

Отсюда получаем решение в области $CDEF$

$$X(\xi, \eta) = \csc^{2/3}(\xi + \eta) \sin^{2/3}(\xi_0 + \eta) X(\xi_0, \eta) \quad (20)$$

Далее следует определить результирующее напряжение σ_{x_2} по вертикальной оси симметрии и из условия равенства нулю получить искомую связь между a , b и p .

Поступила 21 IV 1961

ЛИТЕРАТУРА

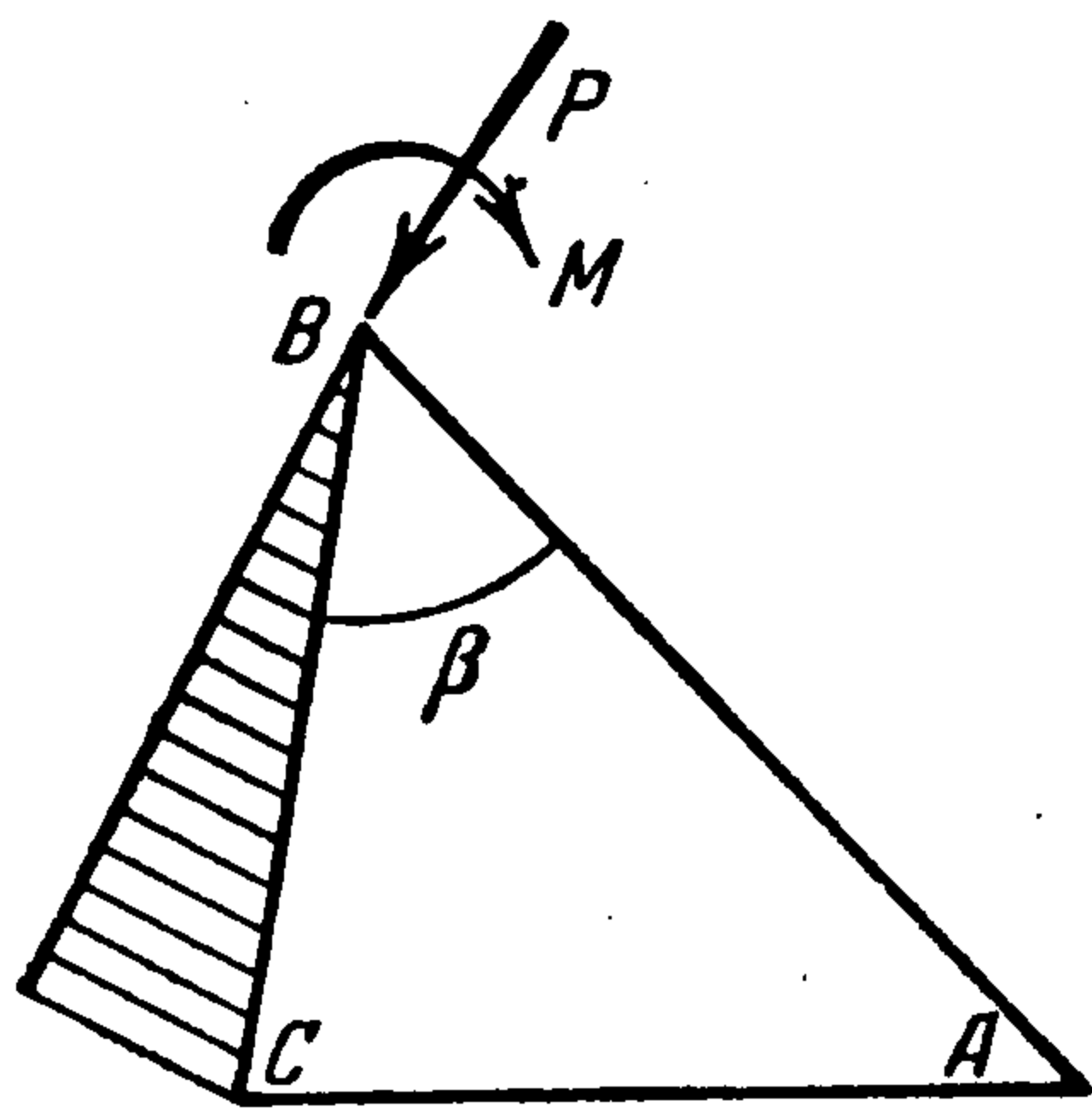
1. Соколовский В. В. Об уравнениях теории пластичности. ПММ, 1955, т. XIX, вып. 1.
2. Соколовский В. В. Теория пластичности. Гостехиздат, 1950.
3. Гурса Э. Курс математического анализа. т. 3, ч. 1, ГТТИ НТТИ, 1933.
4. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. Гостехиздат, 1961.
5. Кузнецов Г. Н. Механические свойства горных пород. Углетехиздат, 1947.

О ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ КЛИНА

М. М. Филоненко-Бородич

(Москва)

Известно несколько решений этой задачи в случае нагрузок клина на его гранях и в вершине; таковы, например, случаи, показанные на фиг. 1. Однако, каждое из этих решений не является единственным, так как граничные условия задаются только на гранях клина, который предполагается бесконечным, поведение же напряжений на бесконечности заранее не обуславливается.



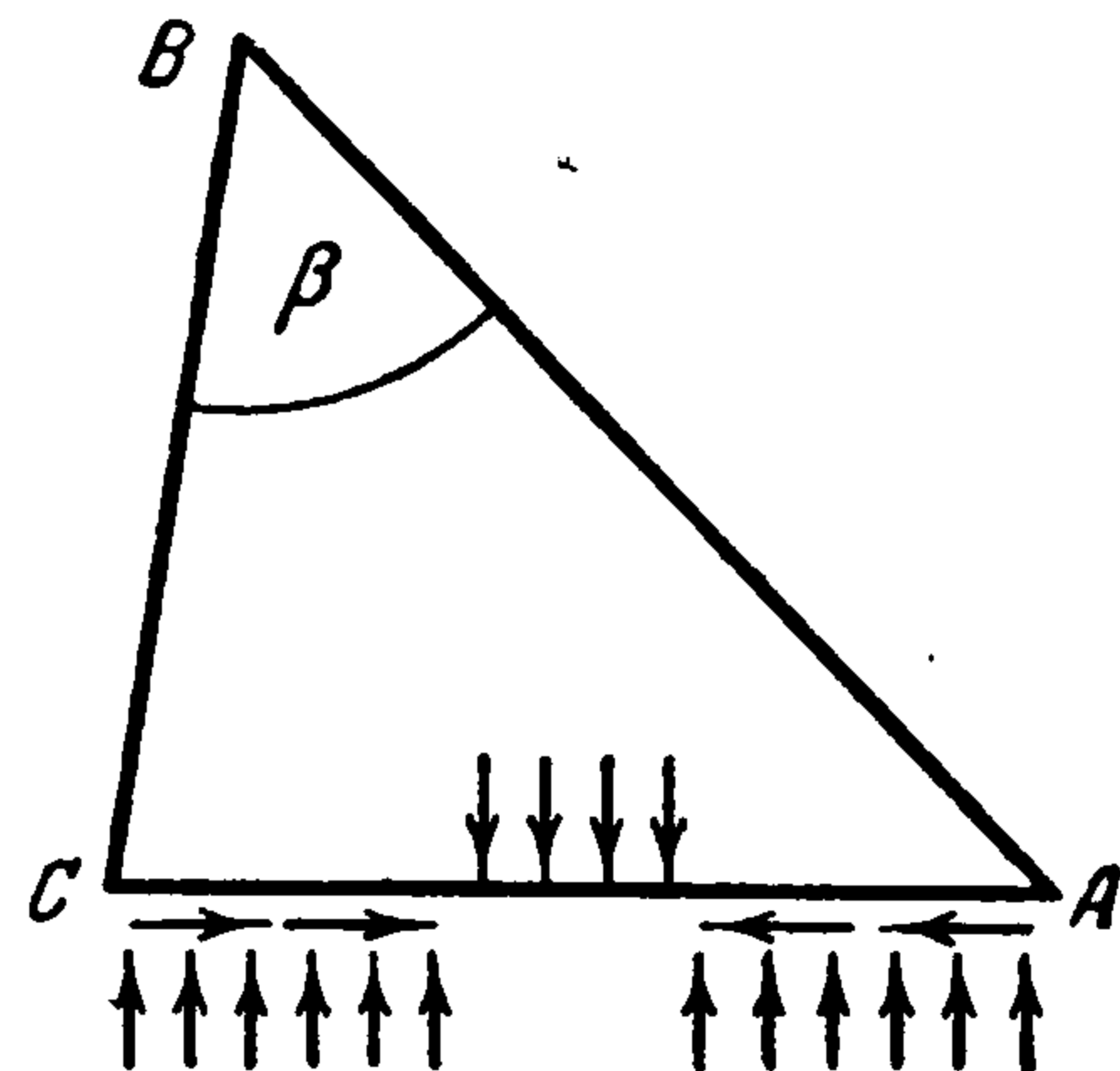
Фиг. 1

Действительно, рассмотрим (фиг. 2) верхнюю часть клина, отделенную сечением AC , т. е. треугольник ABC , и предположим, что он нагружен по грани AC произвольной самоуравновешенной нагрузкой, причем грани BA и BC остаются свободными; в треугольнике этом возникнет напряженное состояние, зависящее от характера нагрузки, приложенной на грани AC . Наложим полученное таким путем напряженное состояние на то состояние, которое имеется в любой из указанных выше задач; граничные условия задачи при этом сохранятся, но напряженное состояние изменится в зависимости от нагрузки на грани AC . Если нагрузку, ограниченную лишь условием равенства нулю главного момента и главного вектора ее, в остальном будем считать произвольной, то для выбранной задачи можем получить бесчисленное множество решений при