Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

Я. Н. Ройтенберг
(Москва)

В настоящей статье рассматривается задача о выборе управляющих сил, при помощи которых обеспечивалась бы реализация задаваемого в фазовом пространстве (или подпространстве) закона движения нелинейной импульсной системы или обеспечивалось бы прохождение нелинейной импульсной системой в определенные моменты времени прогнозируемых состояний.

Статья относится к вопросам теории динамического программирования [1], связанным с реализацией выбранной стратегии управления движением.

Для нелинейных систем непрерывного действия аналогичная задача была рассмотрена в предыдущей работе автора [2].

1. Движение нелинейной импульсной системы может быть описано при помощи следующей системы нелинейных разностных уравнений:

$$\sum_{k=1}^{n} f_{jk}(T)\, y_k = x_j(t) + q_j(t) + \tag{1.1}$$

$$+ \psi_j(y_1, Ty_1, \ldots, T^{m_1-1} y_1, \ldots, y_n, Ty_n, \ldots, T^{m_n-1} y_n, t) \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

Здесь y_k — обобщенные координаты системы, $x_j(t)$ — заданные внешние силы, $q_j(t)$ — добавочные внешние силы, закон изменения которых во времени надо выбрать так, чтобы обеспечить осуществление заданного движения. Через $f_{jk}(T)$ обозначены полиномы от T, коэффициенты которых являются заданными функциями времени, причем T представляет собой оператор упреждения, определяемый соотношением

$$T^{\mu} y_k = y_k(t + \mu\tau) \tag{1.2}$$

где τ — некоторая постоянная величина. Старшая степень T в полиномах $f_{jk}(T)$ $(j = 1, \ldots, n)$ для данного k обозначена через m_k.

Входящие в правые части уравнений (1.1) функции ψ_j $(j = 1, \ldots, n)$ являются некоторыми нелинейными функциями своих аргументов. Будем предполагать, что эти функции непрерывны в некоторой замкнутой области по всем своим аргументам и удолетворяют в этой области условиям Липшица относительно аргументов

$$y_1, Ty_1, \ldots, T^{m_1-1} y_1, \ldots, y_n, Ty_n, \ldots, T^{m_n-1} y_n$$

Заметим, что к системам, описываемым уравнениями (1.1), относятся также и управляемые системы, у которых предусмотрено наличие сил, являющихся функциями от рассогласования. Указанные силы учитываются как левыми частями уравнений (1.1), так и нелинейными функциями ψ_j и заданными внешними силами $x_j(t)$.

Уравнения (1.1) можно привести [3] к виду

$$Tz_\nu+\sum_{k=1}^{r} a_{\nu k}(t)\, z_k = X_\nu(t)+Q_\nu(t)+\Psi_\nu(z_1,\ldots,z_r,t) \qquad (\nu=1,\ldots,r) \quad (1.3)$$

Здесь

$$z_1=y_1,\ z_2=Ty_1,\ \ldots,\ z_{m_1}=T^{m_1-1}y_1,\ \ldots,\ z_r=T^{m_n-1}y_n \quad (1.4)$$

$$r=m_1+m_2+\ldots+m_n \quad (1.5)$$

$$X_{\sigma_j}(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{B_{kj}(t)}{\Delta^*(t)}x_k(t), \qquad Q_{\sigma_j}(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{B_{kj}(t)}{\Delta^*(t)}q_k(t)$$

$$\Psi_{\sigma_j}(z_1,\ldots,z_r,t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{B_{kj}(t)}{\Delta^*(t)}\psi_k(z_1,\ldots,z_r,t) \qquad (\sigma_j=\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \quad (1.6)$$

$$\sigma_1=m_1,\quad \sigma_2=m_1+m_2,\ \ldots,\ \sigma_n=r \quad (1.7)$$

а функции $X_\mu(t)$, $Q_\mu(t)$, $\Psi_\mu(z_1,\ldots,z_r,t)$, у которых $\mu\neq\sigma_l$ $(l=1,\ldots,n)$, тождественно равны нулю.

В выражениях (1.6) через $\Delta^*(t)$ обозначен определитель из коэффициентов $b_{jk}(t)$, с которыми входят величины $T^{m_k}y_k(t)$ в левые части уравнений (1.1)

$$\Delta^*(t)=|b_{jk}(t)| \quad (1.8)$$

причем предполагается, что этот определитель тождественно не равен нулю. Через B_{kj} обозначены алгебраические дополнения элементов b_k в определителе (1.8).

