

РАСЧЕТ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ БАЛОК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

А. Ф. Раков (Бердянск)

Излагается приближенное решение задачи о расчете системы параллельных бесконечных балок, лежащих на упругом полупространстве. Предварительно рассматривается пространственная контактная задача теории упругости для полупространства, когда область контакта имеет форму системы параллельных между собой полос. Исследуется взаимное влияние штампов-полос системы в зависимости от величины интервала между ними и формы их оснований; находятся условия, при которых этим влиянием можно пренебречь, т. е. когда к штампам системы применимы существующие теории расчета. Аналогичные исследования проведены для систем балок.

Работа представляет собой обобщение известных результатов в области теории расчета балок на упругом полупространстве, принадлежащих, главным образом, М. И. Горбунову-Посадову [1], Г. Э. Проктору¹, Кузнецову [2] и В. Л. Рвачеву [3-4].

§ 1. Известно, что смешанная задача теории упругости для полупространства, на которое давит штамп, при отсутствии между ними сил трения, приводится к решению интегрального уравнения

$$w(x, y, 0) = - \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0} \int_S \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \quad (1.1)$$

где ν_0 и E_0 — упругие постоянные полупространства, s — область контакта, $w(x, y, 0)$ — осадка точек границы полупространства в области контакта, $p(x, y)$ — давление под штампом. Если область контакта определяется неравенствами

$$\alpha_i \leq x \leq \beta_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad -\infty < y < +\infty \quad (1.2)$$

то, как это можно показать, для системы штампов, поверхности которых после вдавливания имеют уравнения

$$z = w_i(x, y, 0) = b_i(\lambda) \cos \lambda y \quad (1.3)$$

где λ — произвольное число, а $b_i(\lambda) = \text{const}$, давление можно определить так:

$$p(x, y) = \psi_i(\lambda, x) \cos \lambda y \quad (1.4)$$

где $\psi_i(\lambda, x)$ закон распределения давления под i -ым штампом по его ширине. Соответствующими преобразованиями устанавливается, что задача решения уравнения (1.1) при наличии условий (1.2), (1.3), (1.4) приводится к отысканию в плоскости xoz некоторой функции $\Psi(\lambda, x, z)$, которая всюду в этой плоскости, кроме разве точек отрезков $\alpha_i \leq x \leq \beta_i$, $z = 0$, удовлетворяет уравнению

$$\nabla_{x,z}^2 \Psi - \lambda^2 \Psi = 0 \quad (1.5)$$

и следующим граничным условиям:

$$\Psi(\lambda, x, 0) = b_i(\lambda), \quad \text{если } x \in [\alpha_i, \beta_i]$$

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \text{если } x \notin [\alpha_i, \beta_i] \quad (1.6)$$

$$\Psi(\lambda, x, z) \rightarrow 0, \quad \text{когда } x^2 + z^2 \rightarrow \infty$$

После отыскания функции Ψ , давление можно определить по формуле (1.4), в которой функция $\psi_i(\lambda, x)$ удовлетворяет соотношению

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{2(1 - \nu_0^2)}{\pi E_0} \psi_i(\lambda, x), \quad x \in [\alpha_i, \beta_i] \quad (1.7)$$

¹ Проктор Г. Э. Об изгибе балок, лежащих на упругом основании, без гипотезы Винклера — Циммермана. Диссертация. Краткое изложение диссертации дано в работе [2].

Для $n = 1$ функции Ψ и ψ , которые для удобства в этом случае будем обозначать соответственно через Φ и φ , известны [3] и имеют следующий вид:

$$\Phi(\lambda, x, z) = 2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i A_0^{(2i)} \text{Fek}_{2i}(\xi, -q)}{\text{Fek}_{2i}(0, -q)} \text{ce}_{2i}(\eta, -q) \quad (1.8)$$

$$\varphi(\lambda, x) = - \frac{E_0}{(1 - \nu_0^2) \sqrt{l^2 - x^2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_{2\nu}(l\lambda) \cos 2\nu \arccos \frac{x}{l} \quad (1.9)$$

$$\delta_{2\nu}(l\lambda) = (-1)^\nu \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A_0^{(2i)} A_{2\nu}^{(2i)} \text{Fek}'_{2i}(0, -q)}{\text{Fek}_{2i}(0, -q)} \quad (1.10)$$

