Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СВОБОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Н. Н. Колесников

(Москва)

В литературе по вопросам, связанным с движением свободных механических систем в центральном поле сил, например, в работе [1], ставится проблема пассивной стабилизации таких систем и демпфирования малых внешних возмущений, причем в качестве демпфера предлагается вязкая жидкость.

Здесь рассматривается вопрос о поведении указанной системы, устойчивости ее движения по отношению к некоторым известным параметрам, в том случае, если она имеет полость, заполненную вязкой несжимаемой жидкостью.

В работе получены достаточные условия устойчивости кругового движения центра масс системы и относительного равновесия системы с полостью, заполненной несжимаемой вязкой жидкостью. При исследовании используются предложенные В. В. Румянцевым постановка и метод решения задачи об устойчивости движения твердых тел с жидким наполнением [2].

Для системы, представляющей собой одно твердое тело, достаточные условия устойчивости были найдены В. В. Белецким [3].

1. Исследуем задачу о движении свободной механической системы, представляющей собой твердое тело с полостью, целиком заполненной вязкой несжимаемой жидкостью, в ньютоновском центральном поле сил.

Пусть имеем неподвижный притягивающий центр O, с которым свяжем неподвижную систему координат ξ, η, ζ.

Твердое тело и жидкость, заполняющую имеющуюся в нем полость, будем рассматривать как единую механическую систему, живая сила которой есть сумма живых сил твердого тела и жидкости $T = T_1 + T_2$, а момент количества движения — геометрическая сумма моментов количества движения тела и жидкости $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2$. Индекс *1* всегда будет стоять при величинах, относящихся к телу, индекс *2* — к жидкости.

Пусть G — общий центр масс системы, а R — радиус-вектор, проведенный из O в G.

Твердое тело без жидкости имеет массу M_1, масса жидкости M_2, плотность ее ρ — коэффициент вязкости μ^*. Масса системы равна $M = M_1 + M_2$.

Выберем начало подвижной системы отсчета x, y, z, в G, а оси ее направим по главным осям центрального эллипсоида инерции рассматриваемой системы, причем оси последнего пусть будут также главными осями инерции как для тела, так и для жидкости. Итак, если A, B, C суть главные моменты инерции системы, то

$$A = A_1 + A_2, \qquad B = B_1 + B_2, \qquad C = C_1 + C_2$$

Пусть проекции мгновенной угловой скорости системы во вращении относительно центра масс на подвижные оси будут p, q, r.

Отметим еще, что, как обычно, положение системы координатных осей x, y, z по отношению к осям ξ, η, ζ задается системой направляющих косинусов $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i\, (i = 1, 2, 3)$, а по отношению к радиусу-вектору R — системой направляющих косинусов β, β', β''.

Момент количества движения относительно неподвижного центра равен

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{R} \times M\mathbf{V} + \mathbf{K} \qquad (R^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, V = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2)$$

где $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2$ — момент количества движения системы, вычисленный для G, в ее движении относительно кениговой системы координат. В проекциях на подвижные оси

$$K_{1x} = A_1 p\,, \qquad K_{1y} = B_1 q, \qquad K_{1z} = C_1 r$$

Если обозначить через u, v, w проекции на подвижные оси относительной скорости жидкости в ее движении относительно твердого тела, то

$$K_{2x} = \rho \int\limits_\tau (yV_z - zV_y)\, d\tau\,, \quad K_{2y} = \rho \int\limits_\tau (zV_x - xV_z)\, d\tau\,, \quad K_{2z} = \rho \int\limits_\tau (xV_y - yV_x) d\tau$$

где

$$V_x = u + qz - ry, \qquad V_y = v + rx - pz, \qquad V_z = w + py - qx$$

а интегрирование ведется по всему жидкому объему τ.