заданных условиях на гранях BA и BC , что и требовалось доказать. Отсюда следует, что для полного решения задачи для клина представляет интерес решить задачу о треугольнике (фиг. 2), несущем произвольную, самоуравновешенную нагрузку на одной грани AC ; остальные две грани BA и BC свободны.

1. В предлагаемой работе для решения указанной сейчас задачи применен вариационный метод Кастильяно; искомый тензор напряжений представим как сумму двух тензоров

$$X_x = X_x^0 + \sum A_m X_x^{(m)}, \quad Y_y = Y_y^0 + \sum A_m Y_y^{(m)}$$

$$X_y = X_y^0 + \sum A_m X_y^{(m)} \quad (1)$$



Фиг. 2

Здесь тензор, компоненты которого отмечены индексом 0, есть основной тензор, удовлетворяющий дифференциальным уравнениям равновесия и граничным условиям задачи (фиг. 2). Вторые члены в формулах (1) составляют корректирующий тензор, также удовлетворяющий уравнениям равновесия, но оставляющий границу области ABC свободной от напряжений; этим двум условиям должен удовлетворять каждый

из суммируемых тензоров с компонентами $X_x^{(m)}, Y_y^{(m)}, X_y^{(m)}$. Тогда наличие произвольных постоянных A_m позволит осуществить варьирование общего тензора (1), необходимое для составления вариационного уравнения Кастильяно

$$\delta \int_{(\sigma)} W ds = \int_{(s)} (\delta X_{\nu} u + \delta Y_{\nu} v) ds \quad (2)$$