Здесь $2l$ — ширина штампа; $\text{ce}_{2i}(\eta, -q)$ и $\text{Fek}_{2i}(\xi, -q)$ — известные табулированные функции [5] Матье; $A_{2\nu}^{(2i)}$ — коэффициенты разложения в ряд Фурье функции $\text{ce}_{2i}(x, -q)$, $q = 1/4 l^2 \lambda^2$; переменные ξ и η связаны с x и z формулами $x = l \cos \eta \text{ch } \xi$, $z = l \sin \eta \text{sh } \xi$; кроме того, в (1.8) и (1.9) принято $b(\lambda) = 1$.

В связи с многосвязностью области контакта при $n > 1$ задача отыскания функции Ψ оказывается очень сложной. Однако, для определения характеристик, относящихся к расчету балок, достаточно располагать лишь суммарным по ширине каждого штампа давлением. В связи с этим ставим следующую задачу.

В области xoz , ограниченной контуром $L = L_1 + L_2 + \dots + L_n$, где $L_i = \beta_i - \alpha_i$ — отрезки, размещенные на оси Ox , задана формулой (1.8) функция $\Phi(\lambda, x, z)$, которая в области xoz удовлетворяет уравнению (1.5) и на одном из отрезков L_i — граничным условиям (1.6). Требуется найти функцию $\Psi(\lambda, x, z)$, которая уравнению (1.5) удовлетворяла бы в той же области xoz , а условиям (1.6) — на контуре L .

Применяя к функциям $\Phi(\lambda, x, z)$ и $\Psi(\lambda, x, z)$ известную формулу Грина, получим

$$\iint_L (\Phi \nabla_{x,z}^2 \Psi - \Psi \nabla_{x,z}^2 \Phi) ds = \int_L \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) dL \quad (1.11)$$

В силу (1.5) левая часть (1.11) равна нулю, после соответствующих преобразований и применения теоремы о среднем значении интеграла, получим

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i \int_{L_i} \frac{\partial \Psi}{\partial z} dx = \sum_{i=1}^n \int_{L_i} \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial z} dx \quad (1.12)$$

Реализуя в равенстве (1.12) для функции Φ условия (1.6) последовательно на отрезках L_1, \dots, L_n и учитывая при этом формулу (1.7), получим систему

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i^{(j)} \int_{L_i} \psi_i(\lambda, x) dx = b_j(\lambda) \int_{L_j} \varphi(\lambda, x) dx \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.13)$$

где $\Phi_i^{(j)}$ — значение функции Φ в некоторой внутренней точке отрезка L_i , которое зависит от того, на каком из отрезков L_j реализованы условия (1.6).

Можно показать, что график функции $\Phi(\lambda, x, 0)$ с возрастанием x плавно, без перегибов, асимптотически приближается к оси Ox . Учитывая это, а также условия (1.6), получаем

$$\Phi_i^{(j)} = b(\lambda) = 1 \quad (i = j), \quad \Phi(\lambda, \alpha_i, 0) > \Phi_i^{(j)} > \Phi(\lambda, \beta_i, 0) \quad (i \neq j) \quad (1.14)$$

Интегралы левой и правой частей уравнений системы (1.13) выражают суммарные по ширине штампов давления в условиях $n > 1$ и $n = 1$ соответственно; первые из этих интегралов неизвестны, вторые, исходя из (1.9), определяются формулами

$$\int_{L_j} \varphi(\lambda, x) dx = - \frac{\pi E_0}{2(1 - \nu_0^2)} \delta_0(l_j \lambda) \quad (1.15)$$

Приводим формулы суммарных давлений для некоторых частных случаев.