Система скалярных разностных уравнений (1.3) может быть заменена матричным разностным уравнением

$$z(t+\tau)+a(t)\,z(t)=X(t)+Q(t)+\Psi(z_1(t),\ldots,z_r(t),t) \quad (1.9)$$

где

$$z(t)=\|z_\nu(t)\|,\quad a(t)=\|a_{\nu k}(t)\|,\quad X(t)=\|X_\nu(t)\|$$

$$Q(t)=\|Q_\nu(t)\|,\quad \Psi(z_1(t),\ldots,z_r(t),t)=\|\Psi_\nu(z_1(t),\ldots,z_r(t),t)\| \quad (1.10)$$

Обозначим через $\theta(t)$ фундаментальную матрицу для однородного матричного уравнения

$$z(t+\tau)+a(t)\,z(t)=0 \quad (1.11)$$

Столбцы матрицы $\theta(t)$ будут линейно независимыми частными решениями уравнения (1.11). Поэтому матрица $\theta(t)$ будет удовлетворять уравнению

$$\theta(t+\tau)+a(t)\,\theta(t)=0 \quad (1.12)$$

Будем искать решение нелинейного матричного уравнения (1.9) в виде

$$z(t)=\theta(t)\,\chi(t) \quad (1.13)$$

где $\chi(t)$ — матрица-столбец, подлежащая определению. Подставляя выражение (1.13) в уравнение (1.9), получим

$$\theta(t+\tau)\,\chi(t+\tau)+a(t)\,\theta(t)\,\chi(t)=X(t)+Q(t)+\Psi(z_1(t),\ldots,z_r(t),t)$$

или

$$\theta(t+\tau)\,[\chi(t)+\chi(t+\tau)-\chi(t)]+a(t)\,\theta(t)\,\chi(t)=$$
$$=X(t)+Q(t)+\Psi(z_1(t),\ldots,z_r(t),t) \qquad (1.14)$$

Учитывая соотношение (1.12), будем иметь

$$\theta(t+\tau)\,\Delta\chi(t)=X(t)+Q(t)+\Psi(z_1(t),\ldots,z_r(t),\,t)$$

откуда следует, что

$$\Delta\chi(t)=\theta^{-1}(t+\tau)\,[X(t)+Q(t)+\Psi(z_1(t),\ldots,z_r(t),t)] \qquad (1.15)$$

где $\Delta\chi(t)$ — первая разность функции $\chi(t)$, а через $\theta^{-1}(t)$ обозначена обратная матрица для матрицы $\theta(t)$. Из (1.15) следует [4], что

$$\chi(t)=\sum_{i=1}^{\vartheta}\theta^{-1}(t+\tau-i\tau)\,[X(t-i\tau)+Q(t-i\tau)+$$
$$+\Psi(z_1(t-i\tau),\ldots,z_r(t-i\tau),t-i\tau)]+A(t) \qquad \left(\vartheta=\left[\frac{t}{\tau}\right]\right) \qquad (1.16)$$

где через ϑ обозначена целая часть t/τ, а $A(t)$ — периодическая функция с периодом τ, подлежащая определению. Заменяя индекс симмирования i при помощи соотношения $i=\vartheta-j+1$, преобразуем выражение (1.16) к такому виду:

$$\chi(t)=\sum_{j=1}^{\vartheta}\theta^{-1}(t-\vartheta\tau+j\tau)\,[X(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau)+Q(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau)+$$
$$+\Psi(z_1(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau),\ldots,z_r(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau),t-\vartheta\tau+j\tau-\tau)]+$$
$$+A(t) \qquad (1.17)$$

Подставляя в (1.13) выражение (1.17), придем к соотношению:

$$z(t)=\sum_{j=1}^{\vartheta}\theta(t)\,\theta^{-1}(t-\vartheta\tau+j\tau)[X(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau)+Q(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau)+$$
$$+\Psi(z_1(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau),\ldots,z_r(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau),t-\vartheta\tau+j\tau-\tau)]+$$
$$+\theta(t)\,A(t) \qquad (1.18)$$

Обозначим теперь через $z^*(t)=\|z_\nu^*(t)\|$ наперед заданную матрицу, которая определена на интервале времени $0<t<\tau$ законом изменения искомых функций $z_\nu(t)$ $(\nu=1,\ldots,r)$ на этом (начальном) интервале.

