Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О СТРУКТУРЕ УДАРНЫХ ВОЛН

А. Г. Куликовский

(Москва)

Рассматриваются системы уравнений вида

$$\frac{\partial}{\partial t} A'_i + \frac{\partial}{\partial x} B'_i = \frac{\partial}{\partial x} L_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} \quad \left(A'_i = \frac{\partial A}{\partial u_i}, \ B'_i = \frac{\partial B}{\partial u_i} \right) \qquad (i, j = 1, \ldots, n) \qquad (1)$$

где A, B и L_{ij} — заданные функции переменных u_k, причем матрицы $\| A''_{ij} \|$ и $\| L_{ij} \|$ положительно определенные, т. е. при любых z_i не равных одновременно нулю выполняются неравенства

$$A''_{ij} z_i z_j > 0, \qquad L_{ij} z_i z_j > 0$$

(В этой работе по повторяющимся индексам всюду предполагается суммирование.) Как показано С. К. Годуновым, к такому виду приводятся одномерные уравнения газовой динамики [1], магнитной гидродинамики и некоторых других интересных для приложений систем.

Матрица диссипативных коэффициентов L_{ij} в настоящей работе не предполагается симметричной. Асимметрия матрицы L_{ij} может быть вызвана наличием магнитного поля. Нетрудно убедиться, что при указанных выше условиях система (1) эволюционна в смысле [2]. Можно показать также, что она диссипативна в смысле [3], т. е. любое решение линеаризированной системы вида $e^{i(kx - \omega t)}$ с действительным k (а следовательно, и любое решение разлагающееся в интеграл Фурье) стремится к нулю при $t \to \infty$.

Для систем типа (1) справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть $a_\alpha (u_k)$ одна из скоростей распространения малых возмущений, которая является простым корнем характеристического уравнения

$$| B''_{ij} - a A''_{ij} | = 0 \qquad (2)$$

и пусть $da_\alpha \neq 0$ в соответствующей простой волне, т. е.

$$da_\alpha = (\partial a_\alpha / \partial u_j) \, du_j \neq 0$$

для du_j определяемых системой уравнений

$$(B''_{ij} - a_\alpha A''_{ij}) \, du_j = 0 \qquad (3)$$

Тогда, если U близко к $a_\alpha (u_k^+)$, причем $U > a_\alpha (u_k^+)$, где u_k^+ — некоторый набор значений переменных, то у системы (1) существует решение вида $u_k = u_k (x - Ut)$, принимающее при $x = \infty$ значения u_k^+, а при $x = -\infty$ — значения u_k^-, близкие к u_k^+. Величины u_k^- удовлетворяют системе соотношений

$$B'_i(u_k^-) - UA'_i(u_k^-) = B'_i(u_k^+) - UA'_i(u^+_k) \equiv C_i \quad (i = 1, \ldots n) \qquad (4)$$

которая в окрестности значений u_k^+ определяет единственным образом значения $u_k^- \neq u_k^+$.

Если все $L_{ij} \to 0$, но косинус угла между векторами $\{L_{ij}z_j\}$ и $\{z_i\}$, не стремится к нулю ни при каких z_i, то указанное выше непрерывное решение стремится к разрывному решению

$$u_k(x - Ut) = u_k^+ \quad \text{при } x - Ut > \lambda$$
$$u_k(x - Ut) = u^- \quad \text{при } x - Ut < \lambda$$

Если не выставлять требования о конечности косинуса угла между векторами $\{L_{ij}z_j\}$ и $\{z_i\}$, то можно устремить L_{ij} к нулю таким образом, что решение не будет стремиться к указанному разрывному решению и ширина области, в которой хотя бы одно u_i отличается от u_k^+ и u_k^-, больше, чем на некоторую фиксированную величину δ, может даже стремиться к бесконечности.

Эта теорема близка по содержанию к теореме, доказанной Г. Я. Любарским [4], рассматривавшим более общие системы уравнений гиперболического типа. Однако при рассмотрении систем уравнений типа (1) для существования описанных выше непрерывных решений необходимо выполнение меньшего числа дополнительных условий, наложенных на систему и рассматриваемое решение, чем в случае, рассмотренном Г. Я. Любарским. В частности, не выставляется условие, заключающееся в том, что дисперсионное уравнение линеаризированной системы $D(i\omega, ik) = D(\nu U, -\nu) = 0$, в котором сделана замена переменных $U = -\omega / k$, $\nu = -ik$, для заданного значения U имеет только действительные корни ν. Это условие может не выполняться при наличии достаточно большой асимметрии матрицы диссипативных коэффициентов L_{ij}. Так, например, из работы [5], в которой рассматривалась структура магнитогидродинамической ударной волны, когда механизм диссипации задается обобщенным законом Ома, следует, что это условие нарушается в разреженной плазме, находящейся в сильном магнитном поле.

