}{RL_n^{(1)}}\sum_{m=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{\chi_m k_m \lambda_n}{(\lambda_n^2 + k_m^2)} -$$
$$- \frac{2\sigma}{R(1-2\sigma)\lambda_n L_n^{(1)}}\left\{\frac{4(1-\sigma)\psi_0}{R} - \frac{2(1-\sigma)}{lRG}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{J_1(\lambda_s R)}{\lambda_s^2}[f_s^{(1)} - f_s^{(2)}]\right\}$$

$$\eta_n^{(2)} = \frac{(1-\sigma)J_1(\lambda_n R)}{GL_n^{(2)}}\left[(f_n^{(1)} + f_n^{(2)})\operatorname{th}\lambda_n l + \varphi_n^{(1)} - \varphi_n^{(2)}\right] -$$
$$- \frac{8(1-\sigma)}{RL_n^{(2)}}\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{\chi_m k_m \lambda_n}{\lambda_n^2 + k_m^2} \tag{1.29}$$

Из равенств (1.25)—(1.28) получаем две бесконечные системы линейных алгебраических уравнений для неизвестных постоянных $A_n^{(1)}$ и $A_n^{(2)}$

$$A_n^{(1)} = \frac{1}{L_n^{(1)}}\sum_{m=2,4,\ldots}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{L_m}H_{ms}^{(1)}H_{mn}^{(2)}A_s^{(1)} -$$
$$- \frac{8\sigma^2}{R^2 l(1-2\sigma)\lambda_n L_n^{(1)}}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{A_s^{(1)}}{\lambda_s^2} + \delta_n^{(1)} \qquad (n = 1,\ 2, \ldots) \tag{1.30}$$

$$A_n^{(2)} = \frac{1}{L_n^{(2)}}\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{L_m}H_{ms}^{(1)}H_{mn}^{(2)}A_s^{(2)} + \delta_n^{(2)} \qquad (n = 1,\ 2, \ldots) \tag{1.31}$$

Здесь

$$\delta_n^{(1)} = -\frac{1}{L_n^{(1)}} \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \xi_m^{(1)} H_{mn}^{(2)} + \eta_n^{(1)}$$
$$\delta_n^{(2)} = -\frac{1}{L_n^{(2)}} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \xi_m^{(2)} H_{mn}^{(2)} + \eta_n^{(2)} \tag{1.32}$$

Таким образом, удовлетворены граничные условия поставленной выше задачи и ее решение представлено рядами (1.13). Постоянные a_2, $A_n^{(3)}$, $A_n^{(4)}$, C_m и $C_m^{(1)}$, входящие в ряды (1.13), однозначно выражаются через постоянные $A_n^{(1)}$, $A_n^{(2)}$ и коэффициенты Фурье граничных функций при помощи равенств (1.24) — (1.26) и (1.14), а постоянные $A_n^{(1)}$ и $A_n^{(2)}$ находятся из бесконечных систем (1.30) и (1.31). Если существует единственное ограниченное решение бесконечных систем (1.30) и (1.31), то ряды (1.13), дающие решение задачи, сходятся равномерно внутри цилиндра $-l \leqslant z \leqslant l$, $0 \leqslant r \leqslant R$ и допускают двукратное почленное дифференцирование внутри него.

§ 2. Исследование бесконечных систем. Прежде чем приступить к исследованию бесконечных систем (1.30) и (1.31), установим некоторые тождества и неравенства, содержащие модифицированные функции Бесселя. Разложим функции r и $I_1(kr)$ в промежутке $0 \leqslant r \leqslant R$ в ряды Фурье — Дини

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(0)} J_1(\lambda_n r), \qquad I_1(kr) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n J_1(\lambda_n r) \tag{2.1}$$

где $\lambda_n R = \mu_n$ — положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$. Вычисляя коэффициенты Фурье по второй формуле (1.6), найдем

$$f_n^{(0)} = \frac{4}{R\lambda_n^2 J_1(\lambda_n R)}, \qquad f_n = \frac{2kI_0(kR)}{RJ_1(\lambda_n R)(\lambda_n^2 + k^2)}$$

Так как выполнены условия равномерной сходимости [15], то ряды (2.1) сходятся равномерно на сегменте $a \leqslant r \leqslant R$, где $0 < a < R$. Поэтому, полагая в (2.1) $r = R$ и подставляя значения $f_n^{(0)}$ и f_n, получим два тождества

$$\frac{R^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \tag{2.2}$$

$$\frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{k^2 + \lambda_n^2} = \frac{I_1(kR)}{I_0(kR)}, \qquad J_0(\lambda_n R) = 0 \tag{2.3}$$

Дифференцируя (2.3) по параметру k, приходим к тождеству

$$\frac{4}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^3}{(k^2 + \lambda_n^2)^2} = 2\frac{I_1(kR)}{I_0(kR)} - kR\left[1 - \frac{I_1^2(kR)}{I_0^2(kR)}\right], \qquad J_0(\lambda_n R) = 0 \tag{2.4}$$

Отсюда как следствие равенств (2.3) и (2.4) находим

$$\frac{4}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k\lambda_n^2}{(\lambda_n^2 + k^2)^2} = kR\left[1 - \frac{I_1^2(kR)}{I_0^2(kR)}\right], \qquad J_0(\lambda_n R) = 0 \tag{2.5}$$

Запишем далее известные тождества [16]

$$\frac{2}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k}{k^2+\alpha_n^2}=\frac{I_0(kR)}{I_1(kR)}-\frac{2}{kR} \tag{2.6}$$

$$\frac{4}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^3}{(k^2+\alpha_n^2)^2}=kR\left[\frac{I_0^2(kR)}{I_1^2(kR)}-1\right]-\frac{4}{kR} \tag{2.7}$$

$$\frac{4}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k\alpha_n^2}{(k^2+\alpha_n^2)^2}=2\frac{I_0(kR)}{I_1(kR)}-kR\left[\frac{I_0^2(kR)}{I_1^2(kR)}-1\right] \tag{2.8}$$

Здесь $\alpha_n R=\gamma_n$ — положительные корни уравнения $J_1(\gamma)=0$. Из чередования корней функций Бесселя $J_0(x)$ и $J_1(x)$ следует [15], что

$$\lambda_n<\alpha_n, \qquad \lambda_{n+1}>\alpha_n \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{2.9}$$

Теперь из тождеств (2.3) и (2.6) и первого неравенства (2.9) имеем

$$\frac{I_0(kR)}{I_1(kR)}-\frac{2}{kR}<\frac{I_1(kR)}{I_0(kR)}, \qquad kR\left[\frac{I_0(kR)}{I_1(kR)}-\frac{I_1(kR)}{I_0(kR)}\right]<2 \tag{2.10}$$

Так как $\lambda_{n+1}>\alpha_n$, то

$$\frac{4}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^3}{(k^2+\lambda_n^2)^2}-\frac{4}{R}\frac{k^3}{(k^2+\lambda_1^2)^2}<\frac{4}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^3}{(k^2+\alpha_n^2)^2}$$

Отсюда

$$\frac{4}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^3}{(k^2+\lambda_n^2)^2}<\frac{4}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^3}{(k^2+\alpha_n^2)^2}+\frac{4}{kR}$$

или в силу (2.4) и (2.7)

$$2\frac{I_1(kR)}{I_0(kR)}<kR\left[1-\frac{I_1^2(kR)}{I_0^2(kR)}\right]+kR\left[\frac{I_0^2(kR)}{I_1^2(kR)}-1\right]$$

Так как

$$kR\left[1-\frac{I_1^2(kR)}{I_0^2(kR)}\right]<kR\left[\frac{I_0^2(kR)}{I_1^2(kR)}-1\right]$$