На интервале времени $0<t<\tau$ первое слагаемое в правой части соотношения (1.18) обращается в нуль. Чтобы второе слагаемое в правой части (1.18) совпадало на этом интервале времени с $z^*(t)$, необходимо выбрать в качестве периодической функции $A(t)$ следующую функцию

$$A(t)=\theta^{-1}(t-\vartheta\tau)\,z^*(t-\vartheta\tau) \qquad (1.19)$$

При таком выборе функции $A(t)$ соотношение (1.18) принимает вид

$$z(t)=\theta(t)\,\theta^{-1}(t-\vartheta\tau)\,z^*(t-\vartheta\tau)+$$
$$+\sum_{j=1}^{\vartheta}\theta(t)\,\theta^{-1}(t-\vartheta\tau+j\tau)[X(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau)+Q(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau)+$$
$$+\Psi(z_1(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau),\ldots,z_r(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau),t-\vartheta\tau+j\tau-\tau)] \qquad (1.20)$$

Вводя функцию

$$N(t, j\tau) = \theta(t)\,\theta^{-1}(t - \vartheta\tau + j\tau) \tag{1.21}$$

представляющую собой функцию веса для матричного разностного уравнения (1.11), можно соотношение (1.20) представить так:

$$z(t) = N(t, 0)\,z^*(t - \vartheta\tau) + \sum_{j=1}^{\vartheta} N(t, j\tau)\,X(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau) + \\ + \sum_{j=1}^{\vartheta} N(t, j\tau)\,Q(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau) + \sum_{j=1}^{\vartheta} N(t, j\tau) \times \\ \times \Psi(z_1(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau), \ldots, z_r(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau), t - \vartheta\tau + j\tau - \tau) \tag{1.22}$$

Матричное соотношение (1.22) эквивалентно матричному разностному уравнению (1.9) вместе с заданным законом изменения искомых функций $z_\nu(t)$ $(\nu = 1, \ldots, r)$ на начальном интервале времени $0 < t < \tau$. Соотношение (1.22) является аналогом матричному интегральному уравнению в непрерывном анализе.

Так как функции $X_\mu(t)$, $Q_\mu(t)$, $\Psi_\mu(z_1(t), \ldots, z_r(t), t)$, у которых $\mu \neq \sigma_l$ $(l = 1, \ldots, n)$ тождественно равны нулю, то система скалярных соотношений, эквивалентных матричному соотношению (1.22), имеет вид

$$z_\nu(t) = \sum_{k=1}^{r} N_{\nu k}(t, 0)\,z_k^*(t - \vartheta\tau) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\vartheta} N_{\nu\sigma_i}(t, j\tau) \times \\ \times [X_{\sigma_i}(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau) + Q_{\sigma_i}(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau)] + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\vartheta} N_{\nu\sigma_i}(t, j\tau) \times \\ \times \Psi_{\sigma_i}(z_1(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau), \ldots, z_r(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau), t - \vartheta\tau + j\tau - \tau) \\ (\nu = 1, \ldots, r) \tag{1.23}$$

Введем обозначения

$$W_{\nu l}(t, j\tau) = \sum_{i=1}^{n} N_{\nu\sigma_i}(t, j\tau)\,\frac{B_{li}(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau)}{\Delta^*(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau)} \tag{1.24}$$

$$(\nu = 1, \ldots, r;\ l = 1, \ldots, n)$$

$$g_\nu(t) = \sum_{k=1}^{r} N_{\nu k}(t, 0)\,z_k^*(t - \vartheta\tau) + \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{\vartheta} W_{\nu l}(t, j\tau)\,x_l(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau) \\ (\nu = 1, \ldots, r) \tag{1.25}$$

Подставляя в (1.23) вместо X_{σ_i}, Q_{σ_i}, Ψ_{σ_i} их выражения (1.6), можно соотношения (1.23) представить в таком виде

$$z_\nu(t) = g_\nu(t) + \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{\vartheta} W_{\nu l}(t, j\tau)\,q_l(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau) + \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{\vartheta} W_{\nu l}(t, j\tau) \times \\ \times \psi_l(z_1(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau), \ldots, z_r(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau), t - \vartheta\tau + j\tau - \tau) \\ (\nu = 1, \ldots, r) \tag{1.26}$$

Поставим теперь задачу о приведении системы к моменту времени

$$t_1 = j_1\tau \tag{1.27}$$

который примем кратным τ, в некоторую заданную точку $z_{p_\mu} = r_{p_\mu}$ ($\mu = 1, \ldots, m$) m-мерного фазового подпространства $(z_{p_1}, \ldots, z_{p_m})$.

