Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ЗАДАЧА МИНИМУМА В ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЧАСТИЧНЫМ ЖИДКИМ НАПОЛНЕНИЕМ

Г. К. Пожарицкий

(Москва)

Задаче о движении твердого тела с полостями, неполностью заполненными жидкостью, посвящен ряд работ (см.,например, [1-6]). Уравнения движения составлялись в предположении о потенциальности движения жидкости и при принятии обычных допущений теории волн малой амплитуды и теории малых колебаний твердого тела. Согласно мысли Пуанкаре смещение жидкости от положения равновесия разлагалось в ряд по некоторой системе функций с зависящими от времени коэффициентами, и задача сводилась к бесконечной системе уравнений второго порядка.

Задача об устойчивости равновесия механической системы, подверженной действию потенциальных сил, может быть решена строго при помощи теоремы Лагранжа об устойчивости равновесия, для которого потенциальная энергия имеет изолированный минимум. Критерий минимума потенциальной энергии для систем с конечным числом степеней свободы широко известен и представляет собой условие определенной положительности второй вариации потенциальной энергии. Если система обладает бесконечным числом степенной свободы, то задача в значительной степени усложняется. Разложение уравнения возмущенной поверхности в ряд по системе некоторых функций сводит задачу о минимуме к задаче об определенной положительности бесконечной квадратичной формы, в которую переходит вторая вариация потенциальной энергии. Для случая тяжелой жидкости показано [3], что эта квадратичная форма будет определенно положительной тогда, когда будет определенно положительной некоторая квадратичная форма вариаций координат твердого тела, представляющая собой вторую вариацию потенциальной энергии твердого тела и замороженной жидкости в сумме с поправкой на жидкое наполнение. Поправка на жидкое наполнение представляет квадратичную форму вариаций координат твердого тела с коэффициентами, представляющими некоторые суммы по бесконечному числу индексов.

Из условий определенной положительности суммы этих квадратичных форм можно было бы сделать строгий вывод об устойчивости в смысле А. М. Ляпунова равновесия системы; однако для приложений потребовалось бы вычислить указанные суммы, что в работе [7] выполнено только для частного случая.

Ниже задача о минимуме потенциальной энергии системы также сводится к задаче о минимуме некоторой функции от координат твердого тела, состоящей из потенциальной энергии замороженной системы в сумме с неположительной поправкой на жидкое наполнение. Разложение этой поправки начинается с квадратичной формы вариаций координат твердого тела с коэффициентами в виде двойных интегралов от известной функции по известной области.

1. Вообразим стакан, имеющий форму замкнутого прямоугольного параллелепипеда и могущий вращаться вокруг неподвижной оси y, проходящей через ось симметрии стакана перпендикулярно к его граням. Если тяжелый стакан заполнен тяжелой жидкостью, то при равновесии стенки стакана вертикальны, а свободная поверхность жидкости горизонтальна.

Пусть прямая ab есть проекция оси y на поверхность жидкости в положении равновесия (будем мыслить ее жестко связанной со стаканом) и пусть P плоскость, жестко связанная со стаканом и совпадающая со свободной поверхностью жидкости в положении равновесия. Если отклонить стакан на угол θ от вертикали, то потенциальная энергия жидкости при этом положении стакана будет иметь минимум по сравнению с другими ее возможными положениями, если ее поверхность будет представлять горизонтальную плоскость P_1, причем положение несжимаемой жидкости, ограниченной сверху плоскостью P_1, будет возможным, если P_1 проходит через прямую ab и, следовательно, выполняется условие сохранения объема. Назовем это положение системы положением θ, P_1.

Переведем систему вначале в положение θ, P, мысля жидкость замороженной, и пусть δU_1 есть изменение потенциальной энергии системы при этом переходе. Затем жидкость, расположенную над плоскостью P_1 и под плоскостью P, переведем под плоскость P_1 и получим положение θ, P_1. Изменение δU_2 потенциальной энергии при этом переходе будет, очевидно, отрицательным. Полное изменение потенциальной энергии системы $\delta U^{1+2} = \delta U_1 + \delta U_2 < \delta U_1$, причем δU^{1+2} зависит лишь от угла θ.

Следовательно, для того чтобы δU было положительным, достаточно и необходимо, чтобы δU^{1+2} было определенно положительным. Заметим, что для этого необходимо, чтобы δU_1 не могла принимать отрицательных значений. Итак, задача о минимуме потенциальной энергии системы сведена к задаче о минимуме δU^{1+2}, зависящей только от угла, и в решении этой задачи не встретится затруднений.

В общем случае вообразим твердое тело с полостью, неполностью наполненной однородной несжимаемой жидкостью плотности σ.

Пусть положение твердого тела по отношению к неподвижной системе координат O, x, y, z задается стационарными и голономными обобщенными координатами q_i ($i \leqslant 6$), и пусть на тело действуют стационарные потенциальные силы с потенциальной энергией $U'(q_i)$. Объемные силы, действующие на жидкость, предполагаются также потенциальными с потенциальной энергией элемента объема $d\tau$, имеющей вид $W(x, y, z)\,\sigma d\tau$.

Пусть система находится в равновесии, отвечающем нулевым значениям q_i, а жидкость занимает некоторое количество односвязных областей D_k°, ограниченных S — поверхностью полости — и участками поверхностей $W = \alpha_k$.

Пусть Q_k — некоторая точка свободной поверхности жидкости, M_k — геометрическое место первых точек пересечения непрерывных кривых с началом в Q_k, лежащих на $W = \alpha_k$, с поверхностью S. Кривую M_k будем называть границей поверхности $W = \alpha_k$, объем жидкости обозначим через V_k. Не исключается из рассмотрения случай, когда односвязный объем, занимаемый жидкостью, ограничен стенкой S, поверхностью $W = \alpha_k$ с границей, состоящей из нескольких замкнутых кривых M_{kj}.

Очевидно, что жидкий объем в положении равновесия не будет содержать точек $W > \alpha_k$.