то из последнего неравенства, используя (2.10), получим неравенство

$$\frac{I_0(kR)}{I_1(kR)}<kR\left[\frac{I_0^2(kR)}{I_1^2(kR)}-1\right]+\frac{2}{kR} \tag{2.11}$$

При исследовании бесконечных систем (1.30) и (1.31) ограничимся случаем изменения коэффициента Пуассона σ в промежутке $0<\sigma<1/_3$. Суммы модулей коэффициентов систем (1.30) и (1.31) обозначим соответственно через $T_n^{(1)}$ и $T_n^{(2)}$. Оценим их сверху. Видно, что

$$T_n^{(1)}\leqslant\frac{1}{L_n^{(1)}}\sum_{m=2,4,\ldots}^{\infty}|H_{mn}^{(2)}|\Gamma_m+T_n^{(0)}, \qquad T_n^{(2)}\leqslant\frac{1}{L_n^{(2)}}\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}|H_{mn}^{(2)}|\Gamma_m \tag{2.12}$$

$$(n=1,2,\ldots)$$

где

$$\Gamma_m=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{L_m}|H_{ms}^{(1)}|, \qquad T_n^{(0)}=\frac{8\sigma^2}{R^2 l(1-\sigma)\lambda_n L_n^{(1)}}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_s^2} \tag{2.13}$$

причем

$$L_m>0, \qquad L_n^{(1)}>0, \qquad L_n^{(2)}=\frac{\operatorname{sh}2\lambda_n a-2\lambda_n a}{2\operatorname{ch}^2\lambda_n a}>0$$

$$|H_{ms}^{(1)}|=\frac{2k_m|k_m^2-\sigma(\lambda_s^2+k_m^2)|}{l[k_m^2+\lambda_s^2]^2}\leqslant\frac{R}{2l}\frac{4}{R}\frac{k_m[(1-\sigma)k_m^2+\sigma\lambda_s^2]}{(k_m^2+\lambda_s^2)^2} \tag{2.14}$$

что следует из тождества (2.4) и формул (1.20), (1.19), (1.23). Используя (2.14), (2.4), (2.5) и (1.20), найдем

$$\Gamma_m \leqslant \frac{R}{2lL_m}\left\{(1-\sigma)\left[2\frac{I_1(k_mR)}{I_0(k_mR)} - k_mR\left(1-\frac{I_1^2(k_mR)}{I_0^2(k_mR)}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \sigma k_m R\left[1-\frac{I_1^2(k_mR)}{I_0^2(k_mR)}\right]\right\} =$$

$$= \frac{R}{2l}\frac{2-2\sigma-(1-2\sigma)k_mR\,[I_0(k_mR)/I_1(k_mR) - I_1(k_mR)/I_0(k_mR)]}{4-4\sigma-k_mR\,[I_0(k_mR)/I_1(k_mR) - I_1(k_mR)/I_0(k_mR)]}$$

или

$$\Gamma_m \leqslant \frac{R}{2l} f(t_m,\ \sigma) \qquad (m=1,\ 2;\ 3,\ldots) \tag{2.15}$$

Здесь

$$f(t_m,\ \sigma) = \frac{2-2\sigma-(1-2\sigma)t_m}{4-4\sigma-t_m}, \qquad t_m = k_mR\left[\frac{I_0(k_mR)}{I_1(k_mR)} - \frac{I_1(k_mR)}{I_0(k_mR)}\right]$$

Аргумент t_m в силу неравенства (2.10) изменяется в промежутке $0 < t_m < 2$. Найдем наибольшее значение функции $f(t_m,\ \sigma)$ на промежутке $0 \leqslant t_m \leqslant 2$ при различных значениях σ. Производная

$$\frac{\partial f}{\partial t_m} = \frac{2(5\sigma-4\sigma^2-1)}{(4-4\sigma-t_m)^2}$$

не обращается в нуль на промежутке $0 \leqslant t_m \leqslant 2$. Так как трехчлен $5\sigma - 4\sigma^2 - 1$ имеет корни $\sigma_0 = 1/4$ и $\sigma_1 = 1$, то

$$\partial f/\partial t_m < 0, \quad (0<\sigma<1/4); \qquad \partial f/\partial t_m > 0, \quad (1/4<\sigma\leqslant 1/2)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} f(t_m,\ \sigma) &\leqslant f(0,\ \sigma) = 1 - 1/2 && (0<\sigma\leqslant 1/4) \\ f(t_m,\ \sigma) &\leqslant f(2,\ \sigma) = 1-(1-3\sigma)/(1-2\sigma) && (1/4<\sigma<1/2) \end{aligned} \tag{2.16}$$

Положим

$$2\theta_1 = \begin{cases} 1/2 & (0<\sigma\leqslant 1/4) \\ (1-3\sigma)/(1-2\sigma) & (1/4<\sigma<1/2) \end{cases} \tag{2.17}$$

причем

$$\theta_1 > 0 \qquad (0<\sigma<1/3) \tag{2.18}$$

Тогда неравенство (2.15) в силу (2.16) и (2.17) перепишется так:

$$\Gamma_m \leqslant \frac{R}{2l}(1-2\theta_1) \qquad (m=1,\ 2,\ldots)$$

Отсюда неравенства (2.12) перепишутся так:

$$T_n^{(1)} \leqslant \frac{R(1-2\theta_1)}{2lL_n^{(1)}} \sum_{m=2,4,\ldots}^{\infty} |H_{mn}^{(2)}| + T_n^{(0)} \quad (n=1,\ 2,\ldots) \tag{2.19}$$

$$T_n^{(2)} \leqslant \frac{R(1-2\theta_1)}{2lL_n^{(2)}} \sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty} |H_{mn}^{(2)}| \qquad (n=1,\ 2,\ldots) \tag{2.20}$$

где

$$|H_{mn}^{(2)}| = \frac{8\lambda_n\,|\sigma[(m\pi/2l)^2+\lambda_n^2]-(m\pi/2l)^2|}{R\,[\lambda_n^2+(m\pi/2l)^2]^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2l}{R}\frac{8}{\pi}\frac{[(2/\pi)\lambda_n l]\,[\sigma[(2/\pi)\lambda_n l]^2+(1-\sigma)m^2]}{\{[(2/\pi)\lambda_n l]^2+m^2\}^2} \tag{2.21}$$

Далее, подставляя ряд (2.2) во второе равенство (2.13), получим

$$T_n^{(0)} = \frac{2\sigma^2}{(1-2\sigma)\lambda_n l L_n^{(1)}} \qquad (n=1,\,2,\ldots) \tag{2.22}$$

Имеют место тождества

$$\begin{gathered}
\frac{8}{\pi}\sum_{m=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{km^2}{(k^2+m^2)^2} = \operatorname{cth}\frac{\pi k}{2} - \frac{\pi k/2}{\operatorname{sh}^2(\pi k/2)} \\
\frac{8}{\pi}\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{k^3}{(k^2+m^2)^2} = \operatorname{th}\frac{\pi k}{2} - \frac{\pi k/2}{\operatorname{ch}^2(\pi k/2)} \\
\frac{8}{\pi}\sum_{m=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{k^3}{(k^2+m^2)^2} = \operatorname{cth}\frac{\pi k}{2} + \frac{\pi k/2}{\operatorname{sh}^2(\pi k/2)} - \frac{4}{\pi k} \\
\frac{8}{\pi}\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{km^2}{(k^2+m^2)^2} = \operatorname{tg}\frac{\pi k}{2} + \frac{\pi k/2}{\operatorname{ch}^2(\pi k/2)}
\end{gathered} \tag{2.23}$$