Пусть число имеющихся в нашем распоряжении добавочных внешних сил также равно m и эти силы будут $q_{s_1}(t), \ldots, q_{s_m}(t)$.

Для решения задачи необходимо подобрать добавочные внешние силы $q_{s_i}(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ так, чтобы выполнялись условия

$$z_{p_\mu}(t_1) = r_{p_\mu} \qquad (\mu = 1, \ldots, m) \tag{1.28}$$

Принимая функции $q_{s_i}(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ ступенчатыми, сохраняющими неизменными свои значения на интервале $(0, t_1)$

$$q_{s_i}(t) \equiv q_{s_i}(0) \qquad (0 \leqslant t < t_1) \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{1.29}$$

найдем, что фазовые координаты $z_\nu(t)$ $(\nu = 1, \ldots, r)$ на интервале $(0, t_1)$ и неизвестные величины $q_{s_i}(0)$ $(i = 1, \ldots, m)$ будут определяться следующей системой уравнений:

$$\begin{gathered} z_\nu(t) = g_\nu(t) + \sum_{i=1}^{m} F_{\nu s_i}(t)\, q_{s_i}(0) + \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{\vartheta} W_{\nu l}(t, j\tau) \times \\ \times \psi_l(z_1(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau), \ldots, z_r(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau), \quad t - \vartheta\tau + j\tau - \tau) \\ (0 < t < j_1\tau) \qquad (\nu = 1, \ldots, r) \\ r_{p_\mu} - g_{p_\mu}(j_1\tau) = \sum_{i=1}^{m} F_{p_\mu s_i}(j_1\tau)\, q_{s_i}(0) + \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{j_1} W_{p_\mu l}(j_1\tau, j\tau) \times \\ \times \psi_l(z_1(j\tau - \tau), \ldots, z_r(j\tau - \tau), j\tau - \tau) \qquad (\mu = 1, \ldots, m) \end{gathered} \tag{1.30}$$

Здесь через $F_{\nu s_i}(t)$ обозначены известные функции

$$F_{\nu s_i}(t) = \sum_{j=1}^{\vartheta} W_{\nu s_i}(t, j\tau) \qquad (\nu = 1, \ldots, r;\ i = 1, \ldots, m) \tag{1.31}$$

Уравнения (1.30) можно преобразовать следующим образом. Из второй группы уравнений (1.30) следует, что

$$\begin{gathered} q_{s_i}(0) = \frac{1}{M(j_1\tau)} K_{s_i}(j_1\tau) - \frac{1}{M(j_1\tau)} \sum_{\xi=1}^{m} A_{p_\xi s_i}(j_1\tau) \times \\ \times \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{j_1} W_{p_\xi l}(j_1\tau, j\tau)\,\psi_l(z_1(j\tau - \tau), \ldots, z_r(j\tau - \tau), j\tau - \tau) \quad (i = 1, \ldots, m) \end{gathered} \tag{1.32}$$

где

$$M(j_1\tau) = \begin{vmatrix} F_{p_1 s_1}(j_1\tau) & F_{p_1 s_2}(j_1\tau) & \ldots & F_{p_1 s_m}(j_1\tau) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F_{p_m s_1}(j_1\tau) & F_{p_m s_2}(j_1\tau) & \ldots & F_{p_m s_m}(j_1\tau) \end{vmatrix} \tag{1.33}$$

$$K_{s_i}(j_1\tau) = \sum_{\xi=1}^{m} A_{p_\xi s_i}(j_1\tau)[(r_{p_\xi} - g_{p_\xi})j_1\tau] \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{1.34}$$

а $A_{p_\xi s_i}(j_1\tau)$ $(\xi, i = 1, \ldots, m)$ — алгебраические дополнения элементов $F_{p_\xi s_i}$ в определителе (1.33). Обозначая

$$k_{s_i}(j_1\tau) = \frac{1}{M(j_1\tau)} K_{s_i}(j_1\tau) \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{1.35}$$

$$U_{s_i l}(j_1\tau, j\tau) = \frac{1}{M(j_1\tau)} \sum_{\xi=1}^{m} A_{p_\xi s_i}(j_1\tau) W_{p_\xi l}(j_1\tau, j\tau) \quad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots, m \\ l = 1, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{1.36}$$