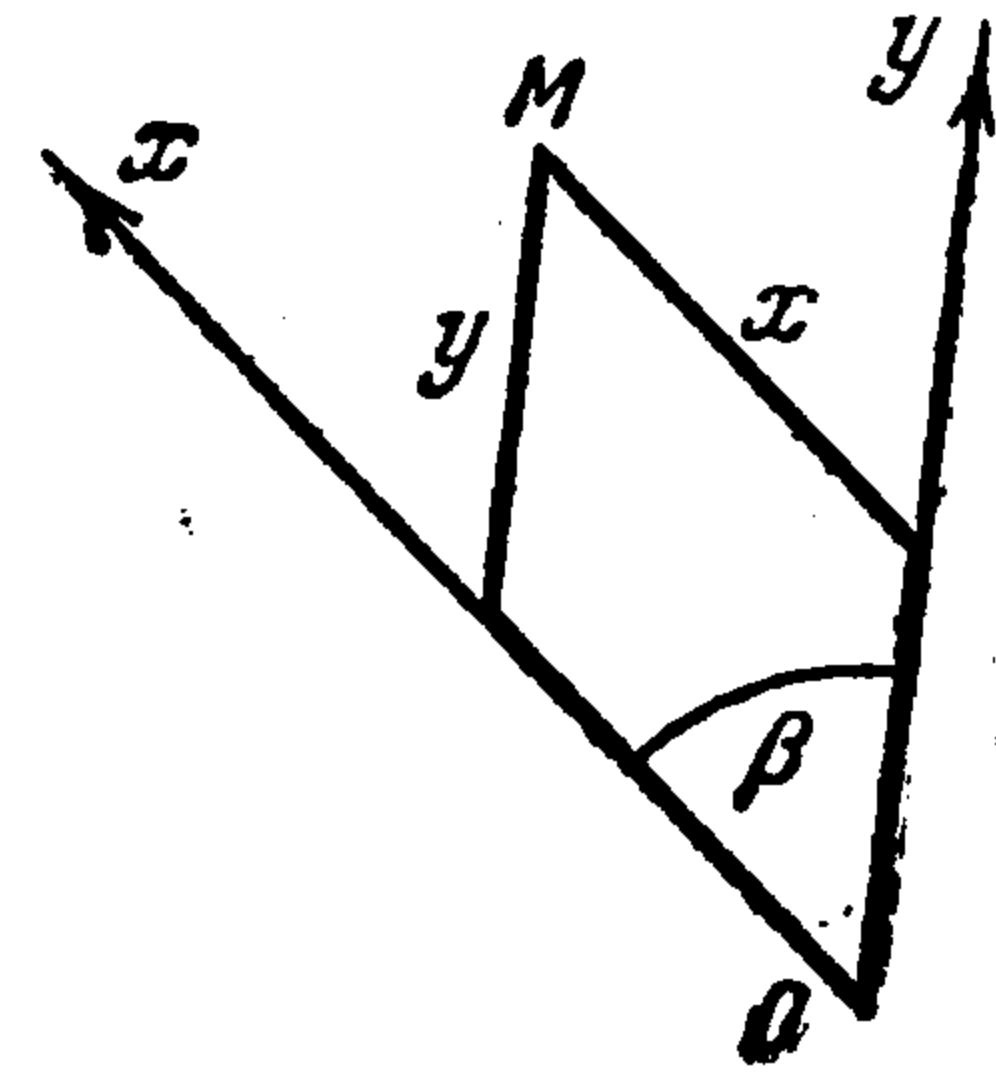
В данной задаче поверхностные силы X_{ν}, Y_{ν} заданы и поэтому не варьируются; тогда уравнение (2) упрощается и приводит к теореме о минимуме упругой энергии