Вводя обозначения g_x, g_y, g_z для проекций на подвижные оси x, y, z вектора момента количества относительного движения жидкости (относительно оболочки), можем записать окончательно

$$K_{2x} = A_2 p + g_x\,, \qquad K_{2y} = B_2 q + g_y\,, \qquad K_{2z} = C_2 r + g_z$$

$$g_x = \rho \int\limits_\tau (yw - zv)\, d\tau\,, \quad g_y = \rho \int\limits_\tau (zu - xw)\, d\tau\,, \quad g_z = \rho \int\limits_\tau (xv - yu)\, d\tau$$

Функция сил, действующих на систему, определяется интегралом (μ — гравитационная постоянная)

$$U = \int\limits_M \frac{\mu dm}{\rho_m} \qquad (\rho_m{}^2 = R^2 + 2R\,(x\beta + y\beta' + z\beta'') + x^2 + y^2 + z^2)$$

Будем рассматривать задачу в ограниченной постановке в том смысле, что примем вместо указанной силовой функции U ее приближенное значение, получающееся разложением U в ряд по степеням $x\,/\,R$, $y\,/\,R$, $z\,/\,R$ и пренебрежением членами выше второго порядка малости, что оправдывается тем, что для реальных систем их характерный размер l много меньше R, а именно отношение $l\,/\,R \approx 10^{-4} \div 10^{-6}$.

Итак, имеем [3]

$$U = \frac{\mu M}{R} - \frac{3}{2}\frac{\mu}{R^3}(A\beta^2 + A\beta'^2 + C\beta''^2) + \frac{3}{2}\frac{\mu}{R^3}\,\frac{A+B+C}{3} \tag{1.1}$$

Теперь можно выписать уравнения движения рассматриваемой системы

$$M\ddot{\xi} = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \qquad M\ddot{\eta} = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \qquad M\ddot{\zeta} = \frac{\partial U}{\partial \zeta} \tag{1.2}$$

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)\,qr + \frac{dg_x}{dt} + qg_z - rg_y = M_x \quad (xyz,\ ABC,\ pqr) \tag{1.3}$$

$$\frac{d}{dt}(V_x + u + qz - ry) + q(V_y + w + py - qx) - r(V_y + v + rx - pz) =$$
$$= F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P^*}{\partial x} + \nu\Delta u \qquad (xyz,\ uvw,\ pqr) \qquad \left(\nu = \frac{\mu^*}{\rho}\right) \tag{1.4}$$

Здесь символы (xyz, ABC, pqr) и (xyz, uvw, pqr) означают, что два других уравнения получены одновременной круговой перестановкой указанных букв, а точки над переменными означают дифференцирование по времени. К уравнениям (1.2) — (1.4) следует добавить уравнение несжимаемости

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{1.5}$$

условия на стенках S полости

$$u = v = w = 0 \tag{1.6}$$

Уравнения движения замыкаются известными кинематическими уравнениями Пуассона для направляющих косинусов. Обозначения в (1.2)—(1.3) обычные: P — гидродинамическое давление, v_x, v_y, v_z — проекции скорости G на подвижные оси; F_x, F_y, F_z — проекции на подвижные оси ньютоновской силы, а M_x, M_y, M_z — проекции гравитационных моментов, которые для выбранного приближения имеют вид

$$M_x = 3\frac{\mu}{R^3}(C - B)\,\beta''\beta' \qquad (ABC,\ \beta\ \beta'\ \beta'')$$

Отметим, что уравнения движения рассматриваемой задачи допускают интеграл $\mathbf{K}_0 = \text{const}$ и тривиальные интегралы, из которых укажем только два

$$\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1, \qquad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \tag{1.7}$$

где γ_1, γ_2, γ_3 — направляющие косинусы оси ζ с осями подвижной системы.