приведем выражения (1.32) к виду

$$q_{s_i}(0) = k_{s_i}(j_1\tau) - \tag{1.37}$$

$$-\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{j_1} U_{s_i l}(j_1\tau, j\tau)\psi_l(z_1(j\tau - \tau), \ldots, z_r(j\tau - \tau), j\tau - \tau) \quad (i = 1, \ldots, m)$$

Подставляя найденные для $q_{s_i}(0)$ выражения (1.37) в первую группу уравнений (1.30), придем к следующей системе нелинейных соотношений относительно искомых функций $z_\zeta(t)$ $(\zeta = 1, \ldots, r)$:

$$z_\nu(t) = G_\nu(t) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} F_{\nu s_i}(t) \sum_{j=1}^{j_1} U_{s_i l}(j_1\tau, j\tau) \times \qquad \begin{pmatrix} 0 < t < j_1\tau \\ \nu = 1, \ldots, r \end{pmatrix}$$

$$\times \psi_l(z_1(j\tau - \tau), \ldots, z_r(j\tau - \tau), j\tau - \tau) + \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{\vartheta} W_{\nu l}(t, j\tau) \times \tag{1.38}$$

$$\times \psi_l(z_1(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau), \ldots, z_r(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau), t - \vartheta\tau + j\tau - \tau)$$

где

$$G_\nu(t) = g_\nu(t) + \sum_{i=1}^{m} F_{\nu s_i}(t) k_{s_i}(j_1\tau) \qquad (\nu = 1, \ldots, r) \tag{1.39}$$

Заметим, что так же, как и в [2], число уравнений, образующих систему (1.38), уменьшится, если нелинейные функции ψ_l $(l = 1, \ldots, n)$ не будут зависеть от некоторых фазовых координат z_ρ. Если, например, под знак нелинейных функций ψ_l $(l = 1, \ldots, n)$ входит лишь одна фазовая координата z_k

$$\psi_l = \psi_l(z_k(t), t) \qquad (l = 1, \ldots, n) \tag{1.40}$$

то в соответствии с (1.38) потребуется решить следующее нелинейное уравнение относительно неизвестной функции $z_k(t)$:

$$z_k(t) = G_k(t) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} F_{\nu s_i}(t) \sum_{j=1}^{j_1} U_{s_i l}(j_1\tau, j\tau)\psi_l(z_k(j\tau - \tau), j\tau - \tau) + \tag{1.41}$$

$$+ \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{\vartheta} W_{\nu l}(t, j\tau)\psi_l(z_k(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau), t - \vartheta\tau + j\tau - \tau) \quad (0 < t < j_1\tau)$$

Остальные фазовые координаты z_ρ $(\rho = 1, \ldots, k - 1, k + 1, \ldots, r)$ будут выражены в конечных суммах

$$z_\rho(t) = G_\rho(t) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} F_{\rho s_i}(t) \sum_{j=1}^{j_1} U_{s_i l}(j_1\tau, j\tau)\psi_l(z_k(j\tau - \tau), j\tau - \tau) + \tag{1.42}$$

$$+ \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{\vartheta} W_{\rho l}(t, j\tau)\psi_l(z_k(t - \vartheta\tau + j\tau - \tau), t - \vartheta\tau + j\tau - \tau) \quad (0 < t < j_1\tau)$$

Добавочные внешние силы $q_{s_i}(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ будут при этом в соответствии с (1.37) иметь следующий вид:

$$q_{s_i}(t) \equiv q_{s_i}(0) = k_{s_i}(j_1\tau) - \tag{1.43}$$

$$-\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{j_1} U_{s_i l}(j_1\tau, j\tau)\,\psi_l(z_k(j\tau-\tau), j\tau-\tau) \qquad (0<t<j_1\tau) \qquad (i=1, \ldots, m)$$

2. Рассмотрим теперь случай, когда число добавочных внешних сил $q_{s_i}(t)$, которые возможно реализовать в управляемой системе, меньше размерности фазового подпространства, в заданную точку которого надо привести систему.

Пусть для определенности в нашем распоряжении имеется лишь одна добавочная внешняя сила $q_s(t)$, закон изменения которой во времени надо выбрать так, чтобы удовлетворялись условия (1.28), где согласно (1.27) $t_1 = j_1\tau$, причем j_1 — некоторое целое число.