$$\delta V = \delta \int_{(\sigma)} W ds = 0 \quad (3)$$

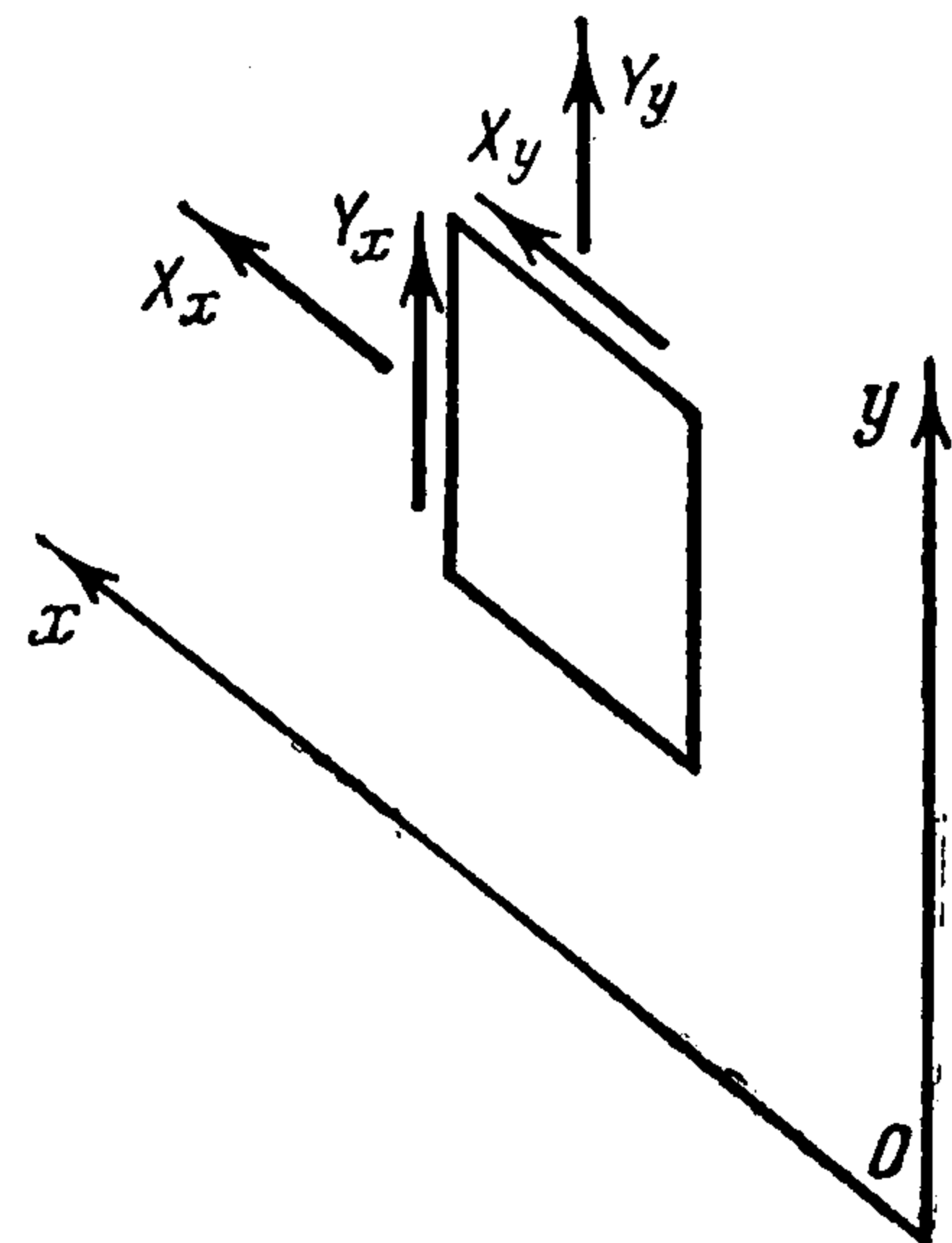
В результате подстановки в функцию W выражений (1) и выполнения интегрирования, функция V в левой части уравнения (3) представит собой квадратичную функцию произвольных постоянных A_m и для определения их получим систему линейных уравнений

$$\partial V / \partial A_m = 0 \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (4)$$