Доказательство приведенной выше теоремы основано на обобщении работ [6, 7, 8].

Рассмотрим непрерывные решения системы (1), зависящие от $\xi = Ut - x$. Эти решения удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений [1,6]

$$L_{ij}\frac{du_j}{d\xi} = P'_i, \qquad P \equiv UA - B + C_j u_j \qquad (5)$$

которые получаются из уравнений (1) интегрированием по ξ. На каждой интегральной кривой системы (5) выполняется неравенство $dP / d\xi \geqslant 0$. Действительно [1,6],

$$\frac{dP}{d\xi} = P'_j\frac{du_j}{d\xi} = L_{ij}\frac{du_i}{d\xi}\frac{du_j}{d\xi} \geqslant 0 \qquad (6)$$

причем равенство может иметь место только в том случае, если все производные $du_k / d\xi$ равны нулю, т. е. в особых точках системы (5).

Координаты особых точек системы (5) удовлетворяют уравнениям $P'_i = 0$, которые тождественны с уравнениями (4).

Решение, обращающееся при $x = \infty$ в u_k^+, а при $x = -\infty$ в u_k^-, представляется в пространстве u_k интегральной кривой системы (5), соединяющей особые точки этой системы.

Рассмотрим $n - 1$ из уравнений (4), которым удовлетворяют координаты особых точек системы (5)

$$B'_i(u_k) - UA'_i(u_k) = C_i \qquad (i = 1, \ldots, n-1) \tag{7}$$

Совокупность этих уравнений определяет линию, координаты элемента которой du_j определяются из уравнений

$$(B''_{ij} - UA''_{ij})\, du_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-1;\ j = 1, \ldots, n) \tag{8}$$

Будем предполагать, что уравнения, составляющие эту систему, остаются линейно независимыми при $U = a_\alpha$. Этого всегда можно добиться изменением нумерации уравнений, так как a_α является простым корнем уравнения (2) и поэтому среди уравнений (3) найдется $n - 1$ линейно независимых.

Так как U близко к $a_\alpha(u_k)$, то направление элемента кривой (7) в окрестности точки S_1 с координатами u_k^+ близко к направлению элемента кривой, определяемой уравнениями (3). Поэтому на некотором отрезке кривой (7) в окрестности точки S_1 происходит монотонное изменение $a_\alpha(u_k)$, причем производная от a_α, взятая по длине дуги кривой (7), отлична от нуля, т. к. отлична от нуля соответствующая производная, взятая вдоль кривой (3). Так как U близко к $a_\alpha(u_k^+)$, то на кривой (7) можно найти точку, в которой $U = a_\alpha(u_k)$.

Рассмотрим изменение $\check{C}_n \equiv B'_n - UA'_n$ вдоль кривой (5)

$$d\check{C}_n = (B''_{nj} - UA''_{nj})\, du_j \tag{9}$$

где du_j определяются из уравнений (8). Так как в качестве du_j можно взять миноры матрицы $\| B''_{ij} - UA''_{ij} \|$, дополнительные к элементам последней строки, умноженные на ds, где s — некоторый параметр вдоль кривой (7), то из равенства (9) следует

$$\frac{d\check{C}_n}{ds} = | B''_{ij} - UA''_{ij} | \tag{10}$$

Для точек, близких к поверхности $a_\alpha(u_k) = U$, пренебрегая высшими степенями разности $U - a_\alpha$, получим

$$\frac{d\check{C}_n}{ds} = (U - a_\alpha) \frac{\partial}{\partial a} | B''_{ij} - aA''_{ij} |$$

Поэтому при $a_\alpha = U$

$$\frac{d^2\check{C}_n}{ds^2} = -\frac{da_\alpha}{ds} \frac{\partial}{\partial a} | B''_{ij} - aA''_{ij} | \neq 0$$

так как $da_\alpha / ds \neq 0$ вдоль кривой (3), а следовательно, и вдоль кривой (7), и так как a_α — простой корень уравнения (2).

Таким образом, производная $dC^{\vee}{}_n / ds$ меняет знак и $C^{\vee}{}_n$ достигает экстремального значения $C_n{}^*$, когда при изменении s величина $a_\alpha(u_k)$ переходит через значение U, т. е. в точке, в которой кривая (7) пересекает поверхность $a_\alpha(u_k) = U$. Величина $C_n \equiv B'_i(u_k{}^+) - UA'_i(u_k{}^+)$ достаточно близка к $C_n{}^*$ (так как точка S_1 близка к поверхности $a_\alpha(u_k) = U$), поэтому по другую сторону от поверхности $a_\alpha(u_k) = U$ найдется точка S_2 с тем же значением $C_n{}^{\vee} = C_n$, что и в точке S_1. Координаты этой точки представляют собой значения $u_k{}^-$, удовлетворяющие системе уравнений (4). Очевидно, что это решение является единственным в окрестности точки S_1, т. к. в этой окрестности на кривой (7) имеется только один экстремум величины $C_n{}^{\vee}$.