Величина $T_n^{(1)}$ в силу (2.19), (2.21), (2.23) оценивается так:

$$\begin{gathered}
T_n^{(1)} \leqslant \frac{(1-2\theta_1)}{L_n^{(1)}}\left\{(1-\sigma)\left[\operatorname{cth}\lambda_n l - \frac{\lambda_n l}{\operatorname{sh}^2\lambda_n l}\right] + \sigma\left[\operatorname{cth}\lambda_n l + \frac{\lambda_n l}{\operatorname{sh}^2\lambda_n l} - \frac{2}{\lambda_n l}\right]\right\} + \\
+ T_n^{(0)} = \frac{1-2\theta_1}{L_n^{(1)}}\left\{\operatorname{cth}\lambda_n l - (1-2\sigma)\frac{\lambda_n l}{\operatorname{sh}^2\lambda_n l} - \frac{2\sigma}{\lambda_n l}\right\} + \frac{2\sigma^2}{(1-2\sigma)\lambda_n l L_n^{(1)}} < \\
< 1 - 2\theta_1 - \frac{2\sigma}{\lambda_n l L_n^{(1)}}\left[1 - 2\theta_1 - \frac{\sigma}{1-2\sigma}\right]
\end{gathered}$$

при этом использовано (1.19) и (2.22). Из формулы (2.17) следует, что

$$1 - 2\theta_1 - \frac{\sigma}{1-2\sigma} \geqslant 0$$

Поэтому

$$T_n^{(1)} < 1 - 2\theta_1 \qquad (n=1,\,2,\ldots) \tag{2.24}$$

Неравенства (2.18) и (2.24) показывают, что бесконечная система (1.30) вполне регулярна для значений σ, удовлетворяющих неравенству $0<\sigma<1/3$. Далее, используя (2.20), (2.21) и (2.23), оцениваем $T_n^{(2)}$

$$\begin{gathered}
T_n^{(2)} \leqslant \frac{1-2\theta_1}{L_n^{(2)}}\left\{\sigma\left[\operatorname{th}\lambda_n l - \frac{\lambda_n l}{\operatorname{ch}^2\lambda_n l}\right] + (1-\sigma)\left[\operatorname{th}\lambda_n l + \frac{\lambda_n l}{\operatorname{ch}^2\lambda_n l}\right]\right\} = \\
= \frac{(1-2\theta_1)}{L_n^{(2)}}\left[\operatorname{th}\lambda_n l + \frac{(1-2\sigma)\lambda_n l}{\operatorname{ch}^2\lambda_n l}\right]
\end{gathered}$$

Отсюда, применяя (1.19), находим (2.25)

$$T_n^{(2)} < 1 - \theta_1 - \left[\theta_1 - 2(1-2\theta_1)(1-\sigma)\frac{t_n}{1-t_n}\right], \quad t_n = \frac{2\lambda_n l}{\operatorname{sh} 2\lambda_n l} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

Из неравенств (2.18) и (2.25) видно, что для любого значения σ из промежутка $0<\sigma<1/3$ и любых размеров l и R цилиндра найдется такой номер n_0, что при всех $n>n_0$ будет выполняться неравенство

$$\theta_1 - 2(1-2\theta_1)(1-\sigma)\frac{t_n}{1-t_n} > 0 \qquad (n>n_0)$$

Это значит, что для указанных значений σ бесконечная система (1.31) является вполне квазирегулярной

Используя формулы (1.32), (1.23) и 1.29), легко показать, что свободные члены бесконечных систем (1.30) и (1.31) являются ограниченными, если коэффициенты Фурье граничных функций имеют порядок

$$\psi_m = O(m^{-1}), \qquad \chi_m = O(m^{-1}), \qquad f_n^{(i)} = O(\sqrt{n}), \qquad \varphi_n^{(i)} = O(\sqrt{n}) \qquad (i = 1, 2)$$

Тем самым вполне регулярная бесконечная система (1.30) имеет единственное ограниченное решение, а вопрос о существовании единственного ограниченного решения вполне квазирегулярной бесконечной системы (1.31) сводится к существованию и единственности решения конечной системы n_0 уравнений с n_0 неизвестными. Если решение этой конечной системы существует и единственно, то ограниченное решение бесконечной системы (1.31) существует и единственно [17].

§ 3. На основаниях цилиндра заданы перемещения, на боковой поверхности — напряжения. Требуется найти функции $u(r, z)$ и $w(r, z)$, удовлетворяющие внутри цилиндра $0 \leqslant r \leqslant R$, $-l \leqslant z \leqslant l$ дифференциальным уравнениям Ляме (1.1), а на его поверхности условиям

$$u(r, l) = f_1(r), \qquad u(r, -l) = f_2(r), \qquad \tau_{rz}(R, z) = 0 \tag{3.1}$$

$$w(r, l) = \varphi_1(r), \qquad w(r, -l) = \varphi_2(r), \qquad \sigma_r(R, z) = \psi(z) \tag{3.2}$$

Здесь $\sigma_r(R, z)$ — нормальное напряжение на боковой поверхности цилиндра. Функции $f_1(r)$, $f_2(r)$, $\varphi_1(r)$ и $\varphi_2(r)$ предполагаются представимыми рядами Фурье

$$\varphi_i(r) = \varphi_0^{(i)} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{(i)} J_0(\lambda_n r), \qquad f_i(r) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(i)} J_1(\lambda_n r) \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant r \leqslant R \\ i = 1, 2 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

где $\lambda_n R = \gamma_n$ — положительные корни уравнения $J_1(\gamma) = 0$

$$\varphi_0^{(i)} = \frac{2}{R^2}\int_0^R r\varphi_i(r)\,dr, \qquad \varphi_n^{(i)} = \frac{2}{R^2 J_0^2(\lambda_n R)}\int_0^R r\varphi_i(r) J_0(\lambda_n r)\,dr$$

$$f_n^{(i)} = \frac{2}{R^2 J_0^2(\lambda_n R)}\int_0^R r f_i(r) J_1(\lambda_n r)\,dr \qquad (i = 1, 2)$$

а функция $\psi(z)$ — рядом Фурье

$$\psi(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m \sin\frac{m\pi(z-l)}{2l} \qquad (-l \leqslant z \leqslant l) \tag{3.4}$$

Решение граничной задачи ищем в виде рядов

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} u_m^{(3)} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(4)}, \qquad w = a_1 + \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} a_3 z + \sum_{m=1}^{\infty} w_m^{(3)} + \sum_{n=1}^{\infty} w_n^{(4)} \tag{3.5}$$

Здесь

$$u_m^{(3)} = -\left\{\frac{1}{2} C_m^{(1)} I_1(k_m r) + C_m[(4\sigma - 2) I_1(k_m r) + k_m r I_0 k_m r)]\right\} \times$$
$$\times \frac{\sin[m\pi(z-l)/2l]}{2(1-\sigma) k_m I_1(k_m R)} \tag{3.6}$$

$$w_m^{(3)} = -\left\{\frac{1}{2} C_m^{(1)} I_0(k_m r) + C_m[2I_0(k_m r) + k_m r I_1(k_m r)]\right\} \frac{\cos[m\pi(z-l)/2l]}{2(1-\sigma) k_m I_1(k_m R)}$$

$$u_n{}^{(4)} = \frac{1}{4(1-\sigma)\,\mathrm{sh}\,\lambda_n l J_0(\lambda_n R)}\{A_n{}^{(3)}\,\mathrm{sh}\,\lambda_n z + A_n{}^{(4)}\,\mathrm{th}\,\lambda_n l\,\mathrm{ch}\,\lambda_n z +$$
$$+ A_n{}^{(1)}\,\mathrm{th}\,\lambda_n l\, z\,\mathrm{sh}\,\lambda_n z + A_n{}^{(2)} z\,\mathrm{ch}\,\lambda_n z\}\, J_1(\lambda_n r)$$