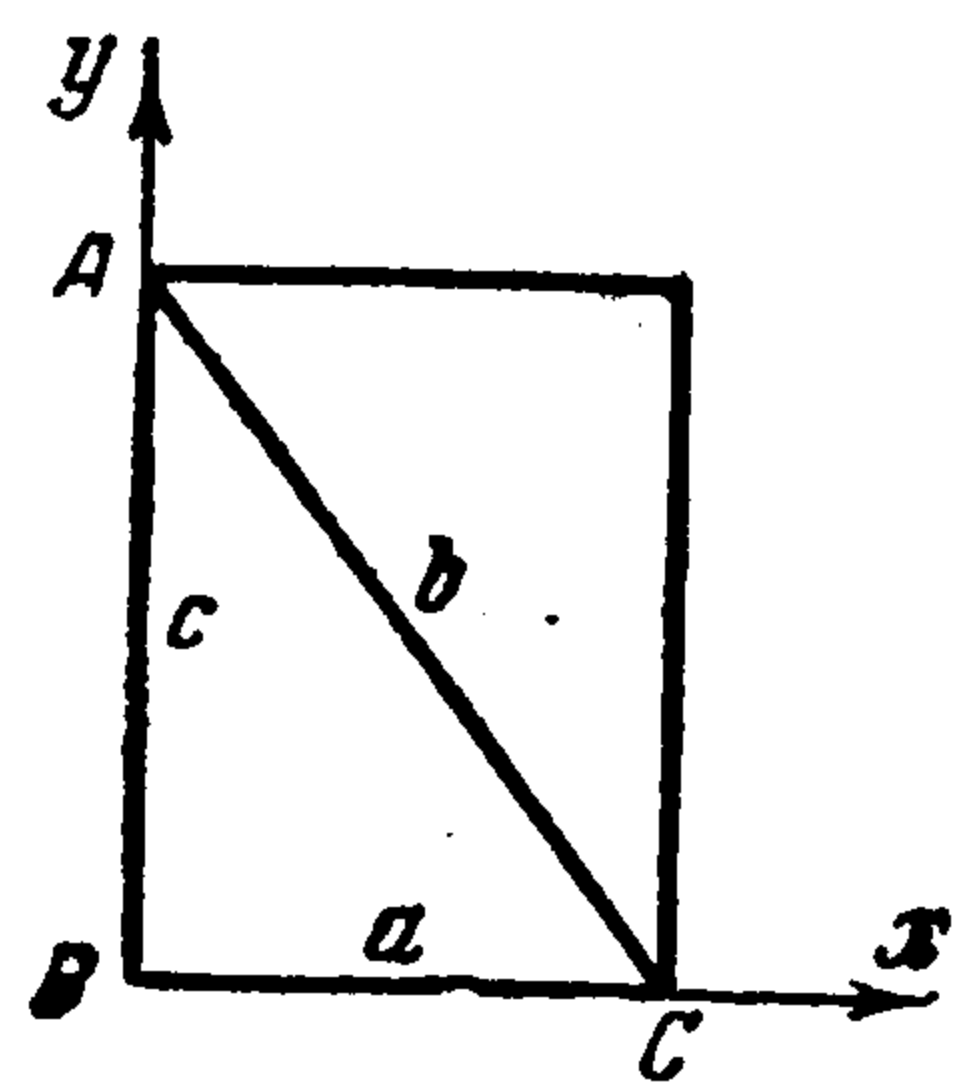
2. В рассматриваемой задаче о клине удобно вместо прямоугольных координат использовать косоугольные (контравариантные) координаты x, y (фиг. 3, а), приняв за оси координат стороны клина BA и BC с углом β между ними. Тогда «косоугольные» контравариантные компоненты тензора напряжений X_x, Y_y, X_y , показанные на фиг. 3, б, можно обозначить как и в прямоугольной системе координат, с той лишь разницей, что индекс при основной букве означает не внешнюю нормаль к площадке, параллельной одной из осей координат, а направление другой оси так, что, например, X_x обозначает проекцию (косоугольную) на ось x полного напряжения на площадке с «псевдонормалью» x (т. е. на площадке, параллельной оси y).



Фиг. 3а



Фиг. 3б



Фиг. 4

3. Легко показать, что в принятой косоугольной системе координат уравнения равновесия имеют обычный вид

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

Справедлив также закон парности $Y_x = X_y$ введенных нами касательных компонентов X_y и Y_x (отличных от обычных касательных напряжений).

Основной и корректирующий тензоры напряжений должны удовлетворять дифференциальным уравнениям равновесия; это будет выполнено, если каждый из них построим при помощи функции напряжений Эри $\varphi(x, y)$ по формулам

$$\begin{aligned} X_x^{(0)} &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2}, & Y_y^{(0)} &= \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2}, & X_y^{(0)} &= -\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x \partial y} \\ X_x^{(k)} &= \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2}, & Y_y^{(k)} &= \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2}, & X_y^{(k)} &= -\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (6)$$

4. Для построения основного тензора напряжений воспользуемся следующими соображениями. В случае прямоугольника (фиг. 4) со сторонами $x = 0, y = 0, x = a, y = c$ в прямоугольной системе координат корректирующий тензор можно получить при помощи функции напряжений