Так как точки S_1 и S_2 лежат по разные стороны от поверхности $a_\alpha(u_k) = U$, то в точке S_2 имеем $U < a_\alpha(u_k)$. Если зафиксировать значения $U, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$, то найдутся два значения C_{n1} и C_{n2}, сколь угодно близкие к $C_n{}^*$, одно из которых больше $C_n{}^*$, а другое меньше $C_n{}^*$, такие, что при $C_n = C_{n1}$ существуют две точки S_1 и S_2, координаты которых являются решениями уравнений (4), при $C_n = C_n{}^*$ эти две точки сливаются в одну точку S, а при $C_n = C_{n2}$ у системы (4) не существует решений в окрестности точки S.

Рассмотрим поведение интегральных кривых системы (5) в окрестности особых точек. Линеаризируя уравнения (5) в окрестности одной из особых точек S_r, получим

$$L_{ij} \frac{du_j}{d\xi} = P_i{}^{*\prime}(S_r) \tag{11}$$

где

$$P^*(S_r) = P''_{ij}(S_r)\,\Delta u_i\,\Delta u_j, \qquad \Delta u_k = u_k - u_k(S_r)$$

Если путем линейного преобразования переменных Δu_k привести квадратичную форму $P^*(S_r)$ к сумме квадратов, то число m положительных коэффициентов при квадратах, называемое положительным индексом инерции, равно числу различных неравенств $a_\beta(S_r) < U$.

Действительно, если при изменении U меняются индексы инерции квадратичной формы $P''_{ij}(S_r)\,\Delta u_i\,\Delta u_j$, то одновременно с этим должен обращаться в нуль определитель $|P''_{ij}(S_r)| = |UA''_{ij}(S_r) - B''_{ij}(S_r)|$. Если $U = a_\beta(S_r)$, где a_β — простой корень уравнения $|B''_{ij}(S_r) - aA''_{ij}(S_r)| = 0$, то ранг матрицы $\|B''_{ij}(S_r) - a_\beta A''_{ij}(S_r)\|$ равен $n - 1$. При этом в представлении $P^*(S_r)$ в виде суммы квадратов только один коэффициент обращается в нуль. Так как матрица $\|A''_{ij}\|$ положительно определенная, то при $U = \infty$ положительный идекс инерции равен n, а при $U = -\infty$ — равен нулю. Таким образом, в представлении $P^*(S_r)$ в виде суммы квадратов один из положительных коэффициентов заменяется отрицательным, когда U, уменьшаясь, проходит через простой корень $a_\beta(S_r)$. Кратные корни можно рассматривать как слившиеся простые.

Покажем, что если положительный индекс инерции невырожденной квадратичной формы P^* равен m, то интегральные кривые, выходящие из точки S_r, составляют поверхность m измерений [1]. Для этого построим

[1] Это утверждение следует из работы [3], однако для рассматриваемого типа систем уравнений доказательство заметно упрощается.

на поверхности $P(u_k) = P(S_r) + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, которая в окрестности точки S_r может быть представлена уравнением $P^*(S_r) = \varepsilon$, замкнутую $m - 1$-мерную поверхность Σ_1. Интегральные кривые, выходящие из точек поверхности Σ_1 в сторону увеличения P, образуют m-мерную поверхность Σ_2. Ни одна из этих интегральных кривых не может войти в точку S_r, т. к. для точек поверхности Σ_1 выполняются неравенства $P(u_k) > P(S_r)$, а вдоль интегральных кривых происходит дальнейшее увеличение P. Пусть теперь $\varepsilon \to 0$ и все точки поверхности Σ_1 стремятся к совпадению с точкой S_r. Тогда поверхность Σ_2 стремится к некоторой предельной поверхности Σ_3, которая и является m-мерной поверхностью, состоящей из интегральных кривых, выходящих из точки S_r. Аналогично доказывается, что существует $n - m$-мерная поверхность, состоящая из интегральных кривых, входящих в эту точку.

Рассмотрим теперь поверхность $P(u_k) = G$, $G = \text{const}$, в пространстве u_k. Функция P зависит от параметров $U, C_1, C_2, \ldots, C_n$. Так как всюду в дальнейшем все эти параметры кроме C_n будут считаться постоянными, то, чтобы подчеркнуть зависимость рассматриваемой поверхности от C_n, будем в некоторых случаях писать ее уравнение в виде $P(u_k, C_n) = G$.