(1) для симметричной задачи о двух штампах

$$\int_{L_1} \psi(\lambda, x) dx = \int_{L_2} \psi(\lambda, x) dx = \frac{b_{1,2}(\lambda)}{1 + \Phi_2^{(1)}} \int_{L_1} \varphi(\lambda, x) dx \quad (1.16)$$

(2) для системы трех одинаковых штампов при одинаковых осадках (1.17)

$$\int_{L_1} \psi(\lambda, x) dx = \int_{L_3} \psi(\lambda, x) dx = \frac{b_{1,3}(\lambda)}{\Theta} \int_{L_{1,3}} \varphi(\lambda, x) dx - \frac{b_2(\lambda) \Phi_2^{(1)}}{\Theta} \int_{L_2} \varphi(\lambda, x) dx$$

$$\int_{L_2} \psi(\lambda, x) dx = \frac{(1 + \Phi_3^{(1)}) b_2(\lambda)}{\Theta} \int_{L_2} \varphi(\lambda, x) dx - \frac{2\Phi_1^{(2)} b_{1,2}(\lambda)}{\Theta} \int_{L_{1,3}} \varphi(\lambda, x) dx \quad (1.18)$$

$$\Theta = 1 + \Phi_3^{(1)} - 2\Phi_2^{(1)} \Phi_1^{(2)}$$

(3) для системы бесконечного числа одинаковых, одинаково нагруженных и размещенных с одинаковым интервалом, штампов (периодическая задача)

$$\int_{L_k} \psi(\lambda, x) dx = b(\lambda) \int_{L_j} \varphi(\lambda, x) dx / \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Phi_i^{(j)} \quad (1.19)$$

где j — произвольный фиксированный индекс.

Правые части формул (1.16) — (1.19) содержат неизвестные величины $\Phi_i^{(j)}$, которые, однако, удовлетворяют условиям (1.14). Используя эти условия, для суммарных давлений можно получить соответствующие вилки.

Можно показать, что в случаях периодической задачи и симметричной задачи о двух штампах справедливы неравенства

$$1/2 [\Phi(\lambda, \alpha_i, 0) + \Phi(\lambda, \beta_i, 0)] \geq \Phi_i^{(j)} \geq \Phi(\lambda, 1/2 [\alpha_i + \beta_i], 0) \quad (1.20)$$

Неравенства (1.20) позволяют значительно сузить вилки, заключающие соответствующие значения суммарных давлений.

Эти вилки имеют вид в условиях задачи о двух штампах

$$\frac{\pi^2 E_0 b(\lambda) \delta_0(l\lambda)}{(1 + \nu_0^2) \{1 + \Phi(\lambda, 1/2 [\alpha_i + \beta_i], 0)\}} > \quad (1.21)$$

$$> \int_{L_{1,2}} \psi(\lambda, x) dx > \frac{\pi^2 E_0 b(\lambda) \delta_0(l\lambda)}{(1 + \nu_0^2) \{1 + 1/2 [\Phi(\lambda, \alpha_i, 0) + \Phi(\lambda, \beta_i, 0)]\}} \quad (i = 1, 2)$$

в условиях периодической задачи

$$\pi^2 E_0 b(\lambda) \delta_0(l\lambda) \left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \Phi\left(\lambda, \frac{\alpha_i + \beta_i}{2}, 0\right) \right]^{-1} >$$

$$> \int_{L_k} \psi(\lambda, x) dx > \pi^2 E_0 b(\lambda) \delta_0(l\lambda) \left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(\lambda, \alpha_i, 0) + \Phi(\lambda, \beta_i, 0)}{2} \right)^{-1} \quad (1.22)$$

В таблице приводится граница процентной погрешности в %, происходящая от замены истинного суммарного давления одной из границ соответствующей вилки в зависимости от значений $2h = 0, l, \dots, 5l$, интервала между штампами и параметра $l\lambda$, определяющего форму для основания штампа. Если, например, принять ширину штампа $2l = 2$, то строкам таблицы, соответствующим значению $l\lambda = 0.5$, отвечает искривление основания штампа по его длине, определяемое равенством $w = b \cos 1/2 y$. Такие штампы практически не влияют один на другой при $2h \geq 4l$ в случае задачи о двух штампах и при $2h \geq 5l$ в случае периодической задачи.