Пусть T_k есть некоторая точка границы M_k свободной поверхности, $n_1(T_k)$ — единичный вектор нормали к поверхности S в точке T_k, направленный внутрь полости, $n_2(T_k)$ — единичный вектор нормали к поверхности $W = \alpha_k$, направленный в сторону $\alpha > \alpha_k$, а $\theta(T_k)$ — угол, отсчитанный от n_1 к n_2, между этими нормалями, который предположим ограниченным некоторыми постоянными пределами $\pi > \theta_1 > \theta(T_k) > \theta_0 > 0$ для всех точек T_k и для любого k. Вектор n_1 предположим зависящим непрерывно от точки поверхности S в окрестности границы M_k, а вектор n_2 единичной нормали к семейству поверхностей $W = \alpha$ положим непрерывным по отношению к x, y, z в той же окрестности. Предположим также, что ни одно из α_k не является наибольшим из всех возможных значений, которые может принимать W в окрестности $W=\alpha_k$.

Пусть M_{kj} есть некоторая замкнутая кривая, принадлежащая границе области, отвечающей некоторому значению α_k с уравнением

$$x = x_j(t, \alpha_k, \beta^\circ), \qquad y = y_j(t, \alpha_k, \beta^\circ), \qquad z = z_j(t, \alpha_k, \beta^\circ) \tag{1.1}$$

где $\Phi(x, y, z) = \beta^\circ$ есть уравнение поверхности полости в окрестности границы, t — параметр, изменяющийся в пределах $0 \leqslant t \leqslant l^\circ$, а сами функции x_j, y_j, z_j суть периодические по t с периодом l°. Согласно сделанным предположениям о свойствах нормалей, вектор

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial W}{\partial x} & \dfrac{\partial W}{\partial y} & \dfrac{\partial W}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)\mathbf{i} + \ldots$$

не уничтожается нигде в малой окрестности кривой M_{kj}. Следовательно, на основании теоремы о существовании неявных функций будут существовать функции

$$x = x_j(t, \alpha_k + \Delta\alpha, \beta^\circ, q_i), \qquad y = y_j(t, \alpha_k + \Delta\alpha, \beta^\circ, q_i) \tag{1.2}$$

$$z = z_j(t, \alpha_k + \Delta\alpha, \beta^\circ, q_i) \qquad (0 \leqslant t \leqslant l, \ i \leqslant 6)$$

представляющие собой решение уравнений

$$W(x, y, z) = \alpha_k + \Delta\alpha, \qquad \Phi'(x, y, z, q_i) = \beta^\circ \tag{1.3}$$

де $\Phi' = \beta^\circ$ есть уравнение поверхности полости отклоненного от положения равновесия твердого тела. Функции (1.2) при $\Sigma q_i^2 + \Delta\alpha^2 \to 0$ переходят непрерывно в функции (1.1). Непрерывность этих функций является равномерной по отношению к t, поэтому они будут также и периодическими с тем же периодом l° и, следовательно, кривая (1.2) замкнута. Это значит, что область $D_k'(\Delta\alpha, q_i)$, ограниченная поверхностью $W = \alpha_k + \Delta\alpha$, поверхностью S и непрерывно переходящая в область D_k° при $\Sigma q_i^2 + \Delta\alpha^2 \to 0$, будет также односвязной и будет содержать лишь точки $W < \alpha_k + \Delta\alpha$.

Если q_i изменять в замкнутой области $r^2 = \Sigma q_i^2 \leqslant H^2$, где $H > 0$ — достаточно малая постоянная, то для всякого α_k найдется постоянная $\gamma_k > \alpha_k$, такая, что при любых q_i, взятых из этой области, поверхность полости S и поверхности $W = \gamma_k$, $W = \alpha_k + \Delta\alpha$ будут ограничивать замкнутую область $C_k(\Delta\alpha, \gamma, q_i)$, не содержащую точек $W < \alpha_k + \Delta\alpha$.

Здесь, как и в дальнейшем, под поверхностью $W = \alpha_k + \Delta\alpha$ будем подразумевать участок этой поверхности, непрерывно переходящий при

$\Sigma q_i^2 + \alpha\Delta^2 \to 0$ в свободную поверхность жидкости $W = \alpha_k$ при положении равновесия. Существование уровня $W = \gamma_k$ вытекает из предыдущих рассуждений только лишь при γ_k, близком к α_k, однако во многих практически важных случаях γ_k, можно взять достаточно далеким от $\alpha_k + \Delta\alpha$, а если область, ограниченная поверхностью S, является замкнутой, то может оказаться, что любые допустимые перемещения жидкости не пресекают некоторого уровня $W = \gamma_k$, причем значение γ_k зависит лишь от радиуса сферы $r^2 = H$. Уровень γ_k, как увидим ниже, будет играть существенную роль при суждениях об устойчивости.

2. Предположим теперь, что при данных $q_i^!$ жидкость целиком заполняет область $D_k''(\Delta\alpha, q_i)$. Нетрудно заметить, что потенциальная энергия этого жидкого объема имеет минимум по отношению ко всем возможным при данных q_i положениям жидкости, не выходящим за пределы области $C_k(\Delta\alpha, \gamma_k, q_i)$. Действительно, при переносе любой частицы жидкости за поверхность $W = \alpha_k + \Delta\alpha$ она попадает в область $C_k(\Delta\alpha, \gamma_k, q_i)$, и, следовательно, ее потенциальная энергия увеличится. Положение жидкости, занимающей целиком область $D_k''(\Delta\alpha, q_i^!)$, будет возможным, если объем V_k'' этой области будет равен объему V_k, т. е. будет выполняться условие несжимаемости.

Займемся определением $\Delta\alpha$ такого, при котором это условие выполняется.

Если «заморозить» жидкость в положении равновесия, а затем отклонить «замороженную» систему, то уравнение «замороженной поверхности при любом положении тела будет $W(x', y', z') = \alpha_k$, где O, x', y', z' — система прямоугольных координат, связанная с твердым телом и совпадающая с неподвижной системой O, x, y, z в положении равновесия. Эту поверхность и в дальнейшем будем именовать замороженной поверхностью, ее границу обозначать через M_k', а область, занимаемую замороженной жидкостью, обозначим D_k'.