Для решения задачи разобьем интервал времени $(0, j_1\tau)$ на m равных или неравных подынтервалов $(0, \gamma_1\tau)$, $(\gamma_1\tau, \gamma_2\tau), \ldots, (\gamma_{m-1}\tau, j_1\tau)$, где $\gamma_1, \ldots, \gamma_{m-1}$ — некоторые целые числа. Примем функцию $q_s(t)$ ступенчатой и обозначим через $q_s(0)$, $q_s(\gamma_1\tau), \ldots, q_s(\gamma_{m-1}\tau)$ ее значения на каждом из этих подынтервалов соответственно. Уравнения (1.26), определяющие закон движения системы, примут теперь вид

$$z_\nu(t) = g_\nu(t) + \sum_{i=0}^{m-1} q_s(\gamma_i\tau)\,1(t-\gamma_i\tau)\sum_{j=\gamma_i+1}^{\sigma_i} W_{\nu s}(t, j\tau) + \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{\vartheta} W_{\nu l}(t, j\tau)\times$$

$$\times\,\psi_l(z_1(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau), \ldots, z_r(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau), t-\vartheta\tau+j\tau-\tau)$$

$$(0<t<j_1\tau) \qquad (\nu = 1, \ldots, r) \tag{2.1}$$

где

$$\gamma_0 = 0, \qquad \gamma_m = j_1 \tag{2.2}$$

$$\sigma_i = \vartheta + (\gamma_{i+1} - \vartheta)\,1(\vartheta - \gamma_{i+1}) \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1) \tag{2.3}$$

$$1(\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \zeta < 0 \\ 1 & \text{при } \zeta \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Условия (1.28) приводятся к виду

$$r_{p_\mu} - g_{p_\mu}(j_1\tau) = \sum_{i=0}^{m-1} V_{p_\mu s}(\gamma_i\tau)\,q_s(\gamma_i\tau) + \tag{2.5}$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{j_1} W_{p_\mu l}(j_1\tau, j\tau)\,\psi_l(z_1(j\tau-\tau), \ldots, z_r(j\tau-\tau), j\tau-\tau) \quad (\mu = 1, \ldots, m)$$

где

$$V_{p_\mu s}(\gamma_i\tau) = \sum_{j=\gamma_i+1}^{\gamma_{i+1}} W_{p_\mu s}(j_1\tau, j\tau) \qquad (\mu = 1, \ldots, m;\ i = 0, 1, \ldots, m-1) \tag{2.6}$$

Из уравнений (2.5) следует, что

$$q_s(\gamma_i\tau) = \varkappa_i(j_1\tau) - \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1)$$

$$-\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{j_1} \Xi_{il}(j_1\tau, j\tau)\,\psi_l(z_1(j\tau-\tau), \ldots, z_r(j\tau-\tau), j\tau-\tau) \tag{2.7}$$

где

$$\varkappa_i(j_1\tau) = \frac{1}{\Lambda}\sum_{\xi=1}^{m} C_{p_\xi i}\,[r_{p_\xi} - g_{p_\xi}(j_1\tau)] \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1) \tag{2.8}$$

$$\Xi_{il}(j_1\tau, j\tau) = \frac{1}{\Lambda}\sum_{\xi=1}^{m} C_{p_\xi i} W_{p_\xi l}(j_1\tau, j\tau) \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1;\ l = 1, \ldots, n) \tag{2.9}$$

$$\Lambda = \begin{vmatrix} V_{p_1 s}(0) & V_{p_1 s}(\gamma_1\tau) & \ldots & V_{p_1 s}(\gamma_{m-1}\tau) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ V_{p_m s}(0) & V_{p_m s}(\gamma_1\tau) & \ldots & V_{p_m s}(\gamma_{m-1}\tau) \end{vmatrix} \tag{2.10}$$

а через $C_{p_\xi i}$ ($\xi = 1, \ldots, m$; $i = 0, 1, \ldots, m-1$) обозначены алгебраические дополнения элементов $V_{p_\xi s}(\gamma_i\tau)$ в определителе (2.10).