Таблица

Задача	$l\lambda$	$2h=0$	l	$2l$	$3l$	$4l$	$5l$
(1)	0.5	21	4	2	1	0	0
(1.21)		32	3	1	0	0	0
(3)	0.5	32	7	5	2	1	0
(1.22)		57	7	2	0	0	0

Задача оценки суммарного давления облегчается также возможностью точного вычисления его в случае, когда $2h = 0$. Действительно, рассматривая n сомкнутых

штампов как один шириной $2ln$, составим для него функцию $\varphi(\lambda, x)$ по формуле (1.9). Тогда, очевидно, суммарное давление по ширине i -го штампа выразится интегралом

$$\int_{L_i} \varphi(\lambda, x) dx \quad (1.23)$$

§ 2. Полученные в § 1 результаты могут быть использованы к решению задачи о расчете системы бесконечных параллельных балок, лежащих на упругом полупространстве. Задача решается при следующих предположениях:

- 1) область контакта балок и упругого полупространства определяется (1.2);
- 2) силы трения между балками и основанием отсутствуют;
- 3) плоские до деформации основания балок искривляются лишь в продольном направлении так, что осадка под балкой по ее ширине постоянна;
- 4) изгиб каждой из балок определяется прогибом ее центральной оси.

Обозначим через $w_i(y)$ величину прогиба оси балки, $q_i(y)$ — вертикальную нагрузку, $r_i(y)$ — реакцию основания, приходящуюся на единицу длины балки, E_i — модуль упругости балки, J_i — момент инерции поперечного сечения балки относительно оси, параллельной оси Ox и проходящей через центр тяжести этого сечения. Тогда известному уравнению изогнутой оси каждой из n балок системы

$$J_i E_i w_i^{(IV)}(y) = q_i(y) - r_i(y) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.1)$$

можно удовлетворить, положив

$$q_i(y) = a_i(\lambda) \cos \lambda y, \quad w_i(y) = b_i(\lambda) \cos \lambda y, \quad r_i(y) = c_i(\lambda) \cos \lambda y$$

где $a_i(\lambda)$, $b_i(\lambda)$, $c_i(\lambda)$ — постоянные, связанные соотношениями

$$J_i E_i b_i(\lambda) \lambda^4 = a_i(\lambda) - c_i(\lambda) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.2)$$

Для решения задачи системы (2.2), содержащей $2n$ неизвестных $b_i(\lambda)$ и $c_i(\lambda)$, недостаточно. Система уравнений (1.13) доставляет необходимые дополнительные условия. Действительно, в силу сделанных предположений, осадке балки вида (1.3) должно соответствовать давление в области контакта, выражаемое формулой (1.4), в которой $\psi_i(\lambda, x)$ — неизвестная функция. Реакция, приходящаяся на единицу длины каждой из балок, будет

$$r_i(y) = - \int_{L_i} p(x, y) dx = - \int_{L_i} \psi_i(\lambda, x) dx \cos \lambda y = c_i(\lambda) \cos \lambda y \quad (2.3)$$

Отсюда

$$c_i(\lambda) = - \int_{L_i} \psi_i(\lambda, x) dx$$

Подставляя найденное выражение для $c_i(\lambda)$ в (2.2), получим

$$J_i E_i b_i(\lambda) \lambda^4 = a_i(\lambda) + \int_{L_i} \psi_i(\lambda, x) dx \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.4)$$

Исключая, наконец, из (1.13) и (2.4) интегралы (1.23), получим систему n уравнений относительно $b_i(\lambda)$

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i^{(j)} [J_i E_i b_i(\lambda) \lambda^4 - a_i(\lambda)] = b_j(\lambda) \int_{L_j} \varphi(\lambda, x) dx \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2.5)$$