Будем говорить, что две области имеют один и тот же топологический тип (гомеоморфны), если они могут быть переведены одна в другую взаимно одозначным и взаимно непрерывным преобразованием.

Очевидно, что топологический тип области $P(u_k, C_n) \geqslant G$ не будет меняться при изменении G, если при этом поверхность $P(u_k, C_n) = G$ не проходит через стационарные точки функции $P(u_k, C_n)$. Действительно, при бесконечно малом изменении G можно построить преобразование поверхности $P(u_k, C_n) = G$ и области $P(u_k, C_n) \geqslant G$, которое является взаимно однозначным и взаимно непрерывным, если $\operatorname{grad} P(u_k, C_n)$ не обращается в нуль на поверхности $P(u_k, C_n) = G$. Точно так же, если поверхность $P(u_k, C_n) = G$ не проходит через стационарные точки функции $P(u_k, C_n)$, то при достаточно малом изменении C_n топологический тип области $P(u_k, C_n) \geqslant G$ не изменится.

Если G, увеличиваясь, переходит через стационарное значение $P(S_r)$ соответствующее точке S_r с невырожденной квадратичной формой $P^*(S_r)$ то, как известно [9], либо возрастает на единицу $m - 1$ — мерное число Бетти [1], либо убывает на единицу m-мерное число Бетти области $P(u_k) \geqslant G$

---

[1] Числа Бетти и гомология рассматриваются всюду в этой работе только по mod 2, что в дальнейшем для краткости не будет каждый раз указываться. При этом l-мерным числом Бетти некоторой области называется максимальное число гомологически независимых l-мерных циклов, которые можно построить в этой области. Циклами называются замкнутые поверхности (поверхности, не имеющие границ). Совокупность l-мерных циклов, лежащих в некоторой области, называется гомологически независимой, если в этой области невозможно построить $l + 1$-мерную поверхность, граница которой состоит из указанных циклов (не обязательно из всех). l-Мерный цикл называется гомологичным нулю, если существует $l + 1$-мерная поверхность, границей которой он является. Подробнее об этих понятиях смотри в книге [10].

Систему гомологически независимых между собой циклов, лежащих в некоторой области, будем называть полной, если любой цикл, не принадлежащий этой системе, гомологически зависим в рассматриваемой области от циклов, составляющих эту систему.

где m — положительный индекс инерции квадратичной формы $P^*(S_r)$. В первом случае точка S_r называется точкой возрастающего типа, во втором — точкой убывающего типа.

Будем считать, что когда G, изменяясь, не проходит через стационарные значения функции $P(u_k)$, циклы, составляющие полную гомологически независимую систему, меняются при изменении G непрерывно (произвольным образом), оставаясь в области $P(u_k) \geqslant G$. Как осуществляется это непрерывное преобразование, для дальнейшего не имеет значения, так как если G не переходит через стационарные значения, то все циклы, полученные непрерывной деформацией из одного, гомологичны один другому. Циклы, которые при $G = P(S_r)$ не проходят через точку S_r, можно считать меняющимися непрерывным образом при переходе G через значение $P(S_r)$. При этом они будут оставаться гомологически независимыми между собой, т. к. область $P(u_k) \geqslant G$ уменьшается при увеличении G.

Полную систему гомологически независимых между собой циклов области $P(u_k) \geqslant G$ всегда можно выбрать таким образом, что при G, близких к $P(S_r)$, все циклы, за исключением, может быть, одного, лежат вне достаточно малой окрестности точки S_r. Этот цикл добавляется к полной системе циклов, если точка S_r — точка возрастающего типа, или выбывает из этой системы, если точка S_r—точка убывающего типа.

Если цикл наибольшей размерности m — 1, лежащий на поверхности $P^*(S_r) = \varepsilon$, представляющей в окрестности точки S_r поверхность $P(u_k) = G$, не гомологичен нулю в области $P(u_k) \geqslant G$, то он не гомологичен остальным циклам, составляющим полную гомологически независимую систему, и его можно принять за цикл, который добавляется к этой системе, когда G переходит через значение $P(S_r)$.

Если же этот m — 1-мерный цикл гомологичен нулю в области $P(u_k) \geqslant G$, то m-мерную поверхность, которая имеет этот цикл в качестве границы и лежит в области $P(u_k) \geqslant G$, можно при $G < P(S_r)$ дополнить до m-мерного цикла, добавив к ней поверхность, которую описывает в пространстве m — 1-мерный цикл, когда при уменьшении G он стягивается к точке S_r. Построенный таким образом m-мерный цикл не гомологичен нулю в области $P(u_k) \geqslant G$ при $G < P(S_r)$.