Подставляя найденные для $q_s(\gamma_i\tau)$ выражения (2.7) в уравнения (2.1), получим следующую систему нелинейных уравнений относительно неизвестных функций $z_\zeta(\tau)$: (2.11)

$$z_\nu(t) = \Gamma_\nu(t) - \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{l=1}^{n} \chi_{\nu i}(t)\sum_{j=1}^{j_1} \Xi_{il}(j_1\tau, j\tau)\times \qquad \left(\begin{matrix}0 < t < j_1\tau \\ \nu = 1, \ldots, r\end{matrix}\right)$$

$$\times\psi_l(z_1(j\tau-\tau), \ldots, z_r(j\tau-\tau), j\tau-\tau) + \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{\vartheta} W_{\nu l}(t, j\tau)\times$$

$$\times\psi_l(z_1(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau), \ldots, z_r(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau), t-\vartheta\tau+j\tau-\tau)$$

где

$$\Gamma_\nu(t) = g_\nu(t) + \sum_{i=0}^{m-1} \varkappa_i(j_1\tau)\,\chi_{\nu i}(t) \qquad (j = 1, \ldots, r) \tag{2.12}$$

$$\chi_{\nu i}(t) = 1(t-\gamma_i\tau)\sum_{j=\gamma_i+1}^{\sigma_i} W_{\nu s}(t, j\tau) \qquad (j = 1, \ldots, r;\ i = 0, 1, \ldots, m-1) \tag{2.13}$$

В случае, когда нелинейные функции ψ_l ($l = 1, \ldots, n$) не зависят от некоторых фазовых координат z_ρ, число нелинейных соотношений, образующих систему (2.11), уменьшается. Если, например, функции ψ_l имеют вид (1.40), то в соответствии с (2.11) будем иметь следующее нелинейное соотношение относительно неизвестной функции $z_k(t)$: (2.14)

$$z_k(t) = \Gamma_k(t) - \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{l=1}^{n} \chi_{ki}(t)\sum_{j=1}^{j_1} \Xi_{il}(j_1\tau, j\tau)\,\psi_l(z_k(j\tau-\tau), j\tau-\tau) +$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{\vartheta} W_{kl}(t, j\tau)\,\psi_l(z_k(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau), t-\vartheta\tau+j\tau-\tau) \qquad (0 < t < j_1\tau)$$

Остальные фазовые координаты будут выражены в конечных суммах

$$z_\rho(t) = \Gamma_\rho(t) - \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{l=1}^{n} \chi_{\rho i}(t) \sum_{j=1}^{j_1} \Xi_{il}(j_1\tau, j\tau)\,\psi_l(z_k(j\tau-\tau), j\tau-\tau) +$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{\vartheta} W_{\rho l}(t, j\tau)\,\psi_l(z_k(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau), t-\vartheta\tau+j\tau-\tau) \quad (2.15)$$

$$(0<t<j_1\tau) \qquad (\rho = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, r)$$

Значения добавочной внешней силы $q_s(t)$, являющейся ступенчатой функцией на интервалах времени $(\gamma_i\tau, \gamma_{i+1}\tau)$ $(i = 0, 1, \ldots, m-1)$, согласно (2.7) будут

$$q_s(\gamma_i\tau) = \varkappa_i(j_1\tau) -$$

$$-\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{j_1} \Xi_{il}(j_1\tau, j\tau)\,\psi_l(z_k(j\tau-\tau), j\tau-\tau) \qquad (i=0, 1, \ldots, m-1) \quad (2.16)$$

Описываемый метод позволяет реализовать задаваемый в m-мерном фазовом подпространстве $(z_{p_1}, \ldots, z_{p_m})$ закон движения, причем, если число добавочных внешних сил $q_{s_i}(t)$ меньше размерности подпространства, то условия типа (1.28) будут выполняться в дискретных точках $t_1, t_2 \ldots$

Для решения уравнений (1.38) или (2.11), на основе которых, согласно (1.37) и (2.7), определяются добавочные внешние силы $q_{s_i}(t)$, надо применить численные методы [5, 6].

3. В наиболее простом случае, когда предписано значение лишь одной фазовой координаты z_p, а в уравнения движения входит лишь одна нелинейная функция

$$\psi_\lambda = \psi_\lambda(z_k(t), t) \quad (3.1)$$

добавочная внешняя сила $q_s(t)$ должна быть выбрана так, чтобы выполнялось условие

$$z_p(t_1) = r_p \quad (3.2)$$

Уравнения (1.30) принимают здесь вид

$$z_\nu(t) = g_\nu(t) + F_{\nu s}(t)\,q_s(0) +$$

$$+\sum_{j=1}^{\vartheta} W_{\nu\lambda}(t, j\tau)\,\psi_\lambda(z_k(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau), \quad t-\vartheta\tau+j\tau-\tau)$$

$$(0<t<j_1\tau) \qquad (\nu = 1, \ldots, r) \quad (3.3)$$

$$r_p - g_p(j_1\tau) = F_{ps}(j_1\tau)\,q_s(0) + \sum_{j=1}^{j_1} W_{p\lambda}(j_1\tau, j\tau)\,\psi_\lambda(z_k(j\tau-\tau), j\tau-\tau)$$