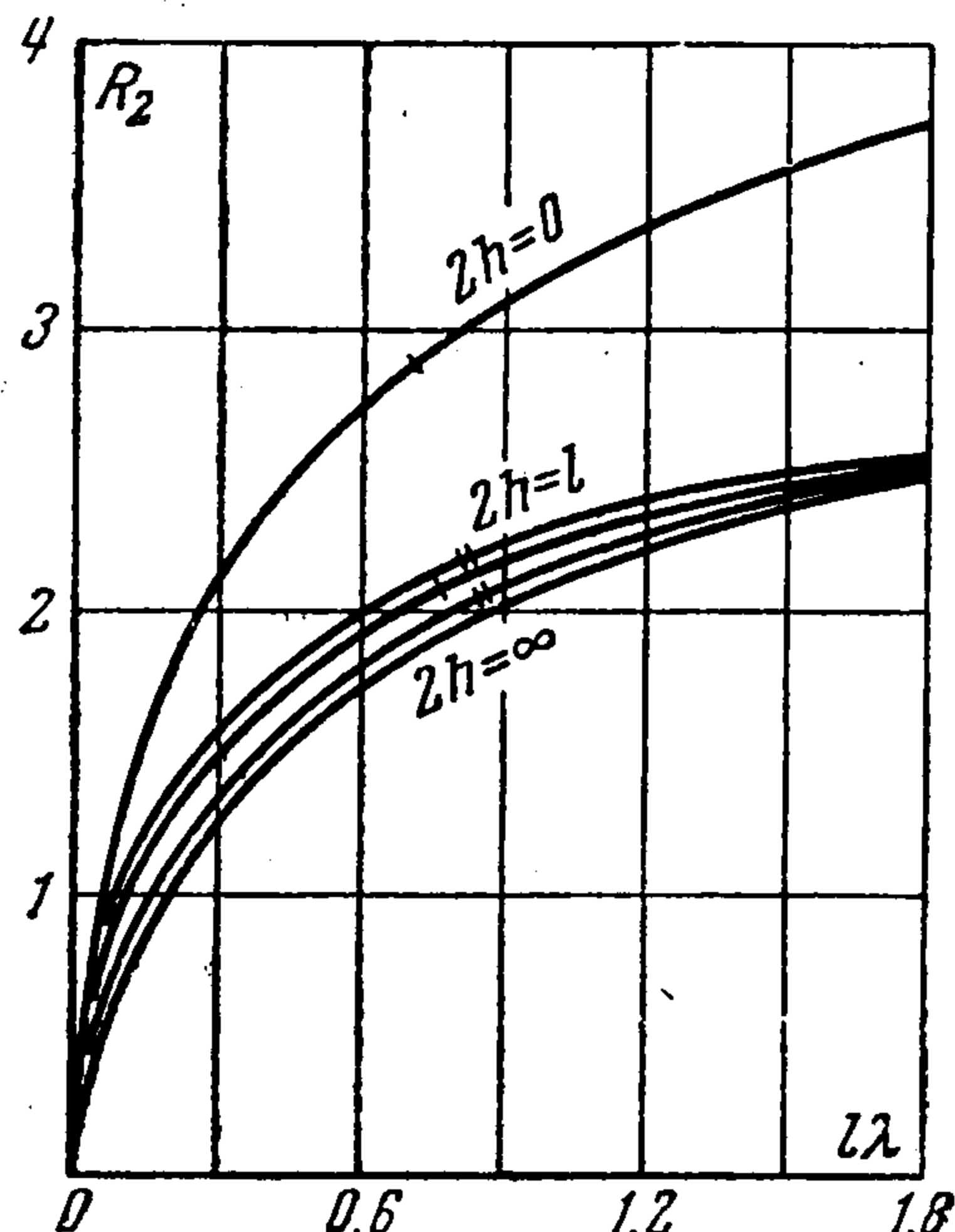
Здесь интегралы правой части выражаются формулами (1.15). Решая систему (2.5), находим $b_i(\lambda)$, а затем и прогибы осей

$$w_k(y) = \sum_{i=1}^n N_i^{(k)}(\lambda, \Phi_i^{(j)}) q_i(\lambda) \quad (2.6)$$

где $N_i^{(k)}(\lambda, \Phi_i^{(j)})$ — известные функции. Представляя произвольную нагрузку в виде интеграла Фурье, формулу (2.6) можно записать так:

$$w_k(y) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \int_0^{\infty} N_i^{(k)}(\lambda, \Phi_i^{(k)}) d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} q_i(t) \cos \lambda(y-t) dt \quad (2.7)$$