$$w_n{}^{(4)} = \frac{1}{4(1-\sigma)\,\mathrm{sh}\,\lambda_n l J_0(\lambda_n R)}\Big\{- A_n{}^{(3)}\,\mathrm{ch}\,\lambda_n z - A_n{}^{(4)}\,\mathrm{th}\,\lambda_n l\,\mathrm{sh}\,\lambda_n z -$$
$$- A_n{}^{(1)}\,\mathrm{th}\,\lambda_n l\, z\,\mathrm{ch}\,\lambda_n z - A_n{}^{(2)} z\,\mathrm{sh}\,\lambda_n z +$$
$$+ \frac{(3-4\sigma)}{\lambda_n}\,[A_n{}^{(1)}\,\mathrm{th}\,\lambda_n l\,\mathrm{sh}\,\lambda_n z + A_n{}^{(2)}\,\mathrm{ch}\,\lambda_n z]\Big\}\, J_0(\lambda_n r)$$

$$k_m = \frac{m\pi}{2l}, \qquad \lambda_n R = \gamma_n, \qquad J_1(\gamma_n) = 0 \tag{3.7}$$

где a_1, a_3, C_m, $C_m{}^{(1)}$, $A_n{}^{(1)}$, $A_n{}^{(2)}$, $A_n{}^{(3)}$, $A_n{}^{(4)}$ — неизвестные постоянные

Функции (3.6) получены, исходя из формул (1.8). Поэтому функции, даваемые рядами (3.5), удовлетворяют дифференциальным уравнениям (1.1). Удовлетворяя граничным условиям (3.1) и учитывая (3.3), получим следующие соотношения для неизвестных постоянных:

$$C_m{}^{(1)} = -C_m\left[4\sigma + 2k_m R\,\frac{I_0(k_m R)}{I_1(k_m R)}\right]$$
$$A_n{}^{(4)} = -A_n{}^{(1)}\, l\,\mathrm{th}\,\lambda_n l + 2(1-\sigma)\,[f_n{}^{(1)} + f_n{}^{(2)}]\, J_0(\lambda_n R) \tag{3.8}$$
$$A_n{}^{(3)} = -A_n{}^{(2)}\, l\,\mathrm{cth}\,\lambda_n l + 2(1-\sigma)\,[f_n{}^{(1)} - f_n{}^{(2)}]\, J_0(\lambda_n R)$$

Далее, удовлетворяя граничным условиям (3.2), получим три равенства. Затем в этих равенствах приравниваем коэффициенты Фурье функций, учитывая разложения (3.3), (3.4) и разложение единицы

$$1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2[(-1)^m - 1]}{m\pi}\sin\frac{m\pi(z-l)}{2l} \qquad (-l < z < l)$$

В результате вычислений, аналогичных тем, что были выполнены в § 1, получим соотношения для определения неизвестных постоянных, которые после некоторых преобразований принимают вид

$$a_1 = -\frac{2\sigma}{R(1-\sigma)}\sum_{m=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{C_m}{k_m{}^2} + \frac{1}{2}[\varphi_0{}^{(1)} + \varphi_0{}^{(2)}] \tag{3.9}$$

$$a_3 = -\frac{4\sigma}{Rl(1-2\sigma)}\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{C_m}{k_m{}^2} + \frac{1-\sigma}{l(1-2\sigma)}[\varphi_0{}^{(1)} - \varphi_0{}^{(2)}] \tag{3.10}$$

$$C_m = -\frac{1}{L_m}\sum_{n=1}^{\infty} A_n{}^{(1)} H_{mn}^{(1)} + \frac{4\sigma a_3}{m\pi L_m} + \xi_m{}^{(1)} \qquad (m = 1, 3, \ldots) \tag{3.11}$$

$$C_m = -\frac{1}{L_m}\sum_{n=1}^{\infty} A_n{}^{(2)} H_{mn}^{(1)} + \xi_m{}^{(2)} \qquad (m = 2, 4, \ldots) \tag{3.12}$$

$$A_n{}^{(1)} = \frac{2}{L_n{}^{(1)}}\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty} C_m H_{mn}^{(2)} + \eta_n{}^{(1)} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.13}$$

$$A_n{}^{(2)} = \frac{2}{L_n{}^{(2)}}\sum_{m=2,4,\ldots}^{\infty} C_m H_{mn}^{(2)} + \eta_n{}^{(2)} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.14}$$

Здесь
$$L_m = k_m R\left[\frac{I_0^2(k_m R)}{I_1^2(k_m R)} - 1\right] - \frac{2-2\sigma}{k_m R} \tag{3.15}$$

$$L_n^{(1)} = (3-4\sigma)\,\mathrm{th}\,\lambda_n l - \frac{\lambda_n l}{\mathrm{ch}^2\lambda_n l}, \qquad L_n^{(2)} = (3-4\sigma)\,\mathrm{cth}\,\lambda_n l + \frac{\lambda_n l}{\mathrm{sh}^2\lambda_n l} \tag{3.16}$$

$$H_{mn}^{(1)} = \frac{2k_m[\lambda_n^2 - \sigma(\lambda_n^2 + k_m^2)]}{l(\lambda_n^2 + k_m^2)^2}, \qquad H_{mn}^{(2)} = \frac{4\lambda_n[\lambda_n^2 - \sigma(\lambda_n^2 + k_m^2)]}{R(\lambda_n^2 + k_m^2)^2} \tag{3.17}$$

$$\xi_m^{(1)} = \frac{2(1-\sigma)}{L_m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n k_m[f_n^{(1)} + f_n^{(2)}]J_0(\lambda_n R)}{l(\lambda_n^2 + k_m^2)} + \frac{1-\sigma}{L_m G}\psi_m \quad (m = 1, 3, \ldots) \tag{3.18}$$

$$\xi_m^{(2)} = \frac{2(1-\sigma)}{L_m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n k_m[f_n^{(1)} - f_n^{(2)}]J_0(\lambda_n R)}{l(\lambda_n^2 + k_m^2)} + \frac{1-\sigma}{L_m G}\psi_m \quad (m = 2, 4, \ldots) \tag{3.19}$$

$$\eta_n^{(1)} = \frac{2(1-\sigma)\lambda_n J_0(\lambda_n R)}{L_n^{(1)}}[\varphi_n^{(1)} - \varphi_n^{(2)} + (f_n^{(1)} + f_n^{(2)})\,\mathrm{th}\,\lambda_n l] \tag{3.20}$$

$$\eta_n^{(2)} = \frac{2(1-\sigma)\lambda_n J_0(\lambda_n R)}{L_n^{(2)}}[\varphi_n^{(1)} + \varphi_n^{(2)} + (f_n^{(1)} - f_n^{(2)})\,\mathrm{cth}\,\lambda_n l] \tag{3.21}$$

Из равенств (3.10)—(3.14) получаем две бесконечные системы линейных алгебраических уравнений для неизвестных постоянных C_m

$$C_m = -\frac{2}{L_m}\sum_{n=1}^{\infty}\cdot\sum_{s=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{1}{L_n^{(1)}}H_{mn}^{(1)}H_{sn}^{(2)}C_s - \frac{16\sigma^2}{Rl(1-2\sigma)m\pi L_m}\sum_{s=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{C_s}{k_s^2} + \delta_m^{(1)}$$
$$(m = 1, 3, \ldots) \tag{3.22}$$

$$C_m = -\frac{2}{L_m}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{1}{L_n^{(2)}}H_{mn}^{(1)}H_{sn}^{(2)}C_s + \delta_m^{(2)} \quad (m=2, 4, \ldots) \tag{3.23}$$