Через $E_k(\Delta\alpha, q_i)$ обозначим «разность» областей $D_k''(\Delta\alpha, q_i)$ и D_k', т. е. совокупность точек, принадлежащих D_k' и не принадлежащих $D_k''(\Delta\alpha, q_i)$, составляющих область F_k, и точек, принадлежащих D_k'' и не принадлежащих D_k' и составляющих область G_k.

Как это показано выше, область F_k состоит из точек

$$W(x', y', z') < \alpha_k, \qquad W(x, y, z) > \alpha_k + \Delta\alpha, \quad \text{внутри } S$$

а область G_k из точек

$$W(x', y', z') > \alpha_k, \qquad W(x, y, z) < \alpha_k + \Delta\alpha, \quad \text{внутри } S$$

Область E_k является «суммой» областей G_k и F_k.

Допустим теперь, что существует замена переменных, взаимно однозначная и непрерывно дифференцируемая

$$x = x(\xi, \eta, \zeta), \qquad y = y(\xi, \eta, \zeta), \qquad z = z(\xi, \eta, \zeta)$$

в некоторой окрестности свободной поверхности $W = \alpha_k$ и что в этой окрестности якобиан преобразования

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} > \varepsilon > 0$$

Допустим также, что $\partial W/\partial\zeta$ заключена в пределах $0 < a < \partial W/\partial\zeta < b$ в этой же окрестности и непрерывна, и следовательно, $1/a > \partial\zeta/\partial W > 1/b > 0$ в той же окрестности. Последние два ограничения не являются существенными, а вводятся для некоторого упрощения доказательства.

Условие сохранения объема имеет вид

$$\delta V_k = \int\limits_{D_k''} d\tau - \int\limits_{D_k'} d\tau = \int\limits_{G_k} d\tau - \int\limits_{F_k} d\tau = 0 \tag{2.1}$$

Пусть ξ', η', ζ' — криволинейные координаты, неподвижно связанные с твердым телом и переходящие в ξ, η, ζ в положении равновесия, и пусть при пробегании участка замороженной поверхности, ограниченного замкнутой кривой M_{kj}', принадлежащей границе M'_k, координаты ξ', η' изменяются в области P_{kj}.

Пусть при переходе к координатам ξ', η', ζ' функция $W(x', y', z')$ переходит в функцию $W'(\xi', \eta', \zeta')$, а функция $W(x, y, z)$ в функцию

$$W''(\xi', \eta', q_i) = W'(\xi', \eta', \zeta') + \sum_i \frac{\partial W''}{\partial q_i} q_i + O(r)$$

где $O(r)$ — малая величина порядка более высокого, чем r. Пусть при движении точки вдоль поверхностей $W'' = \alpha_k + \Delta\alpha$, $W' = \alpha_k$ переменная ζ меняется согласно уравнениям $\zeta' = \Psi(\xi', \eta', \alpha_k + \Delta\alpha, q_i)$, $\zeta' = \Psi(\xi', \eta', \alpha_k, 0) = \Psi^\circ$ соответственно, причем их правые части однозначны, непрерывны по всем аргументам и дифференцируемы по α.

Условие сохранения объема (2.1) можно представить в виде

$$\delta V_k = \sum_j \iint\limits_{P_{kj}} d\xi' d\eta' \int\limits_{\Psi^\circ}^{\Psi} J\, d\zeta' + O(r') \qquad \left(r'^2 = \sum q_i^2 + \Delta\alpha^2\right) \tag{2.2}$$

Здесь $O(r')$ представляет алгебраическую сумму объемов, примыкающих к M_{kj}' и ограниченных следующими поверхностями: цилиндром $\xi' = \xi_0'(t)$, $\eta' = \eta'_0(t)$, проходящим через кривую M_{kj}', поверхностью S и поверхностью $\zeta' = \Psi$, причем знак плюс эти объемы будут иметь в том случае, если они принадлежат области G_k или находятся вне области F_k, и знак минус в противоположном случае. Сечение любой такой области плоскостью R, перпендикулярной к контуру M_{kj}' в точке T_k, будет представлять собой криволинейный треугольник T_kAB со стороной T_kA, лежащей на цилиндре, стороной T_kB, лежащей на поверхности полости, и стороной AB, лежащей на поверхности $\zeta' = \Psi$ $(W(x, y, z) = \alpha_k + \Delta\alpha)$. Высота этого треугольника, опущенная из T_k, будет исчезать вместе с $\Delta\alpha$. Угол $B \to \theta$ при $r' \to 0$ и, следовательно, согласно условию, при r' достаточно малых этот угол лежит в пределах $\pi > \theta_1 > B > \theta_0 > 0$.

Угол A при $r' \to 0$ стремится к углу AT_kL, где T_kL — линия пересечения плоскости R и замороженной поверхности. Нетрудно заметить, что это угол тоже лежит в аналогичных пределах. Действительно на замороженной поверхности $1/a > \partial\zeta'/\partial W' > 1/b$, так как очевидно, что $\partial\zeta/\partial W$ на свободной поверхности равновесия совпадает с $\partial\zeta'/\partial W'$ на замороженной поверхности. Это значит, что угол φ между кривой $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$, направленной в сторону $\alpha > \alpha_k$, и замороженной поверхностью во всех точках превосходит некоторый предел $\varphi_0 > 0$. Из непрерывности $\partial\zeta'/\partial W'$ вытекает, что и угол AT_kL лежит в пределах $\pi > \varphi_1 > \angle AT_kL > \varphi_2 > 0$. Высказанные выше соображения показывают, что площадь треугольника T_kAB имеет порядок r'^2 и такой же порядок будет иметь алгебраическая сумма объемов рассматриваемых областей.