Если окажется, что существует несколько m-мерных циклов, проходящих через окрестность точки S_r и не гомологичных один другому, то всегда можно выбрать систему циклов, гомологически эквивалентную этим циклам, которая содержит только один m-мерный цикл, проходящий в окрестности точки S_r (в качестве этого цикла можно принять любой из m-мерных циклов, проходящих через окрестность точки S_r). Поэтому будем считать, что полная система независимых циклов области $P(u_k) \geqslant G$ при $G < P(S_2)$ содержит только один m-мерный цикл, проходящий через окрестность точки S_r, который и представляет собой цикл, выпадающий из полной системы гомологически независимых циклов, когда G переходит через значение $P(S_r)$ (будем для краткости говорить, что он размыкается в точке S_r).

Заметим, что если какой-либо m-мерный цикл размыкается в точке S_r, то и любой гомологичный ему цикл размыкается в этой точке, и обратно, если какой-либо m-мерный цикл не размыкается в точке S_r, то это верно и для всех гомологичных ему циклов. Это следует из того, что m-мерный цикл, размыкающийся в точке S при $G = P(S_r)$, не может быть гомологически зависим с циклами, не проходящими через эту точку, т. к. не существует поверхности, размерность которой больше m, лежащей в области $P(u_k) \geqslant P(S_r)$ и проходящей через точку S_r.

Рассмотрим области *1* и *2*, определяемые соответственно неравенствами $P(u_k, C_{n1}) \geqslant G$ и $P(u_k, C_{n2}) \geqslant G$, где значения C_{n1} и C_{n2}, которые были введены ранее, достаточно близки к C_n^*.

Тогда, если G изменяется в некотором интервале значений, содержащем $G^* = P(S, C_n^*)$, то поверхность $P(u_k, C_{n1}) = G$, изменяясь, проходит через две стационарные точки S_1 и S_2, лежащие в окрестности точки S, а поверхность $P(u_k, C_{n2}) = G$ не проходит при изменении G в том же интервале через стационарные точки в окрестности точки S.

Предположим, что при C_n, заключенном между C_{n1} и C_{n2}, поверхность $P(u_k, C_n) = G$ не проходит ни через какие другие стационарные точки, кроме S_1 и S_2, когда G меняется в указанном интервале значений.

Тогда изменение топологического типа области $P(u_k, C_n) \geqslant G$ может происходить только при прохождении поверхности $P(u_k, C_n) = G$ через точки S_1 и S_2.

Если сделанное выше предположение не выполняется, то всегда можно рассмотреть конечную окрестность точки S, задаваемую неравенством $F(u_k) \geqslant 0$, не содержащую других стационарных точек, кроме S_1 и S_2, и во всех дальнейших рассуждениях следить за изменением топологического типа области $P(u_k, C_n) \geqslant G$, $F(u_k) \geqslant 0$.

Согласно предыдущему, если $G \neq G^*$ и C_{n1} достаточно близко к C_{n2}, то области *1* и *2* имеют один и тот же топологический тип. Если зафиксировать C_{n1} и C_{n2} и менять G, то топологический тип области *1* будет меняться при переходе G через стационарные значения $P(S_1, C_{n1})$ и $P(S_2, C_{n1})$, а топологический тип области *2* меняться не будет. Поэтому рассматриваемые области будут иметь один и тот же топологический тип при $G < P(S_i, C_{n1})$ и при $G > P(S_f, C_{n1})$, где $i, f = 1, 2$, так что $P(S_i, C_{n1}) \leqslant \leqslant P(S_f, C_{n1})$. Отсюда следует, что изменения чисел Бетти области *1* при $G = P(S_1, C_{n1})$ и $G = P(S_2, C_{n2})$ должны компенсировать друг друга.

Покажем, что точка S_f является точкой убывающего типа. Действительно, в противном случае при переходе G через значение $P(S_f, C_{n1})$ совокупность гомологически независимых циклов области *1* пополняется новым циклом R_1, причем этот цикл можно выбрать так, что при значениях G, достаточно близких к $P(S_f, C_{n1})$, он лежит в сколь угодно малой окрестности точки S_f.

Так как при $G > P(S_f, C_{n1})$ области *1* и *2* имеют одинаковый топологический тип, то в области *2* построенному выше циклу можно поставить в соответствие другой цикл R_2, не гомологичный нулю в этой области.

Если значения C_{n1} и C_{n2} достаточно близки между собой, то цикл R_2 можно выбрать так, что он будет близок к R_1, и, следовательно, при G, близких к $P(S_f, C_{n1})$, будет заключен в некоторой малой окрестности D точки S_f.