Легко проверить, что когда расстояние между балками $2h \rightarrow \infty$, формула (2.7) переходит в соответствующую ей формулу прогиба для случая одной балки, найденную В. Л. Рвачевым [3]



$$w(y) = \frac{1}{\pi J E} \int_0^{\infty} \frac{R_1 d\lambda}{\lambda (\lambda^3 R_1 + l A)} \int_{-\infty}^{\infty} q(t) \cos \lambda (y - t) dt$$

где

$$R_1 = \frac{l\lambda}{\delta_0(l\lambda)}, \quad A = \frac{\pi E_0}{J E (1 - \nu_0^2)}$$

Для случая симметричной задачи о двух балках и задачи о бесконечном числе одинаковых, одинаково нагруженных и размещенных с одинаковым интервалом балок (периодическая задача) необходимость в индексации величин отпадает. Формулы прогибов в обоих случаях по виду совпадают с формулой (2.8) и отличаются от нее лишь видом

функции R . Для задачи о двух балках и для периодической задачи эта функция имеет соответственно вид

$$R_2 = R_1 (1 + \Phi_2^{(1)}), \quad R_{\infty} = R_1 \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \Phi_i^{(j)} \quad (2.9)$$

где j — произвольно фиксированный индекс.

На основании (1.20) для функций R_2 и R_{∞} можно получить оценки

$$R_1 \left[1 + \frac{\Phi(\lambda, \alpha_i, 0) + \Phi(\lambda, \beta_i, 0)}{2} \right] > R_2 > R_1 \left[1 + \Phi\left(\lambda, \frac{\alpha_i + \beta_i}{2}, 0\right) \right] \quad (2.10)$$

$$R_1 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(\lambda, \alpha_i, 0) + \Phi(\lambda, \beta_i, 0)}{2} > R_{\infty} > R_1 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Phi\left(\lambda, \frac{\alpha_i + \beta_i}{2}, 0\right) \quad (2.11)$$

Эти вилки позволяют исследовать вопрос о взаимном влиянии балок системы в зависимости от величины $2h$ интервала между ними. На фиг. 1 показан график вилки (2.10). Как видно из этого графика, кривые вилки, а следовательно, и кривая функции R_2 тем теснее примыкают к кривой графика функции R_1 , чем больше расстояние между балками. При $2h \geq 4l$ графики R_2 и R_1 практически совпадают и каждую из балок можно рассчитывать без учета влияния на нее второй балки.

В случае симметричной задачи о трех одинаковых и одинаково нагруженных балках формулы прогибов имеют вид

$$w_{1,2,3}(y) = \frac{1}{\pi l E} \int_0^{\infty} \frac{R_3 [R_3 \lambda^3 + (1 + \Phi_2^{(1)} + \Phi_k^{(1)}) A] d\lambda}{\Theta(\lambda)} \int_{-\infty}^{+\infty} q(t) \cos \lambda (y - t) dt$$

Здесь $k = 2$ для w_2 и $k = 3$ для w_1 и w_3

$$\Theta(\lambda) = \lambda [R_3^2 \lambda^6 + (2 + \Phi_3^{(1)}) R_3 \lambda^3 A + A^2 (1 + \Phi_3^{(1)} - 2\Phi_2^{(1)2})] \quad (2.13)$$

$$R_3 = R_1 (1 + \Phi_3^{(1)} - 2\Phi_2^{(1)2})$$

Используя (1.14), для R_3 можно получить соответствующую вилку, которая позволит дать оценку прогибам, а также исследовать взаимное влияние балок.

Поступила 2 I 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбунов-Посадов М. И. Расчет конструкций на упругом основании. М., Гос. изд. лит. по строительству и архитектуре, 1953.
2. Кузнецов В. И. Вопросы статического расчета верхнего строения пути. Трансжилдориздат, 1940.
3. Рвачев В. Л. Давление на упругое полупространство штампа, имеющего в плане форму полосы. ПММ, 1956, т. XX, вып. 2.
4. Рвачев В. Л. К расчету бесконечной балки, лежащей на упругом основании. ПММ, 1956, т. XX, вып. 5.
5. Tables relating to Mathieu functions, Columbia University Press, New-York, 1951.