Выбирая ось ζ ортогональной к плоскости орбиты, можем записать интеграл площадей в следующем виде:

$$M(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) + (Ap + g_x)\,\gamma_1 + (Bq + g_y)\,\gamma_2 + (Cr + q_z)\,\gamma_3 = \text{const} \tag{1.8}$$

2. Установим некоторые соотношения. Умножая уравнения (1.2) на $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$ последовательно, уравнения (1.3) на p, q, r и складывая полученное, а уравнения (1.4) на u, v, w; затем складывая и интегрируя последнее полученное выражение по всему жидкому объему, затем суммируя все результаты и принимая во внимание условия (1.5) и (1.6), получим

$$\frac{d}{dt}(T - U) = -\mu^*\int_\tau \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] d\tau \tag{2.1}$$

Здесь

$$2T = M(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) + A_1p^2 + B_1q^2 + C_1r^2 + A_2p^2 + B_2q^2 + C_2r^2 + \\ + \rho\int_\tau (u^2 + v^2 + w^2)\,d\tau + 2\rho\int_\tau [u(qz - ry) + v(rx - pz) + w(py - qx)]\,d\tau$$

Отсюда следует, что

$$T - U \leqslant T_0 - U_0 \qquad (T_0 = T|_{t=0} U_0 = U|_{t=0})$$

Знак равенства будет, если система движется как одно твердое тело, или когда жидкость идеальна ($\mu^* = 0$). Используем преобразования [2]

$$\omega_1 = K_{2x} / A_2, \qquad \omega_2 = K_{2y} / B_2, \qquad \omega_3 = K_{2z} / C_2 \tag{2.3}$$

Новые неизвестные функции $\omega_i\ (t)$ определены, если известны V_x V_y, V_z. Введем далее еще одни неизвестные

$$V_1 = V_x + \omega_3 y - \omega_2 z, \quad V_2 = V_y + \omega_1 z - \omega_3 x, \quad V_3 = V_z + \omega_2 x - \omega_1 y \tag{2.4}$$

В силу определения $\omega_i\ (t)$

$$\rho\int_\tau (yV_3 - zV_2)\,d\tau = \rho\int_\tau (zV_1 - xV_3)\,d\tau = \rho\int_\tau (xV_2 - yV_1)\,d\tau = 0$$

Ясно, что V_x, V_y, V_z будут определены, если нам известны $\omega_i\ (t)$ и $V_i\ (t, x, y, z)$ $(i = 1, 2, 3)$.

Теперь часть живой силы системы, относящаяся к движению жидкости относительно общего центра масс, приводится к удобному для исследования виду

$$2T_2 = \frac{K_{2x}^2}{A_2} + \frac{K_{2y}^2}{B_2} + \frac{K_{2z}^2}{C_2} + \rho\int_\tau (V_1^2 + V_2^2 + V_3^2)\,d\tau \tag{2.5}$$

Если ввести сферические координаты центра масс системы

$$\xi = R\cos\psi\cos\varphi, \qquad \eta = R\cos\psi\sin\varphi, \qquad \zeta = R\sin\psi$$

то окончательно первые интегралы уравнений движения системы можно записать в виде

$$M(\dot{R}^2 + R^2\dot{\psi}^2 + R^2\cos^2\psi\dot{\varphi}^2) + A_1p^2 + B_1q^2 + C_1r^2 + \\ + \frac{K_{2x}^2}{A_2} + \frac{K_{2y}^2}{B_2} + \frac{K_{2z}^2}{C_2} + \rho\int_\tau (V_1^2 + V_2^2 + V_3^2)\,d\tau - 2U \leqslant \text{const}$$

$$MR^2\cos^2\psi\dot{\varphi} + (A_1p + K_{2x})\,\gamma_1 + (B_1q + K_{2y})\,\gamma_2 + (C_1r + K_{2z})\,\gamma_3 = \text{const}$$

$$\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1, \qquad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$$

3. Уравнения движения рассматриваемой системы допускают частное решение

$$p = q = 0, \qquad r = \omega, \qquad u = v = w = 0$$

$$\beta = \beta'' = 0, \quad \beta' = 1, \quad K_{2x} = K_{2y} = 0, \quad K_{2z} = C_2\omega \tag{3.1}$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \quad R = R_0, \quad \dot{R} = 0, \quad \psi = 0, \quad \dot{\psi} = 0, \quad \dot{\varphi} = \omega$$

Это частное решение соответствует движению системы по круговой орбите $R = R_0$ с постоянной угловой скоростью ω так, что главные центральные оси системы расположены по касательной, радиусу-вектору и бинормали невозмущенной орбиты. При этом жидкость покоится относительно тела, т. е. система движется как одно твердое тело.