При уменьшении G область *2* будет расширяться, причем так как в рассматриваемой области $|\operatorname{grad} P(u_k, C_{n1})|$ ограничен, то скорость расширения отлична от нуля и ограничена снизу. Поэтому уже при небольшом уменьшении G вся окрестность D будет принадлежать области *2*, и цикл R_2 станет гомологичным нулю. Но это невозможно, т. к. топологический тип области *2* не может меняться.

Отсюда следует, что в точках S_i и S_f функция $P(u_k, C_{n1})$ принимает различные значения, т. к. в противном случае любую из них можно принять за S_f и согласно доказанному выше обе они должны быть точками убывающего типа, так что при переходе G через это сдвоенное критическое значение топологический тип области *2* должен был бы меняться. Так как изменение чисел Бетти области *1* при прохождении G через стационарные значения должно быть взаимно обратным, то из доказанного следует, что точка S_i является точкой возрастающего типа.

Пусть в точке S_i положительный индекс инерции квадратичной формы P^* (S_i, C_{n1}) равен m. Тогда при переходе G через значение P (S_i, C_{n1}) полная система циклов области *1* пополняется одним m — 1-мерным циклом. При переходе G через значение P (S_f, C_{n1}) из полного набора гомологически независимых циклов области *1* должен исчезнуть m —1-мерный цикл. Отсюда следует, что положительный индекс инерции квадратичной формы P^* (S_f, C_{n1}) равен $m - 1$.

Зная положительные индексы инерции квадратичных форм P^* (S_i, C_{n1}) и P^* (S_f, C_{n1}), можно заключить, что $U > a_m$ (S_i) и $U < a_m$ (S_f), т. е. что $i = 1$, $f = 2$, $m = \alpha$ и P $(S_1, C_{n1}) < P$ (S_2, C_{n2}).

Покажем, что α — 1-мерный цикл, возникший при $G = P$ (S_1, C_{n1}) в окрестности точки S_1, при $G = P$ (S_2, C_{n1}) проходит через точку S_2, а при дальнейшем увеличении G размыкается [1]. Если бы этот цикл не размыкался в точке S_2, то при $G > P$ (S_2, C_{n1}) в области *1* существовал бы цикл, не гомологичный нулю, который расположен в некоторой области, содержащей точки S_1 и S_2, размеры которой стремятся к нулю, когда $C_{n1} \to C_n^*$, $G \to G^*$ при условии, что $G > P$ (S_2, C_{n1}).

Действительно, в качестве цикла возникающего в точке S_1, может быть взят цикл, лежащий на поверхности P $(u_k) = G$. Если при изменении G этот цикл деформируется вдоль линий вектора grad P (u_k), оставаясь на поверхности P $(u_k) = G$, то эта деформация будет непрерывной (т. к. согласно предположению цикл не может пройти через точку S_2) и не выведет его за пределы достаточно малой области, содержащей точки S_1 и S_2. Так как при $G > P$ (S_2, C_{n1}) области *1* и *2* имеют одинаковый топологический тип и границы этих областей сколь угодно близки между собой, если достаточно близки C_{n1} и C_{n2}, то в области *2* также должен был бы существовать не гомологичный нулю цикл, лежащий в некоторой малой области, содержащей точки S_1 и S_2. Но это невозможно, так как в этом случае уже при малом уменьшении G менялся бы топологический тип области *2*.

Отсюда следует, что α — 1-мерный цикл, возникший при $G = P(S_1, C_{n1})$ в окрестности точки S_1 при $G = P$ (S_2, C_{n1}), проходит через точку S_2. Это утверждение не зависит от того, как указанный цикл деформировался,

[1] В трехмерном случае (n=3) это утверждение становится очевидным из геометрии поверхности $P(u_k) = G$ (см. работу [7]).

когда G менялось от $P(S_1, C_{n1})$ до $P(S_2, C_{n2})$, т. к. если какой-либо цикл размыкается, то размыкаются и все циклы, гомологичные ему.

В качестве α — 1-мерного цикла, не гомологичного нулю в области *1*, возникающего при $G = P(S_1, C_{n1})$, в точке S_1 может быть выбран цикл $\Sigma(G)$, являющийся пересечением поверхности, составленной из интегральных кривых, выходящих из точки S_1 с поверхностью $P(u_k, C_{n1}) = G$. Деформация этого цикла задается уравнениями (5) и является непрерывной во всех конечных точках пространства, не являющихся стационарными точками функции $P(u_k, C_{n1})$.

При условии, что $|L_{ij}| \neq 0$, интегральные кривые уравнений (9) в любой замкнутой области составляют конечный угол с поверхностью $P(u_k, C_{n1}) = G$. Поэтому, выбирая разность $P(S_2, C_{n1}) - P(S_1, C_{n1})$ достаточно малой (что обеспечивается близостью C_{n1} и C_{n2}), можно добиться того, что интегральные кривые, вышедшие из точки S_1 при изменении G в пределах $P(S_1, C_{n1}) < G < P(S_2, C_{n1})$, не выйдут из наперед заданной области.