где

$$\delta_m^{(1)} = -\frac{1}{L_m}\sum_{n=1}^{\infty}H_{mn}^{(1)}\eta_n^{(1)} + \xi_m^{(1)} + \frac{4\sigma}{lL_m m\pi}\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}[\varphi_0^{(1)} - \varphi_0^{(2)}]$$
$$\delta_m^{(2)} = -\frac{1}{L_m}\sum_{n=1}^{\infty}H_{mn}^{(1)}\eta_n^{(2)} + \xi_m^{(2)} \tag{3.24}$$

Постоянные a_1, a_3, $A_n^{(1)}$, $A_n^{(2)}$, $A_n^{(3)}$, $A_n^{(4)}$, $C_m^{(1)}$, входящие в ряды (3.5), однозначно выражаются при помощи равенств (3.8), (3.9), (3.10) (3.13) и (3.14) через постоянные C_m и коэффициенты Фурье граничных функций, а постоянные C_m должны быть найдены из бесконечных систем (3.22) и (3.23). Если существуют единственные ограниченные решения бесконечных систем, то решение задачи, представленное рядами (3.5), будет единственным, а ряды (3.5) сходятся равномерно внутри цилиндра $-l \leqslant z \leqslant l$, $0 \leqslant r \leqslant R$ и допускают двукратное почленное дифференцирование внутри него.

Исследуем бесконечные системы. Для этого оценим сверху суммы модулей коэффициентов систем (3.22) и (3.23), обозначив их соответственно через $T_m^{(1)}$ и $T_m^{(2)}$. Видно, что

$$T_m^{(1)} \leqslant \frac{2}{L_m}\sum_{n=1}^{\infty}|H_{mn}^{(1)}|\,\Gamma_n^{(1)} + T_m^{(0)} \quad (m = 1,3,\ldots) \tag{3.25}$$
$$T_m^{(2)} \leqslant \frac{2}{L_m}\sum_{n=1}^{\infty}|H_{mn}^{(1)}|\,\Gamma_n^{(2)} \quad (m = 2, 4, \ldots)$$

где

$$T_m^{(0)} = \frac{16\sigma^2}{Rl(1-2\sigma)m\pi L_m} \sum_{s=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{k_s^2} \tag{3.26}$$

$$\Gamma_n^{(1)} = \frac{1}{L_n^{(1)}} \sum_{s=1,3,\ldots}^{\infty} |H_{sn}^{(2)}|, \qquad \Gamma_n^{(2)} = \frac{1}{L_n^{(2)}} \sum_{s=2,4,\ldots}^{\infty} |H_{sn}^{(2)}| \tag{3.27}$$

Здесь

$$L_m > 0, \qquad L_n^{(1)} > 0, \qquad L_n^{(2)} > 0$$

что следует из формул (3.15), (3.16) тождества (2.7) и неравенства $0 < \sigma \leqslant 0.5$. Используя неравенство (3.28)

$$|H_{sn}^{(2)}| = \frac{4\lambda_n |\lambda_n^2 - \sigma[(s\pi/2l)^2 + \lambda_n^2]|}{R[\lambda_n^2 + (s\pi/2l)^2]^2} \leqslant \frac{l}{R}\frac{8}{\pi}\frac{[(2/\pi)\lambda_n l][(1-\sigma)(2\lambda_n l/\pi)^2 + \sigma s^2]}{[(2\lambda_n l/\pi)^2 + s^2]^2}$$

тождества (2.23) и выражение (3.16) для $L_n^{(2)}$, оцениваем $\Gamma_n^{(2)}$

$$\Gamma_n^{(2)} \leqslant \frac{l}{RL_n^{(2)}}\left[(1-\sigma)\left(\operatorname{cth}\lambda_n l + \frac{\lambda_n l}{\operatorname{sh}^2\lambda_n l} - \frac{2}{\lambda_n l}\right) + \sigma\left(\operatorname{cth}\lambda_n l - \frac{\lambda_n l}{\operatorname{sh}^2\lambda_n l}\right)\right] =$$

$$= \frac{l}{RL_n^{(2)}}\left[\operatorname{cth}\lambda_n l - \frac{\lambda_n l}{\operatorname{sh}^2\lambda_n l} - \frac{2-2\sigma}{\lambda_n l}\left\{1 - \left(\frac{\lambda_n l}{\operatorname{sh}\lambda_n l}\right)^2\right\}\right] < \frac{l \operatorname{cth}\lambda_n l}{RL_n^{(2)}}$$

или

$$\Gamma_n^{(2)} < \frac{l \operatorname{cth}\lambda_n l}{RL_n^{(2)}} < \frac{l}{(3-4\sigma)R} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.29}$$

Точно так же, используя (3.28), (2.23) и (3.16), оцениваем $\Gamma_n^{(1)}$

$$\Gamma_n^{(1)} \leqslant \frac{l}{RL_n^{(1)}}\left[(1-\sigma)\left(\operatorname{th}\lambda_n l - \frac{\lambda_n l}{\operatorname{ch}^2\lambda_n l}\right) + \sigma\left(\operatorname{th}\lambda_n l + \frac{\lambda_n l}{\operatorname{ch}^2\lambda_n l}\right)\right] =$$

$$= \frac{l}{R}\frac{\operatorname{th}\lambda_n l + (2\sigma-1)\lambda_n l \operatorname{sch}^2\lambda_n l}{(3-4\sigma)\operatorname{th}\lambda_n l - \lambda_n l \operatorname{sch}^2\lambda_n l} = \frac{l}{R}\frac{1-(1-2\sigma)2\lambda_n l \operatorname{csch} 2\lambda_n l}{3-4\sigma-2\lambda_n l \operatorname{csch} 2\lambda_n l}$$

или

$$\Gamma_n^{(1)} \leqslant \frac{l}{R} f(t_n, \sigma) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

где

$$f(t_n, \sigma) = \frac{1-(1-2\sigma)t_n}{3-4\sigma-t_n}, \qquad t_n = \frac{2\lambda_n l}{\operatorname{sh} 2\lambda_n l} \qquad (0 < t_n < 1)$$

Для функции $f(t_n, \sigma)$ в работе [18] получена такая оценка:

$$f(t_n, \sigma) \leqslant 1 - \theta_0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$$\theta_0 = \begin{cases} 2(1-\sigma)/(3-4\sigma) & (0 < \sigma \leqslant 1/4) \\ (1-3\sigma)/(1-2\sigma) & (1/4 < \sigma < 1/2) \end{cases}$$

причем

$$\theta_0 > 0 \qquad \text{при } 0 < \sigma < 1/3 \tag{3.30}$$

Поэтому

$$\Gamma_n^{(1)} \leqslant \frac{l}{R}(1-\theta_0) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.31}$$

Оценки (3.25) в силу (3.29) и (3.31) перепишутся так:

$$\begin{aligned} T_m^{(1)} &\leqslant \frac{2l}{R}(1-\theta_0)T_m + T_m^{(0)} \qquad (m = 1, 3, \ldots) \\ T_m^{(2)} &< \frac{2l}{R(3-4\sigma)}T_m \qquad (m = 2, 4, \ldots) \end{aligned} \qquad \left(T_m = \frac{1}{L_m}\sum_{n=1}^{\infty}|H_{mn}^{(1)}|\right) \tag{3.32}$$