Вводя вместо ζ переменную $\mu = W'' - \alpha_k$, перепишем равенства (2.2):

$$\delta V_k = \sum_j \iint_{P_{kj}} d\xi' d\eta' \int_{\Delta\alpha}^{v_k} J \frac{\partial \zeta'}{\partial W''} d\mu + O(r') = 0 \qquad \left(v_k = \sum_j \frac{\partial W''^\circ}{\partial q_i} q_i + O(r)\right) \tag{2.3}$$

где частные производные $\partial W''^\circ / \partial q_i$ вычислены на замороженной поверхности $\varphi' = \Psi^\circ$. Замечая, что

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial W''} = \frac{\partial \zeta'^\circ}{\partial W''} + O(r' + |\mu|), \qquad J = J^\circ + O(r' + |\mu|)$$

перепишем (2.3) в виде

$$\delta V_k = \Delta\alpha \sum_j \iint_{P_{kj}} J^\circ \frac{\partial \zeta'^\circ}{\partial W''} d\xi' d\eta' - \sum_j \iint_{P_{kj}} J^\circ \frac{\partial \zeta'^\circ}{\partial W''} \sum_i \frac{\partial W''}{\partial q_i} q_i d\xi' d\eta' + O(r') =$$

$$= \nu_k \Delta\alpha - \sum_i \lambda_{kj} q_i + O(r') = 0$$

Так как $\nu_k > 0$, то это уравнение имеет единственное решение

$$\Delta\alpha_k = \frac{1}{\nu_k} \sum_j \lambda_{ki} q_i + O(r') \tag{2.4}$$

Итак, для каждого k существует $\Delta\alpha_k(q_i)$ такое, что при любых $r \leqslant H$, допустимое положение жидкости, целиком занимающей области $D_k''(\Delta\alpha_k, q_i)$, реализует минимум потенциальной энергии жидкости по сравнению со всеми ее возможными положениями внутри области $C_k + D_k''$.

3. Потенциальная энергия системы будет иметь в этом смысле минимум в положении равновесия, если будет иметь минимум функция

$$U_{\min} = U'(q_i) + \sigma \sum \int_{D_k''} W\, d\tau$$

зависящая только от q_i. Ее можно представить в виде

$$U_{\min} = U' + \sigma \sum_k \int_{D_k'} W\, d\tau + \left[\sigma \sum_k \int_{D_k''} W\, d\tau - \sigma \sum_k \int_{D_k'} W\, d\tau\right]$$

Сумму первых двух слагаемых, представляющую потенциальную энергию замороженной системы, обозначим через U_1, а разность, стоящую в квадратных скобках, через U_2. Заметим, что согласно изложенному U_2 никогда не будет положительной. Вторую вариацию U_1 можно найти обычным путем, и поэтому займемся вычислением U_2; имеем

$$U_2 = \sum_k U_{2k}$$

$$U_{2k} = \sigma \int_{D_k''} W\, d\tau - \sigma \int_{D_k'} W\, d\tau = \sigma \int_{G_k} (\alpha_k + \mu)\, d\tau - \sigma \int_{F_k} (\alpha_k + \mu)\, d\tau =$$

$$= \sigma \int_{G_k} \mu\, d\tau - \sigma \int_{F_k} \mu\, d\tau \tag{3.1}$$

Последнее равенство написано на основании условия сохранения объема (2.1). Преобразуя далее аналогично § 2, получаем

$$U_{2k} = \sigma \sum_j \iint\limits_{P_{kj}} d\xi' d\eta' \int\limits_{v_k}^{\Delta\alpha_k} \mu J \frac{\partial \zeta'}{\partial W''} d\mu - O(r'^2) =$$

$$= \frac{\sigma}{2} \sum_j \iint\limits_{P_{kj}} (\Delta\alpha_k{}^2 - v_k{}^2) J^\circ \frac{\partial \zeta'^\circ}{\partial W''} d\xi' d\eta' + O(r^2) =$$

$$= \frac{\sigma}{2\nu_k} \Big(\sum_i \lambda_j q_i\Big)^2 - \frac{\sigma}{2} \sum_j \iint\limits_{P_{kj}} \Big(\sum_j \frac{\partial W''^\circ}{\partial q_i} q_i\Big)^2 J^\circ \frac{\partial \zeta'^\circ}{\partial W''} d\xi' d\eta' + O(r^2)$$

Применяя известное неравенство

$$\int f^2 d\tau \geqslant \Big(\int f d\tau\Big)^2$$

можно убедиться, что указанная сумма членов второго порядка не может принимать положительных значений. Может, однако, случиться так, что U_1 зависит не от всех координат. Пусть, например, $U_1(q_1)$ зависит только от одной координаты и пусть W'' имеет вид

$$W'' = W'(\xi', \eta', \zeta') + \frac{\partial W''(\xi', \eta', \zeta', 0, q_2 \ldots)}{\partial q_1} q_1 + O(q_1)$$

причем $O(q_1) / q_1 \to 0$ при $q_1 \to 0$ равномерно при всех ξ', η', ζ' в окрестности замороженной поверхности и всех допустимых q_2, q_3, … . Тогда, повторяя рассуждения по прежней схеме, получим

$$U_{2k} = \frac{\sigma}{2\nu} \lambda_1{}^2 (q_2, \ldots) q_1{}^2 - \frac{\sigma}{2} \sum_j \iint\limits_{P_{kj}} \Big(\frac{\partial W''^\circ(0, q_2, \ldots)}{\partial q_1}\Big)^2 q_1{}^2 d\xi' d\eta' + O(r'^2) =$$

$$= \frac{\sigma}{2} N(q_2, q_3 \ldots) q_1{}^2$$

Если окажется, что

$$\Big(\frac{\partial^2 U_1}{\partial q_1{}^2}\Big)^\circ + \frac{\sigma}{2} N(q_2, q_3 \ldots) > 0$$

при любых q_2, q_3 … , то потенциальная энергия системы будет иметь минимум по отношению q_1 и к любым возмущениям жидкости, не пересекающим поверхности $W = \gamma_k$. Этот случай встретится в задаче об устойчивости равновесия маятника, наполненного тяжелой жидкостью.