Кроме того, при изменении G в указанном интервале поверхность $P(u_k, C_{n1}) = G$ не проходит через стационарные точки функции $P(u_k, C_{n1})$. Поэтому, согласно доказанному выше, цикл $\Sigma(G)$ при $G = P(S_2, C_{n1})$ проходит через точку S_2.

Отсюда следует, что существует по крайней мере одна интегральная кривая, соединяющая точки S_1 и S_2. Эта интегральная кривая и представляет непрерывное решение, обращающееся при $x = \infty$ в u_k^+, а при $x = -\infty$ обращающееся в u_k^-.

Приведенное доказательство сохраняет силу и для ударных волн конечной амплитуды, если ударная волна соответствует такому переходу $S_1 \to S_2$, что при заданных $U, C_1, C_2, \ldots, C_n$ между $P(S_1)$ и $P(S_2)$ нет других стационарных значений функции $P(u_k)$, и если цикл $\Sigma(G)$ не может разомкнуться в бесконечно удаленной точке при изменении G в пределах $P(S_1) < G < P(S_2)$. Последнее условие может быть обеспечено либо свойствами диссипативных коэффициентов L_{ij}, либо тем, что поверхность $P(u_k) = G$ при $P(S_1) < G < P(S_2)$ не содержит бесконечно удаленной точки.

Пусть [1] теперь $L_{ij} \to 0$. Если ни при каком z_i не стремится к нулю косинус угла между векторами $\{z_i\}$ и $\{L_{ij}z_i\}$, то ни при каких y_i не стремится к нулю косинус угла между векторами $\{\Lambda_{ij}y_j\}$ и $\{y_j\}$, где через Λ_{ij} обозначены элементы матрицы, обратной к $\|L_{ij}\|$. Для доказательства достаточно положить $y = L_{ij}z_j$.

Уравнения (5) и (6) могут быть записаны в виде

$$\frac{du_i}{d\xi} = \Lambda_{ij}P'_j, \qquad \frac{dP}{d\xi} = \Lambda_{ij}P'_iP'_j \tag{12}$$

Отсюда следует, что интегральные кривые при $L_{ij} \to 0$ будут составлять конечный угол с поверхностями $P(u_k) = G$. Поэтому на интегральной кривой u_i будут непрерывными функциями от P и при изменении P

[1] Для случая магнитной гидродинамики с диссипацией, которая задается диагональной матрицей L_{ij}, такой предельный переход в решении, представляющем структуру ударной волны, рассмотрен в работе [11].

в пределах $P(S_1) < P < P(S_2)$ не выйдут из некоторой области Q, содержащей точки S_1 и S_2. Кроме того, можно выделить δ-окрестности около особых точек S_1 и S_2 такие, что при P, отличающемся от $P(S_1)$ и $P(S_2)$ меньше чем на ε, соответствующая точка на интегральной кривой, соединяющей S_1 и S_2, лежит в одной из этих δ-окрестностей. Рассмотрим отрезок интегральной кривой, соответствующий изменению P в пределах $P(S_1) + \varepsilon \leqslant P \leqslant P(S_2) - \varepsilon$. Так как этот интервал не содержит стационарных значений функции P, то в области Q, из которой удалены δ-окрестности особых точек, выполняется неравенство

$$\sqrt{\sum_i P'^2_i} > \varepsilon_1$$

Если все $L_{ij} \to 0$, то при любом фиксированном векторе $\{z_i\}$ модуль вектора $\{\Lambda_{ij} z_j\}$ стремится к бесконечности. Это вытекает из того, что при любом фиксированном векторе $\{y_i\}$ модуль вектора $\{L_{ij} y_j\}$ стремится к нулю. Так как при этом косинус угла между векторами $\{\Lambda_{ij} z_j\}$ и $\{z_i\}$ ни при каком $\{z_i\}$не стремится к нулю, то

$$\frac{dP}{d\xi} = \Lambda_{ij} P'_i P'_j \to \infty$$

и изменение ξ на рассматриваемом отрезке интегральной кривой стремится к нулю:

$$\xi_2 - \xi_1 = \int\limits_{P(S_2)+\varepsilon}^{P(S_2)-\varepsilon} \frac{dP}{\Lambda_{ij} P'_i P'_j} \to 0$$

Таким образом, длина отрезка минимальной длины, содержащего все точки, в которых хотя бы одно u_i отличается от u_i^+ и u_i^- больше чем на δ, стремится к нулю, когда $L_{ij} \to 0$.