Используя (3.17) и тождества (2.7), (2.8), оцениваем T_m

$$T_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k_m \,|\,\lambda_n^2 - \sigma(\lambda_n^2 + k_m^2)\,|}{L_m l (k_m^2 + \lambda_n^2)^2} \leqslant \frac{R}{2lL_m} \frac{4}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_m [(1-\sigma)\lambda_n^2 + \sigma k_m^2]}{(k_m^2 + \lambda_n^2)^2} =$$

$$= \frac{R}{2lL_m}\left\{(1-\sigma)\left[2\frac{I_0(k_m R)}{I_1(k_m R)} - k_m R\left(\frac{I_0^2(k_m R)}{I_1^2(k_m R)} - 1\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \sigma\left[k_m R\left(\frac{I_0^2(k_m R)}{I_1^2(k_m R)} - 1\right) - \frac{4}{k_m R}\right]\right\}$$

$$T_m = \frac{R}{2lL_m}\left\{(2-2\sigma)\frac{I_0(k_m R)}{I_1(k_m R)} - (1-2\sigma)k_m R\left[\frac{I_0^2(k_m R)}{I_1^2(k_m R)} - 1\right] - \frac{4\sigma}{k_m R}\right\}$$

Отсюда, применяя неравенство (2.11) и формулу (3.15), получим

$$T_m < \frac{R}{2lL_m}\left\{(2-2\sigma)k_m R\left[\frac{I_0^2(k_m R)}{I_1^2(k_m R)} - 1\right] + \frac{4-4\sigma}{k_m R} - \right.$$

$$\left. - (1-2\sigma)k_m R\left[\frac{I_0^2(k_m R)}{I_1^2(k_m R)} - 1\right] - \frac{4\sigma}{k_m R}\right\} =$$

$$= \frac{R}{2lL_m}\left\{k_m R\left[\frac{I_0^2(k_m R)}{I_1^2(k_m R)} - 1\right] - \frac{2-2\sigma}{k_m R} + \frac{6-10\sigma}{k_m R}\right\} =$$

$$= \frac{R}{2lL_m}\left\{L_m + \frac{6-10\sigma}{k_m R}\right\} = \frac{R}{2l}\left[1 + \frac{6-10\sigma}{k_m R\, L_m}\right] \tag{3.33}$$

Так как

$$\sum_{s=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{s^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

то подставляя $k_s = s\pi / 2l$ в (3.26), найдем

$$T_m^{(0)} = \frac{8\sigma^2 l}{R(1-2\sigma)m\pi L_m} = \frac{4\sigma^2}{(1-2\sigma)k_m R L_m} \tag{3.34}$$

Теперь оценки (3.32) в силу (3.33) и (3.34) принимают вид

$$T_m^{(1)} < 1 - \theta_0 + \frac{6-10\sigma}{k_m R L_m}(1-\theta_0) + \frac{4\sigma^2}{(1-2\sigma)k_m R L_m} \qquad (m = 1, 3, \ldots)$$

$$T_m^{(2)} < \frac{1}{3-4\sigma} + \frac{6-10\sigma}{(3-4\sigma)k_m R L_m} \qquad (m = 2, 4, \ldots)$$

или

$$T_m^{(1)} < 1 - \frac{1}{2}\theta_0 - \left\{\frac{1}{2}\theta_0 - \frac{2}{k_m R L_m}\left[(3-5\sigma)(1-\theta_0) + \frac{2\sigma^2}{1-2\sigma}\right]\right\}$$
$$(m = 1, 3, \ldots) \tag{3.35}$$
$$T_m^{(2)} < 1 - \frac{1-2\sigma}{3-4\sigma} - \left[\frac{1-2\sigma}{3-4\sigma} - \frac{2(3-5\sigma)}{(3-4\sigma)k_m R L_m}\right] \qquad (m = 2, 4, \ldots)$$

Из неравенств (3.30) и (3.35) видно, что для любого значения σ из промежутка $0 < \sigma < 1/3$ и любых размеров l и R цилиндра найдется такой номер m_0, что при всех $m > m_0$ будет

$$\frac{1}{2}\theta_0 - \frac{2}{k_m R L_m}\left[(3-5\sigma)(1-\theta_0) + \frac{2\sigma^2}{1-2\sigma}\right] > 0 \qquad (m > m_0)$$

$$\frac{1-2\sigma}{3-4\sigma} - \frac{2(3-5\sigma)}{(3-4\sigma)L_m k_m R} > 0 \qquad (m > m_0)$$

при этом очевидно, что второе неравенство может осуществляться для любого σ из промежутка $0 < \sigma < 1/2$. Это значит, что для $0 < \sigma < 1/3$ бесконечная система (3.22) вполне квазирегулярна [17], а бесконечная система (3.23) вполне квазирегулярна для $0 < \sigma < 1/2$.

Легко показать, что свободные члены (3.24) бесконечных систем (3.22) и (3.23) являются ограниченными, если коэффициенты Фурье граничных функций имеют порядок

$$\psi_m = O(1), \qquad f_n^{(i)} = O(n^{-1/2}), \qquad \varphi_n^{(i)} = O(n^{-1/2}) \qquad (i = 1, 2)$$

Поэтому вопрос о существовании единственного решения каждой из бесконечных систем для указанных значений σ сводится к существованию и единственности решения конечной системы m_0 уравнений с m_0 неизвестными [17].

§ 4. **На поверхности цилиндра заданы перемещения.** Граничные условия задачи записываются так

$$w(r, l) = f_1(r), \qquad w(r, -l) = f_2(r), \qquad u(R, z) = \psi(z)$$
$$u(r, l) = \varphi_1(r), \qquad u(r, -l) = \varphi_2(r), \qquad w(R, z) = \chi(z)$$

Здесь

$$f_i(r) = f_0^{(i)} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(i)} J_0(\lambda_n r), \qquad \varphi_i(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^{(i)} J_1(\lambda_n r) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \\ 0 \leqslant r \leqslant R \end{pmatrix}$$

$$\psi(z) = \frac{\psi_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m \cos\frac{m\pi(z-l)}{2l}, \qquad \chi(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \chi_m \sin\frac{m\pi(z-l)}{2l} \qquad (-l \leqslant z \leqslant l)$$

при этом $\lambda_n R = \gamma_n$ — положительные корни уравнения $J_1(\gamma) = 0$.

Ищем решение граничной задачи в виде рядов

$$\begin{aligned} u &= \frac{a_2 r}{8(1-\sigma)} + l \sum_{m=1}^{\infty} \frac{I_0(k_m R) k_m}{I_1(k_m R)} u_m^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(5)} \\ w &= a_1 + \frac{z}{2(1-\sigma)}\left[(1-2\sigma)a_3 - \frac{1}{2}a_2\right] + l \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k_m I_0(k_m R)}{I_1(k_m R)} w_m^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} w_n^{(5)} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь $w_m^{(1)}$, $u_m^{(1)}$ даются формулами (1.9)

$$u_n^{(5)} = \frac{\lambda_n R}{4(1-\sigma)\operatorname{sh}\lambda_n l}\,[A_n^{(3)} \operatorname{th}\lambda_n l \operatorname{sh}\lambda_n z + A_n^{(4)} \operatorname{ch}\lambda_n z + A_n^{(1)} z \operatorname{sh}\lambda_n z +$$
$$+ A_n^{(2)} \operatorname{th}\lambda_n l\, z \operatorname{ch}\lambda_n z]\, J_1(\lambda_n r)$$

$$w_n^{(5)} = \frac{\lambda_n R}{4(1-\sigma)\operatorname{sh}\lambda_n l}\Big\{- A_n^{(3)} \operatorname{th}\lambda_n l \operatorname{ch}\lambda_n z - A_n^{(4)} \operatorname{sh}\lambda_n z - A_n^{(1)} z \operatorname{ch}\lambda_n z -$$
$$- A_n^{(2)} \operatorname{th}\lambda_n l\, z \operatorname{sh}\lambda_n z + \frac{3-4\sigma}{\lambda_n}[A_n^{(1)} \operatorname{sh}\lambda_n z + A_n^{(2)} \operatorname{th}\lambda_n l \operatorname{ch}\lambda_n z]\Big\} J_0(\lambda_n r)$$

$$\lambda_n R = \gamma_n, \qquad J_1(\gamma_n) = 0$$

где $u_n^{(5)}$, $w_n^{(5)}$ — частные решения уравнений (1.1).