Необходимо отметить также следующее обстоятельство. Все выписанные двойные интегралы зависят только от формы свободной поверхности в положении равновесия, т. е. вида функции W и от формы кривой M_k, по которой свободная поверхность пересекается со стенкой полости, и не зависят от формы поверхности полости в окрестности этой кривой. Это значит, что вторая вариация потенциальной энергии системы не будет меняться, если будет меняться форма полости, так что потенциальная энергия замороженной системы и кривая M_k останутся прежними. Вторая вариация потенциальной энергии зависит лишь от объемных и поверхностных интегралов, поэтому она не изменит знака, если полость S заменить полостью S', если только объем фигуры, состоящей из точек S', не принадлежащих S, и объем, состоящий из точек S, не принадлежащих S', будут достаточно малы, и все области $D_k{}^0$ перейдут непрерывно в односвязные области. То же самое можно утверждать, если мало изменить объем жидкости V_k и стеснить поверхность полости тем ограничением, что «проекция» границы M_k на «плоскость» $\zeta = \zeta_0$ изменится достаточно мало, т. е. мало изменится площадь, ограниченная старой и новой проекциями. Это значит, что если по знаку второй вариации удастся сделать некоторые суждения об устойчивости, то они будут справедливыми при малых в указанном смысле изменениях формы полости и количества жидкости.

4. Следуя А. М. Ляпунову [8], введем следующие определения. Предположим, что жидкости, принадлежащей некоторой области D_k° в положении равновесия, сообщается возмущение, и рассмотрим поверхность жидкости в какой-либо момент ее возмущенного движения. Из какой-либо точки этой поверхности вообразим пучок прямых, соединяющей ее со всеми точками поверхности равновесия объема V_k, и из отрезков этих прямых между взятой точкой поверхности жидкости и поверхности равновесия выберем наименьший. Под поверхностью равновесия будем разуметь свободную поверхность и стенки полости, смоченные жидкостью. Рассматривая все точки возмущенной поверхности жидкости, выберем наибольший из этих отрезков. Эту положительную величину будем обозначать через N и называть удалением поверхности жидкости от поверхности равновесия.

Пусть V_k по-прежнему есть объем жидкости и q_k — объем, все точки которого принадлежат сразу обоим пространствам, ограниченным поверхностью жидкости и поверхностью равновесия. Разность $V_k - q_k$ назовем уклонением формы жидкости от формы равновесия и будем обозначать через Δ. Если рассматривать всевозможные поверхности жидкости, удаления которых от поверхности равновесия равны данной величине N, то очевидно, что для этих поверхностей Δ может иметь все значения, заключающиеся между нулем и некоторым пределом, зависящим от N, который при $N = 0$ обращается в нуль. Всякую однозначную и непрерывную функцию от N, получающую только такие значения, какие при том же N может получать Δ, и обращующуюся в нуль только при $N = 0$, будем называть возможным уклонением и обозначать через $\varphi(N)$. Предположим также, что движение жидкости таково, что N и Δ являются непрерывными функциями времени t.

Определение. Сообщим системе какие-либо перемещения и скорости и рассмотрим последующее возмущенное движение. Если $\Sigma q_{i0}^2 = r_0^2$, начальное удаление N_0 от поверхности равновесия и начальная величина живой силы T_0 при всяких возможных остальных начальных данных могут быть выбраны настолько малыми, чтобы r, удаление N поверхности жидкости от поверхности равновесия и живая сила T оставались меньше некоторых наперед данных пределов, как бы последние малы ни были во все время движения или по крайней мере до тех пор, пока уклонение формы жидкости от формы равновесия не делается меньшим некоторого наперед данного возможного уклонения, как бы все значения последнего малы ни были, то рассматриваемое равновесие устойчиво.

Всевозможные начальные данные должны быть стеснены тем ограничением, что при них должны быть непрерывными N и Δ в течение всего движения как функции t.

Для нашей задачи будет, однако, удобнее рассматривать удаление и уклонение возмущенной поверхности не от поверхности равновесия, а от границы области D_k''.

Рассмотрим теперь область $C_k(\gamma_k, \Delta\alpha_k, q_i)$

$$W \leqslant \gamma_k, \qquad W \geqslant \alpha_k + \Delta\alpha_k \quad \text{внутри } S$$

и рассмотрим n_1 — минимальное удаление точки на поверхности $W = \gamma_k$

от границы области D''. Изменяя r в пределах $r^2 \leqslant H^2$, где $H > 0$ — некая малая постоянная, найдем N_k — минимальное из значений n_1. Рассмотрим какое-либо возможное уклонение $\varphi_k(N)$ и среди всевозможных положений системы, удовлетворяющих неравенством $\Delta \geqslant \varphi(N)$, $N \leqslant N_k$, $r \leqslant H$, выберем такое положение, для которого U достигает своего наименьшего возможного значения $U_{N_k} > 0$.

Выберем начальные условия так, чтобы выполнялись неравенства

$$T_0 + U_0 < U_{N_k}, \quad \Delta_0 \geqslant \varphi_k(N_0)$$

Если система сохраняет энергию или энергия подвержена диссипации, то

$$0 < U < U_{N_k} \quad \text{при } \Delta \geqslant \varphi_k(N)$$

Действительно, если U станет нулем, то перед этим N, изменяясь непрерывно, должно стать равным N_k. Это может случиться только в том случае, если перед этим нарушится неравенство $\Delta \geqslant \varphi_k(N)$, поскольку $U > 0$, для всех $\Delta \geqslant \varphi_k(N)$.

Если же неравенство $\Delta \geqslant \varphi_k(N)$ не нарушится, то не нарушится и неравенство $0 < U < U_{N_k}$.

При выполнении последнего неравенства будут выполняться и неравенства

$$N < N_k, \quad r \leqslant H, T < U_{N_k}$$

Итак, приходим к выводу, что для того чтобы система была устойчива в указанном выше смысле, достаточно, чтобы $U_{\min}$ была знакоопределенной положительной функцией q_i. Это доказательство, с отличиями в некоторых деталях, проведено В. В. Румянцевым [9].

До сих пор речь шла о полости с одним односвязным объемом $D_k°$. Если таких объемов несколько, то, разумея под всеми введенными величинами, имеющими индекс k, величины, относящейся к k-му односвязному объему, а под T — кинетическую энергию системы и, вводя аналогичные определения, получим аналогичные следствия.

Продолжим рассмотрение, считая $D_k°$ единственным односвязным объемом.