где согласно (1.31)

$$F_{\nu s}(t) = \sum_{j=1}^{\vartheta} W_{\nu s}(t, j\tau) \qquad (\nu = 1, \ldots, r) \quad (3.4)$$

Из последнего уравнения (3.3) следует, что

$$q_s(0) = \frac{1}{F_{ps}(j_1\tau)}\left[r_p - g_p(j_1\tau) - \sum_{i=1}^{j_1} W_{p\lambda}(j_1\tau, j\tau)\,\psi_\lambda(z_k(j\tau-\tau), j\tau-\tau)\right] \quad (3.5)$$

При этом первая группа уравнений (3.3) принимает вид

$$z_\nu(t) = g_\nu(t) + \frac{F_{\nu s}(t)}{F_{ps}(j_1\tau)}\left[r_p - g_p(j_1\tau) - \sum_{j=1}^{j_1} W_{p\lambda}(j_1\tau, j\tau)\psi_\lambda(z_k(j\tau-\tau), j\tau-\tau)\right] + $$
$$+ \sum_{j=1}^{\vartheta} W_{\nu\lambda}(t, j\tau)\psi_\lambda(z_k(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau), \; t-\vartheta\tau+j\tau-\tau) \tag{3.6}$$
$$(0<t<j_1\tau) \qquad (\nu=1,\ldots,r)$$

В соответствии с (3.6) будем иметь следующее нелинейное соотношение относительно неизвестной функции $z_k(t)$:

$$z_k(t) = g_k(t) + \frac{F_{ks}(t)}{F_{ps}(j_1\tau)}\left[r_p - g_p(j_1\tau) - \sum_{j=1}^{j_1} W_{p\lambda}(j_1\tau, j\tau)\psi_\lambda(z_k(j\tau-\tau), j\tau-\tau)\right] + $$
$$+ \sum_{j=1}^{\vartheta} W_{k\lambda}(t, j\tau)\psi_\lambda(z_k(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau), \; t-\vartheta\tau+j\tau-\tau) \tag{3.7}$$
$$(0<t<j_1\tau)$$

Остальные фазовые координаты z_ρ ($\rho = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, r$) будут выражены в конечных суммах

$$z_\rho(t) = g_\rho(t) + \frac{F_{\rho s}(t)}{F_{ps}(j_1\tau)}\left[r_p - g_p(j_1\tau) - \sum_{j=1}^{j_1} W_{p\lambda}(j_1\tau, j\tau)\psi_\lambda(z_k(j\tau-\tau), j\tau-\tau)\right] + $$
$$+ \sum_{j=1}^{\vartheta} W_{\rho\lambda}(t, j\tau)\psi_\lambda(z_k(t-\vartheta\tau+j\tau-\tau), \; t-\vartheta\tau+j\tau-\tau) \tag{3.8}$$
$$(0<t<j_1\tau)$$

Остается еще определить $q_s(t)$. Согласно (1.29) и (3.5)

$$q_s(t) \equiv q\;(0) = k_s(j_1\tau) - \frac{1}{F_{ps}(j_1\tau)}\sum_{j=1}^{j_1} W_{p\lambda}(j_1\tau, j\tau)\psi_\lambda(z_k(j\tau-\tau), j\tau-\tau) \tag{3.9}$$
$$(0 \leqslant t < t_1)$$

где

$$k_s(j_1\tau) = \frac{1}{F_{ps}(j_1\tau)}[r_p - g_p(j_1\tau)] \tag{3.10}$$

Выражение (3.9) определяет добавочную внешнюю силу $q_s(t)$ для данного частного случая.

Поступила 25 I 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Bellman R. Dynamic Programming. Princeton Univ. Press, 1957.
2. Ройтенберг Я. Н. Некоторые задачи теории динамического программирования для нелинейных систем. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 3.
3. Ройтенберг Я. Н. Некоторые задачи теории динамического программирования. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 4.
4. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. Физматгиз, 1959.
5. Канторович Л. В. и Акилов Т. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959, стр. 650.
6. Канторович Л. В. Некоторые дальнейшие применения метода Ньютона для функциональных уравнений. Вест. Ленингр. ун-та, 1957, № 7, серия математики, механики и астрономии, вып. 2, стр. 68—103.