Исследуем устойчивость невозмущенного движения системы по отношению к переменным

$$p,\ q,\ r;\quad \beta,\ \beta',\ \beta'';\quad \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3;\quad K_{2x},\ K_{2y},\ K_{2z};\quad R,\ \dot R,\ \psi,\ \dot\psi,\ \dot\varphi \tag{3.2}$$

Сохранив для величин, имеющих в невозмущенном движении тривиальные значения, их обозначения, в возмущенном движении положим

$$r = \omega + x_1,\quad \beta' = 1 + x_3,\quad \gamma_3 = 1 + x_2,\quad K_{2z} = C_2\omega + x_4$$
$$R = R_0 + x_5,\quad \dot R = \dot x_5,\quad \dot\varphi = \omega + \dot x_6$$

В невозмущенном движении также было

$$\omega_1 = \omega_2 = 0,\quad \omega_3 = \omega,\quad V_1 = V_2 = V_3 = 0$$

Уравнения возмущенного движения рассматриваемой задачи допускают первые интегралы

$$W_1 = M\dot x_5^2 + MR_0^2\dot\psi^2 + MR_0^2\dot x_6^2 + \Big(M\omega^2 - \frac{2\mu M}{R_0^3} + \frac{18\mu B}{R_0^5} -$$
$$- \frac{6\mu(A+B+C)}{R_0^5}\Big) x_5^2 - MR_0^2\omega^2\psi^2 + A_1p^2 + B_1q^2 + C_1x_1^2 +$$
$$+ \frac{K_{2x}^2}{A_2} + \frac{K_{2y}^2}{B_2} + \frac{x_4^2}{C_2} + \frac{3\mu A}{R_0^3}\beta^2 + \frac{3\mu C}{R_0^3}\beta''^2 +$$
$$+ \frac{3\mu B}{R_0^3}x_3^2 + 4MR_0\omega x_5\dot x_6 - \frac{18\mu B}{R_0^4}x_3x_5 + \rho\int_\tau (V_1^2 + V_2^2 + V_3^2)\,d\tau +$$
$$+ 2MR_0^2\omega\dot x_6 + \Big(2MR_0\omega^2 + \frac{2\mu M}{R_0^2} - \frac{9\mu B}{R_0^4} + \frac{3\mu(A+B+C)}{R_0^4}\Big)x_5 +$$
$$+ 2C_1\omega x_1 + 2\omega x_4 + \frac{6\mu B}{R_0^3}x_3 + O(3) \leqslant \mathrm{const} \tag{3.3}$$

$$W_2 = M\omega x_5^2 - MR_0^2\omega\psi^2 + 2MR_0x_5\dot x_6 + A_1p\gamma_1 + K_{2x}\gamma_1 +$$
$$+ B_1q\gamma_2 + K_{2y}\gamma_2 + x_4x_2 + C_1x_1x_2 + MR_0^2\dot x_6 +$$
$$+ 2MR_0\omega x_5 + C_1x_1 + x_4 + C\omega x_2 + O(3) = \mathrm{const} \tag{3.4}$$

$$W_3 = \beta^2 + \beta''^2 + x_3^2 + 2x_3 = \mathrm{const} \tag{3.5}$$
$$W_4 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + x_2^2 + 2x_2 = \mathrm{const} \tag{3.6}$$

Через $O(3)$ обозначены члены не ниже третьего порядка малости относительно возмущений.