Если полость и функция W таковы, что область, лежащая внутри полости и вне области D_k'', в которую может попасть жидкая частица из области D_k'', не пересекая стенки полости, не содержит точек $W < \alpha_k + \Delta\alpha_k$, то расположение жидкости, целиком занимающей область D_k'', реализует минимум потенциальной энергии жидкости при данных q_i по отношению ко всем допустимым удалениям возмущенной поверхности. В этом случае относительно устойчивости жидкости можно высказать более определенное суждение. Это определение ввел также А. М. Ляпунов [8]. Однако он не пользовался этим определением, так как при использовании одного только интеграла энергии устойчивость в смысле этого определения могла быть доказана только для одной из рассмотренных им задач — задачи об устойчивости сферической формы равновесия гравитирующей жидкой массы.

Определение. Если по любым положительным U, σ', δ, меньшим некоторых пределов, могут быть указаны такие пределы U_0, σ'_0, δ_0, что при любых начальных значениях r_0, живой силы T_0 и уклонения Δ_0, стесненных неравенствами

$$r_0 < H_0, \qquad T_0 < \sigma'_0, \qquad \Delta_0 < \delta_0$$

во все время движения будут выполняться неравенства

$$r < H, \qquad T < \sigma', \qquad \Delta < \delta$$

то равновесие системы устойчиво. Эту устойчивость будем называть устойчивостью по отношению к уклонению, r и T.

Пусть $\overset{\circ}{U}_{\min}$ есть минимальное значение $U_{\min}$ на сфере $r = H$ и пусть $\delta_k > 0$ такая постоянная, что при $\Delta > \delta_k$, $r \leqslant H$, выполняется неравенство $U > \overset{\circ}{U}_{\min}$.

Если система сохраняет энергию или энергия подвержена диссипации и если T_0, r_0 и Δ_0 выбрать столь малыми, чтобы выполнялось неравенство

$$T_0 + U_0 < \overset{\circ}{U}_{\min}$$

то во все время движения будут выполняться неравенства

$$0 < U < \overset{\circ}{U}_{\min}, \qquad T < \overset{\circ}{U}_{\min}$$

и неравенства, являющиеся их следствием,

$$r < H, \qquad T < \overset{\circ}{U}_{\min}, \qquad \Delta < \delta_k$$

Это значит, что, если полость и функция W таковы, что расположение жидкости, целиком занимающей область D_k, реализует минимум потенциальной энергии жидкости по отношению ко всем возможным удалениям жидкой поверхности, и если $U_{\min}$ будет знакоопределенной положительной функцией q_i, то положение равновесия системы будет устойчиво по отношению к r, T, Δ.

Если полость имеет несколько односвязных объемов $D_k{}^\circ$ и они не сообщаются между собой, т. е. частица не может попасть из одного объема в другой, не пересекая стенку полости, то определения и выводы аналогичны.

Пусть тело в положении равновесия имеет две односвязные области $D_1{}^\circ$, $D_2{}^\circ$, отвечающие одному и тому же значению $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$, и пусть полость такова, что жидкость может быть переведена внутри полости из одного объема в другой.

Рассмотрим возможное расположение жидкости, отвечающее неким значениям q_i, целиком занимающее области $D_1{}''$ и $D_2{}''$, ограниченные «сверху» поверхностью $\alpha + \Delta\alpha$ одной и той же для обеих областей, причем эта поверхность получена из условия сохранения суммы объемов $V_1 + V_2$. Если пустая часть полости не содержит точек $W < \alpha + \Delta\alpha$, то такое расположение жидкости будет реализовать минимум ее потенциальной энергии по отношению к любым перемещениям жидких частиц, возможных при данных q_i, и условие знакоопределенности функции $U_{\min}$ будет достаточным условием устойчивости по отношению к r, T, Δ.

Так мы пользуемся условием сохранения суммы объемов, нетрудно заметить, что условия определенной положительности $U_{\min}$ получатся такими же, какими они были бы, если бы области $D_1{}^\circ$ и $D_2{}^\circ$ были соединены бесконечно тонким каналом, целиком лежащим «под» поверхностью $W = \alpha$, т. е. решали бы задачу с односвязным объемом.

5. *Пример 1.* Задача Л. Н. Сретенского[1]. Рассмотрим некоторое обобщение задачи Л. Н. Сретенского. Пусть связи, наложенные на тело, таковы, что они допускают лишь поступательные перемещения тела из положения равновесия, и пусть полость его заполнена тяжелой жидкостью. Если потенциальная энергия замороженной системы имеет минимум в положении равновесия, то равновесие будет устойчиво. Действительно, при любых фиксированных перемещениях тела минимум потенциальной энергии жидкости будет достигнут в том случае, если поверхность жидкости останется горизонтальной и неподвижной по отношению к телу. Следовательно, в этом случае $U_2 \equiv 0$ и U будет всегда положительна, если положительной окажется U_1. Нетрудно также заметить, что если полость закрыта горизонтальной крышкой, стенки полости вертикальны, а жидкость занимает один односвязный объем, то из определенной положительности U_1 будет следовать устойчивость по отношению к уклонению, r, T.

Пример 2. Пространственный маятник с жидкостью.

Рассмотрим тяжелое твердое тело с закрепленной точкой O и полостью, наполненной тяжелой жидкостью. Неподвижную ось z направим вверх. В качестве обобщенных координат возьмем φ', ψ', θ' — эйлеровы углы. Через $-l\ (l>0)$ обозначим координату центра тяжести замороженной системы в положении равновесия, а через M — ее массу. В качестве параметров ξ', η', ζ' здесь удобно взять x', y', z' — координаты в подвижной системе; для случая тяжелой жидкости

$$W = gz = g\,[z'\cos\theta' + \sin\theta'\,(x'\sin\varphi' + y'\cos\varphi')],\ \left.\frac{\partial W''}{\partial\theta'}\right|_{\theta'=0} = g\,(x'\sin\varphi' + y'\cos\varphi')$$

$$2\delta^2 U_2 = -\theta'^2\,(J' - md^2) = -a\,(\varphi)\,\theta'^2, \qquad J' = \sigma g \iint\limits_P (x'\sin\varphi' + y'\cos\varphi')^2\,dx'\,dy'$$

$$-md^2 = -\sigma g\,\frac{\lambda^2}{\nu}, \qquad \lambda = \iint\limits_P (x'\sin\varphi' + y'\cos\varphi')\,dx'\,dy', \qquad \nu = \iint\limits_P dx'\,dy'$$

Поясним введенные здесь обозначения: P — площадка, состоящая из точек замороженной поверхности; J' — момент инерции площадки P относительно оси $x'\sin\varphi' + y'\cos\varphi' = 0$ в предположении, что единица ее площади имеет массу σg; $\sigma g\lambda$—статический момент площадки относительно той же оси; ν — площадь площадки; m — масса площадки, d— расстояние от центра тяжести площадки до оси $x'\sin\varphi' + y'\cos\varphi' = 0$, $a\,(\varphi)$ — центральный момент инерции этой же площадки.