Удовлетворяя граничным условиям задачи методом, изложенным в § 1, и используя разложения

$$r = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\lambda_n J_0(\lambda_n R)} J_1(\lambda_n r) \qquad (0 \leqslant r < R)$$

$$b_1 + b_2 z = \sum_{m=1}^{\infty} \{b_1[(-1)^m - 1] - l b_2 [1 + (-1)^m]\} \frac{2}{m\pi} \sin\frac{m\pi(z-l)}{2l}$$
$$(-l < z < l)$$

получим следующие соотношения для неизвестных постоянных, входящих в ряды (4.1):

$$a_1 = \frac{1}{2}[f_0^{(1)} + f_0^{(2)}]$$

$$a_2 = \frac{4}{R}(1-\sigma)\psi_0, \quad (1-2\sigma)a_3 = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1-\sigma}{l}[f_0^{(1)} - f_0^{(2)}]$$

$$C_m^{(1)} = -2C_m\left[4\sigma - 2 + k_m R\frac{I_0(k_m R)}{I_1(k_m R)}\right] - \frac{4(1-\sigma)}{l}\psi_m$$

$$A_n^{(3)} = \frac{A_n^{(2)}}{\lambda_n}[3 - 4\sigma - \lambda_n l \operatorname{th}\lambda_n l] - \frac{2(1-\sigma)}{\lambda_n R}[f_n^{(1)} + f_n^{(2)}]$$

$$A_n^{(4)} = \frac{A_n^{(1)}}{\lambda_n}[3 - 4\sigma - \lambda_n l \operatorname{cth}\lambda_n l] - \frac{2(1-\sigma)}{\lambda_n R}[f_n^{(1)} - f_n^{(2)}]$$

$$A_n^{(1)} = \frac{4l}{RL_n^{(1)}}\sum_{m=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{H_{mn}^{(1)}C_m}{J_0(\lambda_n R)} + \delta_n^{(1)} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4.2}$$

$$A_n^{(2)} = \frac{4l}{RL_n^{(2)}}\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{H_{mn}^{(1)}C_m}{J_0(\lambda_n R)} + \delta_n^{(2)} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4.3}$$

$$C_m = \frac{2R}{lL_m}\sum_{n=1}^{\infty}J_0(\lambda_n R)H_{mn}^{(2)}A_n^{(1)} + \beta_m^{(1)} \qquad (m = 2, 4, \ldots) \tag{4.4}$$

$$C_m = \frac{2R}{lL_m}\sum_{n=1}^{\infty}J_0(\lambda_n R)H_{mn}^{(2)}A_n^{(2)} + \beta_m^{(2)} \qquad (m = 1, 3, \ldots) \tag{4.5}$$

$$\delta_n^{(1)} = \frac{2(1-\sigma)}{RL_n^{(1)}}\left\{\sum_{m=2,4,\ldots}^{\infty}\frac{4\lambda_n\psi_m}{RJ_0(\lambda_n R)(\lambda_n^2 + k_m^2)} + \varphi_n^{(1)} + \varphi_n^{(2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{2\psi_0}{R\lambda_n J_0(\lambda_n R)} + [f_n^{(1)} - f_n^{(2)}]\operatorname{cth}\lambda_n l\right\}$$

$$\delta_n^{(2)} = \frac{2(1-\sigma)}{RL_n^{(2)}}\left\{\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{4\lambda_n\psi_m}{RJ_0(\lambda_n R)(\lambda_n^2 + k_m^2)} + \right.$$
$$\left. + \varphi_n^{(1)} - \varphi_n^{(2)} + [f_n^{(1)} + f_n^{(2)}]\operatorname{th}\lambda_n l\right\}$$

$$\beta_m^{(1)} = \frac{2(1-\sigma)}{lL_m}\left\{\frac{\psi_m I_0(k_m R)}{I_1(k_m R)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{[f_n^{(1)} - f_n^{(2)}]J_0(\lambda_n R)k_m}{l(\lambda_n^2 + k_m^2)} + \chi_m + \right.$$
$$\left. + \frac{2l[(1-2\sigma)a_3 - a_2/2]}{(1-\sigma)m\pi}\right\}$$

$$\beta_m^{(2)} = \frac{2(1-\sigma)}{lL_m}\left\{\frac{\psi_m I_0(k_m R)}{I_1(k_m R)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{[f_n^{(1)} + f_n^{(2)}]J_0(\lambda_n R)k_m}{l(k_m^2 + \lambda_n^2)} + \chi_m + \frac{4a_1}{m\pi}\right\}$$

$$L_n^{(1)} = (3 - 4\sigma)\operatorname{cth}\lambda_n l - \frac{\lambda_n l}{\operatorname{sh}^2\lambda_n l}, \qquad L_n^{(2)} = (3 - 4\sigma)\operatorname{th}\lambda_n l + \frac{\lambda_n l}{\operatorname{ch}^2\lambda_n l} \tag{4.6}$$

$$L_m = (4 - 4\sigma)\frac{I_0(k_m R)}{I_1(k_m R)} - k_m R\left[\frac{I_0^2(k_m R)}{I_1^2(k_m R)} - 1\right] \tag{4.7}$$

$$H_{mn}^{(1)} = \frac{2\lambda_n k_m^2}{R(\lambda_n^2 + k_m^2)^2}, \qquad H_{mn}^{(2)} = \frac{\lambda_n^2 k_m}{l(k_m^2 + \lambda_n^2)^2} \tag{4.8}$$

Введем новые неизвестные постоянные X_n и Y_n, положив

$$A_n^{(1)} = \frac{X_n}{J_0(\lambda_n R)}, \qquad A_n^{(2)} = \frac{Y_n}{J_0(\lambda_n R)} \tag{4.9}$$

Сменяя в равенствах (4.2) и (4.3) индекс n на s и подставляя в них (4.4), (4.5) и (4.9), получим две бесконечные системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных X_n и Y_n

$$X_s = \frac{8}{L_s^{(1)}} \sum_{m=2,4,\ldots}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_m} H_{ms}^{(1)} H_{mn}^{(2)} X_n + \gamma_s^{(1)} \qquad (s=1,2,\ldots) \quad (4.10)$$

$$Y_s = \frac{8}{L_s^{(2)}} \sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_m} H_{ms}^{(1)} H_{mn}^{(2)} Y_n + \gamma_s^{(2)} \qquad (s=1,2,\ldots) \quad (4.11)$$

где

$$\gamma_s^{(1)} = \frac{4l}{RL_s^{(1)}} \sum_{m=2,4,\ldots}^{\infty} H_{ms}^{(1)} \beta_m^{(1)} + J_0(\lambda_s R)\,\delta_s^{(1)}$$
$$\gamma_s^{(2)} = \frac{4l}{RL_s^{(2)}} \sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty} H_{ms}^{(1)} \beta_m^{(2)} + J_0(\lambda_s R)\,\delta_s^{(2)} \qquad (4.12)$$

Покажем, что эти бесконечные системы являются вполне регулярными для $0<\sigma<1/2$. Обозначим суммы модулей коэффициентов систем (4.10) и (4.11) соответственно $T_s^{(1)}$ и $T_s^{(2)}$. Видно, что

$$T_s^{(1)} = \frac{8}{L_s^{(1)}} \sum_{m=2,4,\ldots}^{\infty} H_{ms}^{(1)} \Gamma_m, \quad T_s^{(2)} = \frac{8}{L_s^{(2)}} \sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty} H_{ms}^{(1)} \Gamma_m \quad (s=1,2,\ldots) \quad (4.13)$$