Для возмущенного движения $dW_1 / dt \leqslant 0$ в силу (2.1).

Рассмотрим функцию от переменных задачи, построенную по методу Четаева [4] в виде связки первых интегралов уравнений движения

$$W = W_1 - 2\omega W_2 - \frac{3\mu B}{R_0^3}W_3 + C\omega^2W_4 + \sigma W_2^2 + \lambda W_3^2 + \delta W_4^2 = \tag{3.7}$$
$$= M\dot x_5^2 + MR_0^2\dot\psi^2 + MR_0^2\omega^2\psi^2 + \frac{3\mu}{R_0^3}(A-B)\beta^2 + \frac{3\mu}{R_0^3}(C-B)\beta''^2 +$$
$$+ A_1p^2 - 2\omega A_1p\gamma_1 + C\omega^2\gamma_1^2 - 2\omega\gamma_1K_{2x} + \frac{1}{A_2}K_{2x}^2 + B_1q^2 -$$
$$- 2\omega B_1q\gamma_2 + C\omega^2\gamma_2^2 - 2\omega\gamma_2K_{2y} + \frac{1}{B_2}K_{2y}^2 + 4\lambda x_3^2 +$$

$$+\left(\frac{2\mu M}{R_0^3}-5\omega^2 M+4\sigma M^2R_0^2\omega^2\right)x_5^2+(MR_0^2+\sigma M^2R_0^4)\dot{x}_6^2+$$
$$+(C\omega^2+\sigma C^2\omega^2+4\delta)x_2^2+(C_1+\sigma C_1^2)x_1^2+\left(\frac{1}{C_2}+\sigma\right)x_4^2-$$
$$-\frac{18\mu B}{R_0^4}x_5x_3+4\sigma M^2R_0^3\omega x_5\dot{x}_6+4\sigma MR_0C\omega^2x_5x_2+$$
$$+4\sigma MR_0C_1\omega x_5x_1+4\sigma MR_0\omega x_5x_4+2\sigma MR_0^2C\omega x_2\dot{x}_6+$$
$$+2\sigma MR_0^2C_1x_1\dot{x}_6+2\sigma MR_0^2x_4\dot{x}_6+(-2\omega C_1+2\sigma CC_1\omega)x_1x_2+$$
$$+(-2\omega+2\sigma C\omega)x_2x_4+2\sigma C_1x_1x_4+\rho\int_\tau(V_1^2+V_2^2+V_3^2)\,d\tau+O(3)$$

Здесь σ, λ и δ—некоторые постоянные величины. При этом угловая скорость движения центра масс системы определяется соотношением

$$\omega^2=\frac{\mu}{R^3}-\frac{9\mu B}{2MR_0^5}+\frac{3}{2}\frac{\mu(A+B+C)}{MR_0^5} \tag{3.8}$$

По критерию Сильвестра для определенной положительности функции W необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$A>B,\quad C>B;\quad C>A_1,\quad C>A_1+A_2;\quad C>B_1,\quad C>B_1+B_2 \tag{3.9}$$