Пусть Ag есть максимальное значение a (φ), тогда равновесие системы будет устойчиво, если

$$l - \frac{A}{M} > 0$$

Если полость представляет собой замкнутый цилиндр с образующими параллельными оси z, то будет иметь место устойчивость по отношению θ, T, δ. Для полости, имеющей прямоугольную площадку P, симметричную относительно проекции на нее оси y', этот результат получен Н. Н. Моисеевым [7].

Пример 3. Устойчивость маятника с жидким наполнением в поле сил тяжести и центробежных. Рассмотрим правую прямоугольную систему x,y,z с началом в неподвижной точке O и вертикальной осью z, направленной вверх, вращающуюся вокруг оси z с постоянной угловой скоростью ω, и твердое тяжелое тело, могущее вращаться вокруг оси y, по отношению к системе x,y,z. В дальнейшем под движением будем подразумевать движение по отношению к этой системе. Полость тела предположим заполненной однородной несжимаемой тяжелой жидкостью. Тело и жидкость будут находиться в равновесии, если центр тяжести системы будет находиться на оси z на расстоянии l вниз от точки подвеса, а ось будет главной осью инерции системы для точки O. Свободная поверхность жидкости будет иметь форму параболоида

$$\frac{W}{g} = z - \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2) = z - \beta\,(x^2 + y^2) = -\alpha$$

Предположим, что полость имеет форму поверхности вращения S вокруг оси z и пересекается с параболоидом по двум окружностям, лежащим в плоскостях

$z=-h$ и $z=-h-H$ с центрами на оси z и радиусами d_1 и d_2 соответственно:

$$d_1>d_2, \qquad d_1^2\beta=\alpha-h, \qquad d_2^2\beta=\alpha-h-H$$

Напомним также, что нормали к поверхностям $W/g=-\alpha$ и S на линиях пересечения образуют ненулевой угол.

Если O, x', y', z' — подвижная система координат, связанная с твердым телом и совпадающая с O, x, y, z в положении равновесия, а θ' — угол отклонения оси z' от оси z, то формулы преобразования координат будут иметь вид

$$x=x'\cos\theta'-z'\sin\theta', \qquad y=y', \qquad z=x'\sin\theta'+z'\cos\theta'$$

Функция в W/g в этих переменных запишется в форме

$$\frac{W}{g}=-z'^2\beta\sin^2\theta'+(\cos\theta'+\beta x'\sin 2\theta')\,z'-\beta x'^2\cos^2\theta'-\beta y'^2+x'\sin\theta'$$

$$\frac{1}{g}\frac{\partial W}{\partial\theta'}=-z'^2\beta\sin 2\theta'+(-\sin\theta'+2\beta x'\cos 2\theta)\,z'-\beta x'^2\sin 2\theta+x'\cos\theta'$$

Полагая $\theta'=0$, получаем

$$\frac{1}{g}\frac{\partial W}{\partial\theta'}\bigg|_{\theta'=0}=2\beta x'z'+x'$$

На замороженной поверхности $W/g=z'-\beta(x'^2+y'^2)=-\alpha$, поэтому

$$\frac{1}{g}\frac{\partial W''^\circ}{\partial\theta'}=x'+2\beta x'[\beta(x'^2+y'^2)-\alpha]$$

В подвижных цилиндрических координатах z', $x'=\rho\cos\Psi$, $y'=\rho\sin\Psi$ имеем

$$\frac{1}{g}\frac{\partial W''^\circ}{\partial\theta'}=\rho\cos\Psi+2\beta\rho\cos\Psi\,(\beta\rho^2-\alpha)$$

Область интегрирования на плоскости z' ограничена окружностями $\rho=d_1$ и $\rho=d_2$ $(d_1>d_2)$. Для вычисления δ^2U_2, как это показано выше, нужно вычислить:

$$\lambda=\int\limits_{d_2}^{d_1}\rho d\rho\int\limits_0^{2\pi}d\Psi\frac{\partial W''^\circ}{\partial\theta'}=0 \tag{4.1}$$

$$-\delta^2U_2=\frac{\sigma g\theta'^2}{2}\int\limits_{d_2}^{d_1}\rho d\rho\int\limits_0^{2\pi}d\Psi\,[\rho\cos\Psi+2\beta\rho\cos\Psi\,(\beta\rho^2-\alpha)]^2=$$

$$=\frac{\pi\sigma g\theta'^2}{2}\int\limits_{d_2}^{d_1}[(1-2\alpha\beta)\,\rho+2\beta^2\rho^3]^2\rho d\rho=$$

$$=\frac{\pi\sigma g\theta'^2}{2}\left[\frac{(1-2\alpha\beta)^2(d_1^4-d_2^4)}{4}+\frac{2\beta^2(1-2\alpha\beta)(d_1^6-d_2^6)}{3}+\frac{\beta^4(d_1^8-d_2^8)}{2}\right]$$

Предположим теперь, что тело однородно и симметрично относительно оси z' и полость представляет собой круглый цилиндр с осью z', радиусом R и высотой H, со стенками $z'=-h$, $z'=-h-H$. Пусть объем жидкости в этом цилиндре равен εV, где $V=\pi R^2H$ — объем цилиндра, а ε — коэффициент наполнения.