Если же вместе с L_{ij} стремится к нулю косинус угла между векторами $\{\Lambda_{ij} P'_j\}$ и $\{P'_i\}$, то выражение $\Lambda_{ij} P'_i P'_j$ может не стремиться к бесконечности и разность $\xi_2 - \xi_1$ может оставаться конечной или даже стремиться к бесконечности. Так как при этом модуль вектора $\{\Lambda_{ij} z_j\}$ при любом фиксированном $\{z_i\}$ стремится к бесконечности, то из первого равенства (12) следует, что в каждой точке отрезка $[\xi_1 \xi_2]$

$$\sqrt{\sum_i \left(\frac{du_i}{d\xi}\right)^2} \to \infty, \qquad \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \sqrt{\sum_i \left(\frac{du_i}{d\xi}\right)^2}\, d\xi \to \infty$$

если $\xi_2 - \xi_1$ не стремится к нулю при $L_{ij} \to 0$. Решение может иметь, например, квазипериодический характер на отрезке $[\xi_1, \xi_2]$, причем период стремится к нулю, когда $L_{ij} \to 0$. Пример такого предельного перехода легко может быть построен в случае, когда матрица $\|L_{ij}\|$ такая, что $L_{ij} = -L_{ji}$ при $i \neq j$ (см. [12], где предельный переход $L_{ij} \to 0$ рассматривается в магнитной гидродинамике с обобщенным законом Ома), или когда матрица $\|L_{ij}\|$ — ортогональная. Однако, если матрица $\|L_{ij}\|$ симметричная, то при любом стремлении ее элементов к нулю разность $\xi_2 - \xi_1$ стремится к нулю, т. к. в этом случае $\Lambda_{ij} z_i z_j \to \infty$ при любом наборе z_i.

В некоторых случаях приведение той или другой конкретной системы уравнений в частных производных к виду (1) может оказаться более сложным делом, чем получение обыкновенных уравнений в форме (5), которым удовлетворяют решения, зависящие от $\xi = Ut - x$ (в последнем случае в качестве P удобно выбирать поток энтропии — см., например, работу [8], где к виду (5) приводятся уравнения, описывающие стационарные течения в магнитной гидродинамике). Поэтому для удобства приложений сформулируем полученный результат для системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида (5).

Пусть функция $P(u_k)$ зависит непрерывным образом от параметра q и пусть при $q < q^*$ у функции $P(u_k)$ имеются стационарные точки S_1 и S_2, в окрестности которых функция $P(u_k)$ представляется невырожденными квадратичными формами относительно отклонений переменных от их значений в точках S_1 и S_2.

Пусть точки S_1 и S_2 стремятся к совпадению при $q \to q^*$, происходящему в некоторой точке S, причем можно выделить такую окрестность точки S, что при q, близких к q^*, в этой окрестности нет других стационарных точек функции $P(u_k)$ кроме S_1 и S_2. Пусть при $q > q^*$ в этой окрестности нет никаких стационарных точек функции $P(u_k)$. Тогда если q близко к q^*, причем $q < q^*$, то существует хотя бы одна интегральная кривая, соединяющая особые точки S_1 и S_2 системы (5).

Автор признателен С. К. Годунову, которому принадлежит результат о сигнатуре квадратичной формы $P^*(S_r)$, использованный в работе, Г. Я. Любарскому и С. С. Рышкову, обсуждавшим с автором содержание настоящей работы.

Поступила 10 V 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К. Интересный класс квазилинейных систем. ДАН, 1961, т. 139, № 3.
2. Гельфанд И. М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. Успехи матем. наук, 1959, т. 14, в. 2 (86).
3. Любарский Г. Я. О структуре ударных волн. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 6.
4. Любарский Г. Я. О существовании ударных волн малой интенсивности. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 3.
5. Любимов Г. А. Структура магнитогидродинамической ударной волны в газе с анизотропной проводимостью. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 2.
6. Годунов С. К. О понятии обобщенного решения. ДАН, 1960, т. 134, № 6.
7. Годунов С. К. О неединственном «размазывании» разрывов в решениях квазилинейных систем. ДАН, 1961, т. 136, № 2.
8. Куликовский А. Г. О структуре магнитогидродинамических ударных волн при произвольном законе диссипации. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 2.
9. Эльсгольц Л. Э. Оценка числа критических точек, УМН, т. V, в. 6 (40), 1950.
10. Понтрягин Л. С. Основы комбинаторной топологии. М.— Л., Гостехиздат, 1947.
11. Germen P. Contribution a la théorie des ondes de chock en magnetodynamique des fluides Office Nat. d'Etudes et de Rech. Aeronaut. Publ. № 97, Paris 1959.
12. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. К вопросу о структуре магнитогидродинамической ударной волны в газе с анизотропной проводимостью. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 4.