и, кроме того, положительности всех диагональнах миноров для

$$\|h_{ij}\| \qquad (h_{ij}=h_{ji}) \qquad (i,j=1,\ldots,6) \tag{3.10}$$

$$h_{11}=\frac{2\mu M}{R_0^3}-5\omega^2M+4\sigma M^2R_0^2\omega^2,\qquad h_{12}=-\frac{9\mu B}{R_0^4},\qquad h_{13}=2\sigma M^2R_0^3\omega$$
$$h_{14}=2\sigma MR_0C\omega^2,\qquad h_{15}=2\sigma MR_0C_1\omega,\qquad h_{16}=2\sigma MR_0\omega$$
$$h_{22}=4\lambda,\qquad h_{23}=h_{24}=h_{25}=h_{26}=0$$
$$h_{33}=MR_0^2+\sigma M^2R_0^4,\qquad h_{34}=\sigma MR_0^2C\omega,\qquad h_{35}=\sigma MR_0^2C_1$$
$$h_{36}=\sigma MR_0^2,\qquad h_{44}=C\omega^2+\sigma C^2\omega^2+4\delta,\qquad h_{45}=-\omega C_1+\sigma CC_1\omega$$
$$h_{46}=-\omega+\sigma C\omega,\qquad h_{55}=C_1+\sigma C_1^2,\qquad h_{56}=\sigma C_1,\qquad h_{66}=\frac{1}{C_2}+\delta$$

Выбором постоянных δ, λ и δ можно обеспечить положительность этих миноров, причем получающиеся неравенства не являются существенными и ограничивают только выбор указанных констант. Неравенства же (3.9) вместе дают

$$C>A>B \tag{3.11}$$

Итак, если $C>A>B$, то σ, λ и δ можно выбрать так, чтобы квадратичный интеграл W был определенно положительным относительно переменных

$$p_1q,\ x_1,\ \beta,\ \beta'',\ x_3,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ x_2,\ K_{2x},\ K_{2y},\ K_{2z},\ x_4,\ x_5,\ \dot{x}_5,\ \psi,\ \dot{\psi},\ \dot{x}_6$$

Это и будет функция Ляпунова задачи. В самом деле, dW/dt, взятая в силу уравнений возмущенного движения, будет неположительной, что следует из равенства (2.1). А это, согласно теореме Ляпунова об устойчивости, позволяет заключить об устойчивости указанного невозмущенного движения (3.1) твердого тела с полостью, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью.

Полученные достаточные условия устойчивости по виду совпадают с достаточными условиями устойчивости для системы, представляющей собой одно твердое тело [3], но в рассматриваемом случае

$$C_1 + C_2 > A_1 + A_2 > B_1 + B_2$$

Если для одного твердого тела, для которого, например, $A_1 > C_1 > B_1$, условие вида (3.1) не выполнено, то легко видеть, что для твердого тела с полостью, заполненной жидкостью, выбором полости, такой, что $C_2 > A_2 \geqslant B_2$, можно добиться выполнения условий (3.10), сохранив геометрию масс самого твердого тела, необходимую, может быть, для других целей.

Отметим, что найденные достаточные условия устойчивости не включают в себя членов, связанных с вязкостью жидкости, а ограничивают выбор геометрии масс системы.

Полученные результаты не только дают достаточные условия устойчивости, но и позволяют заключить большее, опираясь на одну теорему Жуковского [5].

Жуковский показал, что при наличии относительного движения жидкости энергия системы рассеивается (это следует из (2.1)), и, следовательно, могут представиться две возможности: либо энергия системы будет все время убывать и система в конце концов остановится, либо система будет стремиться к вращению с постоянной угловой скоростью вокруг одной из своих главных осей инерции как одно твердое тело. Первая возможность исключена, так как имеет место интеграл площадей (1.13). Следовательно, если вектор $\mathbf{K}_0$ не возмущается, то всякое возмущенное движение, соответствующее этому условию, асимптотически приближается к рассматриваемому в задаче. Если же вектор $\mathbf{K}$ возмущается, то возмущенное движение асимптотически стремится к некоторому новому установившемуся движению, соответствующему измененному моменту количества движения.

В заключение автор благодарит В. В. Румянцева за внимание к работе.

Поступила 21 III 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Baker R. M. L. Passive Stability of a Satellite Vechile, Navigation, 1958, vol. 6, No 1.
2. Румянцев В. В. Об устойчивости вращения волчка с полостью, заполненной вязкой жидкостью. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 4.
3. Белецкий В. В. О вибрации спутника. Сб. Искусственные спутники земли. Изд-во АН СССР, 1959, вып. 3.
4. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1955.
5. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч., т. II, Гостехиздат, 1948.