Пусть тело увеличивает угловую скорость ω, начиная от нуля. Параболоид вначале будет пересекаться с боковой поверхностью цилиндра, затем в зависимости от ε, R, H может пересекаться с боковой поверхностью и нижней стенкой или с одной верхней стенкой, а затем при ω достаточно большой будет пересекаться с верхней и нижней стенками. Рассмотрим последний случай, для которого

$$\beta R^2+h>\alpha>h+H$$

Пусть $\alpha_1=\alpha-h-H$ — расстояние от вершины параболоида до нижней стенки цилиндра, тогда предыдущее неравенство примет вид $\beta R^2-H>\alpha_1>0$. Из условия постоянства объема жидкости найдем

$$\alpha_1=\beta R^2(1-\varepsilon)-\frac{H}{2} \tag{4.2}$$

Это справедливо, если β больше наибольшего из чисел $H/2R^2\varepsilon$ и $H/2R^2(1-\varepsilon)$.

При этих условиях формула (4.1) упрощается

$$\delta^2 U_2 = -\frac{\pi\sigma g \theta'^2}{2} \int\limits_{d_2}^{d_1} \rho^2 [1 + 2\beta(\beta\rho^2 - \alpha)]^2 \rho d\rho = -\frac{\pi\sigma g \theta'^2}{16\beta^4} \int\limits_{1-2\beta(H+h)}^{1-2\beta h} [U - (1 - 2\alpha\beta)]\, u^2 du$$

$$u = 1 + 2\beta(\beta\rho^2 - \alpha)$$

Обозначая $h_1 = h + H/2$, интегрируя и используя (4.2), получаем

$$\delta^2 U_2 = -\theta'^2 \pi\sigma g H \left[\frac{H^2}{12\beta} - \frac{h_1 H^2}{6} + \frac{R^2(1-\varepsilon)}{4\beta} - R^2(1-\varepsilon) h_1 + {} \right.$$
$$\left. + R^2(1-\varepsilon) h_1^2 \beta + \frac{R^2(1-\varepsilon)\beta H^2}{12}\right] \qquad (4.3)$$

Потенциальная энергия замороженной системы

$$U_1 = (m_1 l_1 + m_2 l_2) g (1 - \cos\theta') - (B + B_1 - J_z)\beta g$$

$$J_z = (B + B_1)\cos^2\theta' + (C + C_1)\sin^2\theta'$$

$$g m_2 l_2 = 6\pi g H \left[R^2 \varepsilon h_1 + \frac{H^2}{12\beta}\right], \qquad B_1 = \sigma\pi H \left[\frac{R^4(2\varepsilon - \varepsilon^2)}{2} - \frac{H^2}{24\beta^2}\right]$$

$$C_1 = \sigma\pi H \left[\frac{R^4(2\varepsilon - \varepsilon^2)}{4} - \frac{H^2}{48\beta^2} + R^2\varepsilon h_1^2 + \frac{h_1 H^2}{6\beta} + \frac{R^2 \varepsilon H^2}{12}\right]$$

Здесь m_1, m_2 — массы тела и жидкости, l_1, l_2 — расстояния центров тяжести тела и замороженной жидкости до точки подвеса, B_1, B_2 — моменты инерции тела и замороженной жидкости вокруг оси z, C, C_1 — моменты инерции тела и замороженной жидкости вокруг оси y'. Для второй вариации U_1 получим

$$\delta^2 U_1 = \left[\frac{m_1 l_1 g}{2} + (B - C)\beta g\right]\theta'^2 + \sigma\pi g H \left[\frac{R^2 \varepsilon h_1}{2} + \frac{H^2}{24\beta} + \frac{\beta R^4 (2\varepsilon - \varepsilon^2)}{4} - {} \right.$$
$$\left. - \frac{H^2}{48\beta} - R^2 \varepsilon h_1^2 \beta - \frac{h_1 H^2}{6} - \frac{R^2 \varepsilon H^2 \beta}{12}\right]\theta'^2 \qquad (4.4)$$

В итоге получаем

$$\delta^2 U_{\min} = \delta^2 U_1 + \delta^2 U_2 = \frac{1}{2}(m_1 l_1 g + (B - C)\omega^2)\theta'^2 +$$
$$+ \frac{m_2}{\varepsilon}\left[\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) h_1 g + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{R^2(2\varepsilon - \varepsilon^2)}{4} - h_1^2 - \frac{H^2}{12}\right) - \frac{(1-\varepsilon) g^2}{2\omega^2}\right]\theta'^2$$

Для того чтобы с ростом ω условия определенной положительности $\delta^2 U$ не нарушались, достаточно, чтобы

$$B - C + \frac{m_2}{\varepsilon}\left(\frac{R^2(2\varepsilon - \varepsilon^2)}{4} - h_1^2 - \frac{H^2}{12}\right) > 0$$

Нетрудно заметить, что в данном случае определенная положительность $\delta^2 U$ гарантирует устойчивость по отношению к θ', T, Δ.

Поступила 25 IV 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. Колебание жидкости в подвижном сосуде. Изв. АН СССР, ОТН, 1951 № 10.
2. Моисеев Н. Н. Движение тела, имеющего полости, частично заполненные идеальной капельной жидкостью. ДАН СССР, 1952, т. XX, вып. 4.
3. Моисеев Н. Н. Задача о движении твердого тела, содержащего жидкие массы, имеющие свободную поверхность. Матем. сб., 1953, т. XXXII (74), вып. 1.
4. Нариманов Г. С. О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью. ПММ, 1956, т. XX, вып. 1.
5. Охоцимский Д. Е. К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью. ПММ, 1956, т. XX, вып. 1.
6. Крейн С. Г., Моисеев Н. Н. О колебаниях твердого тела, содержащего жидкость со свободной поверхностью. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 2.
7. Моисеев Н. Н. О двух маятниках с жидкостью. ПММ, 1952, т. XX, вып. 6.
8. Ляпунов А. М. Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости. Собр. соч., т. III, Изд-во АН СССР.
9. Румянцев В. В. Об устойчивости равновесия твердого тела, имеющего полости, наполненные жидкостью. ДАН СССР, 1959, т. 124, № 2.