Здесь

$$\Gamma_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_m} H_{mn}^{(2)}, \qquad L_s^{(1)}>0, \qquad L_s^{(2)}>0, \qquad L_m>0$$

причем неравенства следуют из (4.6), (4.7) и тождества (2.8). Используя (4.8), (2.8) и (4.7), находим

$$\Gamma_m = \frac{1}{L_m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 k_m}{l(k_m^2+\lambda_n^2)^2} = \frac{R}{4lL_m}\left[2\frac{I_0(k_m R)}{I_1(k_m R)} - k_m R\left(\frac{I_0^2(k_m R)}{I_1^2(k_m R)} - 1\right)\right] =$$
$$= \frac{R}{4lL_m}\left[L_m - (2-4\sigma)\frac{I_0(k_m R)}{I_1(k_m R)}\right] < \frac{R}{4l}\left[1 - \frac{2-4\sigma}{4-4\sigma}\right] = \frac{R}{4l}\frac{1}{2-2\sigma}$$

Поэтому для величин (4.13) получаем оценки

$$T_s^{(1)} < \frac{R}{l(1-\sigma)L_s^{(1)}} \sum_{m=2,4,\ldots}^{\infty} H_{ms}^{(1)}, \qquad T_s^{(2)} < \frac{R}{l(1-\sigma)L_s^{(2)}} \sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty} H_{ms}^{(1)}$$
$$(s=1,2,\ldots) \qquad (4.14)$$

Подставляя $H_{ms}^{(1)}$ и $k_m = m\pi/2l$ в (4.14) и пользуясь выражениями (2.23) и (4.6), найдем оценку для $T_s^{(1)}$

$$T_s^{(1)} < \frac{1}{2(1-\sigma)L_s^{(1)}}\left[\operatorname{cth}\lambda_s l - \frac{\lambda_s l}{\operatorname{sh}^2\lambda_s l}\right] \leqslant \frac{1}{2(1-\sigma)(3-4\sigma)}$$

или

$$T_s^{(1)} < 1-\theta_2, \quad \theta_2 = 1 - \frac{1}{2(1-\sigma)(3-4\sigma)} \qquad \begin{pmatrix} s=1,2,\ldots \\ 0<\sigma\leqslant 1/2 \end{pmatrix} \qquad (4.15)$$

Так как $2(1-\sigma)(3-4\sigma)>1$ при $0<\sigma<1/2$, то

$$\theta_2>0, \text{ если } 0<\sigma<1/2; \quad \theta_2=0, \text{ если } \sigma=1/2 \qquad (4.16)$$

Точно так же находим оценку для $T_s^{(2)}$

$$T_s^{(2)} < \frac{1}{2(1-\sigma)L_s^{(2)}}\left[\operatorname{th}\lambda_s l + \frac{\lambda_s l}{\operatorname{ch}^2\lambda_s l}\right] = \frac{1}{2(1-\sigma)} \quad \frac{1+2\lambda_s l \operatorname{csch} 2\lambda_s l}{3-4\sigma+2\lambda_s l \operatorname{csch} 2\lambda_s l}$$

или

$$T_s^{(2)} < \frac{f(t_s, \sigma)}{2(1-\sigma)}, \quad f(t_s, \sigma) = \frac{1+t_s}{3-4\sigma+t_s}, \quad t_s = \frac{2\lambda_s l}{\operatorname{sh} 2\lambda_s l}, \quad 0 < t_s < 1 \qquad (4.17)$$

Легко показать, что

$$f(t_s, \sigma) \leqslant f(1, \sigma) = \frac{1}{2(1-\sigma)} \qquad \begin{pmatrix} 0 < \sigma \leqslant {}^1/_2 \\ 0 \leqslant t_s \leqslant 1 \end{pmatrix}$$

Поэтому оценку (4.17) можно переписать так:

$$T_s^{(2)} < 1 - \theta_3; \qquad \theta_3 = 1 - \frac{1}{4(1-\sigma)^2} \qquad \begin{pmatrix} s = 1, 2, \ldots \\ 0 < \sigma \leqslant {}^1/_2 \end{pmatrix} \qquad (4.18)$$

$$\theta_3 > 0, \quad \text{если} \quad 0 < \sigma < {}^1/_2; \ \theta_3 = 0, \ \text{если} \quad \sigma = {}^1/_2$$

Из неравенств (4.15) — (4.18) следует, что бесконечные системы (4.10) и (4.11) являются вполне регулярными для $0 < \sigma < 1/2$ и регулярными при $\sigma = 1/2$. Свободные члены (4.12) бесконечных систем (4.10) и (4.11) являются ограниченными, если коэффициенты Фурье граничных функций имеют порядок

$$\psi_m = O(1), \quad \chi_m = O(1), \quad f_n^{(i)} = O(\sqrt{n}), \quad \varphi_n^{(i)} = O(\sqrt{n}) \quad (i = 1, 2)$$

Тем самым каждая из систем (4.10) и (4.11) имеет единственное ограниченное решение, если $0 < \sigma < 1/2$.

Поступила 15 II 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Filon L. On the Elastic Equilibrium of Circular Cylinders under certain practical Systems of Loads. (Phil. Trans. of the Royal Soc. London, 1902, Ser. A, 198).
2. Мирошниченко Е. Р. Задача о сжатии цилиндра между жесткими плитами без скольжения. М-во высш. образования СССР, Моск. лесотехн. ин-т, 1957.
3. Clemmow C. A. The Flexure of Tick Circular Plates. Royal Society of London Proc., S. A., 1926, vol. 112.
4. Лурье А. И. К теории толстых плит. ПММ, 1942, т. VI, вып. 2—3.
5. Прокопов В. К. Изгиб круглой плиты осесимметричной нагрузкой. ПММ, 1950, т. XIV, вып. 5.
6. Бухаринов Г. Н. К задаче о равновесии упругого круглого цилиндра. Вест. Ленингр. ун-та, 1952, № 2.
7. Старостин С. М. Решение задачи о равновесии полого цилиндра под действием нормальной к поверхности симметричной нагрузки. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1955, № 178.
8. Валов. Г. М. Контактная задача об упругой осесимметричной деформации сплошного и полого кругового цилиндра. Тр. Сибир. металлург. ин-та. Прикладная математика и механика, 1957, вып. 4/А.
9. Валов Г. М. Об одной задаче о деформации упругого кругового цилиндра. Тр. Сиб. металлург. ин-та. Прикладная математика и механика. 1957, вып. 4/А.
10. Абрамян Б. Л. Некоторые задачи равновесия круглого цилиндра. ДАН Арм. ССР, 1958, т. 26, № 2.
11. Смоловик И. И. Решение одной задачи пространственной теории упругости для кругового цилиндра. Науч. докл. высш. школы. Физ.-матем. науки, 1958, № 3.
12. Власов В. В. Метод начальных функций в осесимметричной задаче теории упругости. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 5.
13. Валов Г. М. Осесимметричная задача о сжатии упругого кругового цилиндра, покоящегося на гладком жестком основании. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 6.
14. Смоловик И. И., Щепетев А. Н. Одна задача пространственной теории упругости для кругового цилиндра. Тр. Новокузнецкого гос. педагогич. ин-та 1960, т. III, вып. 4, раздел физико-математический.
15. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Ч. 1, ИИЛ, 1949, § 18.35 и § 15.22.
16. Абрамян Б. Л. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра, ДАН Арм. ССР, 1954, т. XIX, № 1.
17. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа, ГИТТЛ, 1950, стр. 37—52.
18. Валов Г. М. Об одной основной смешанной задаче теории упругости для прямоугольника. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 3.