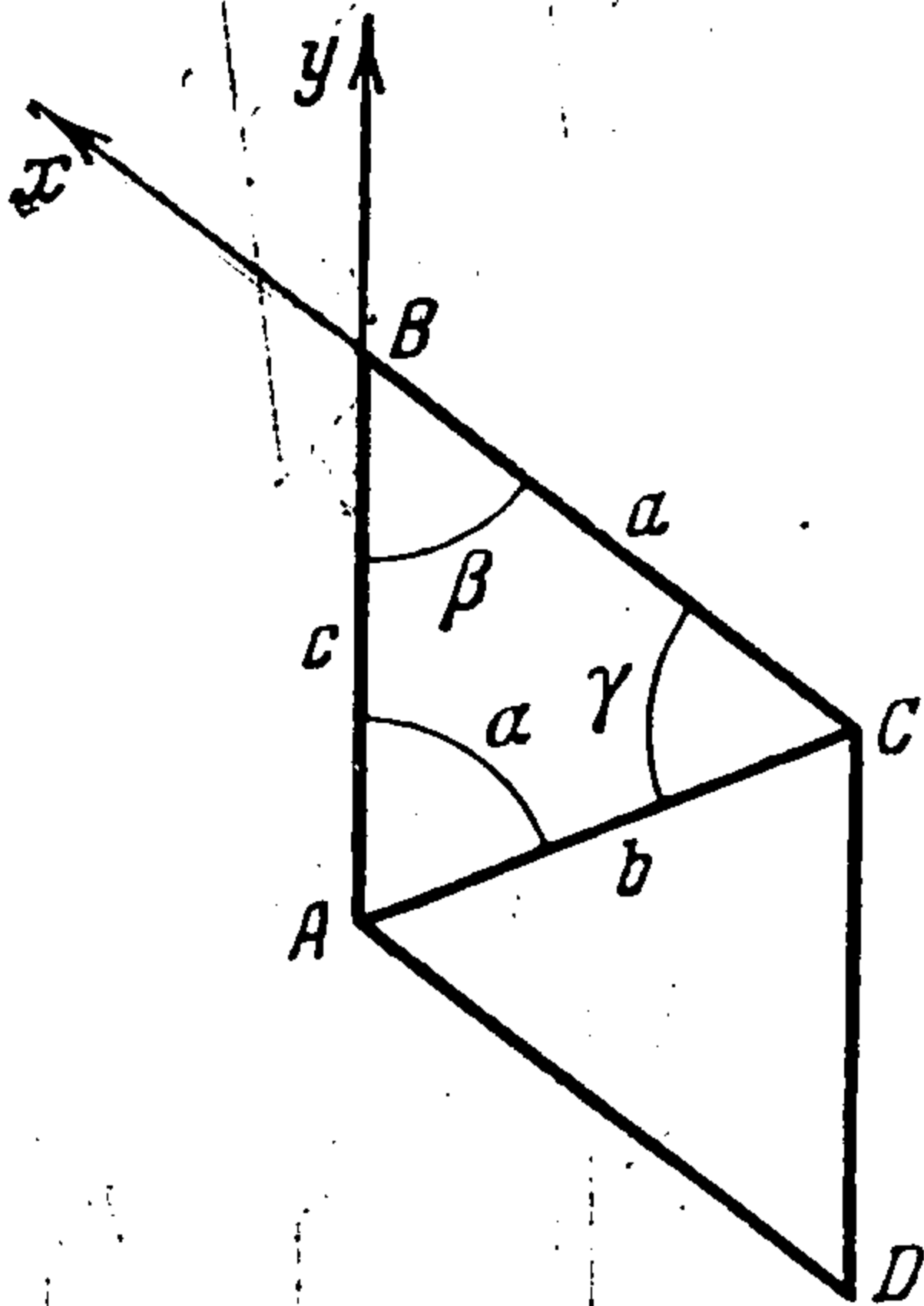
$$\varphi_k = \sum_m \sum_n A_{mn} P_m(x) P_n(y) \quad (7)$$

Здесь функции $P_m(x)$ и $P_n(y)$ — так называемые косинус-биномы

$$P_m = \cos \frac{m\pi x}{a} - \cos \frac{(m+2)\pi x}{a}, \quad P_n = \cos \frac{n\pi y}{c} - \cos \frac{(n+2)\pi y}{c} \quad (8)$$

Косинус-биномы удовлетворяют следующим граничным условиям:

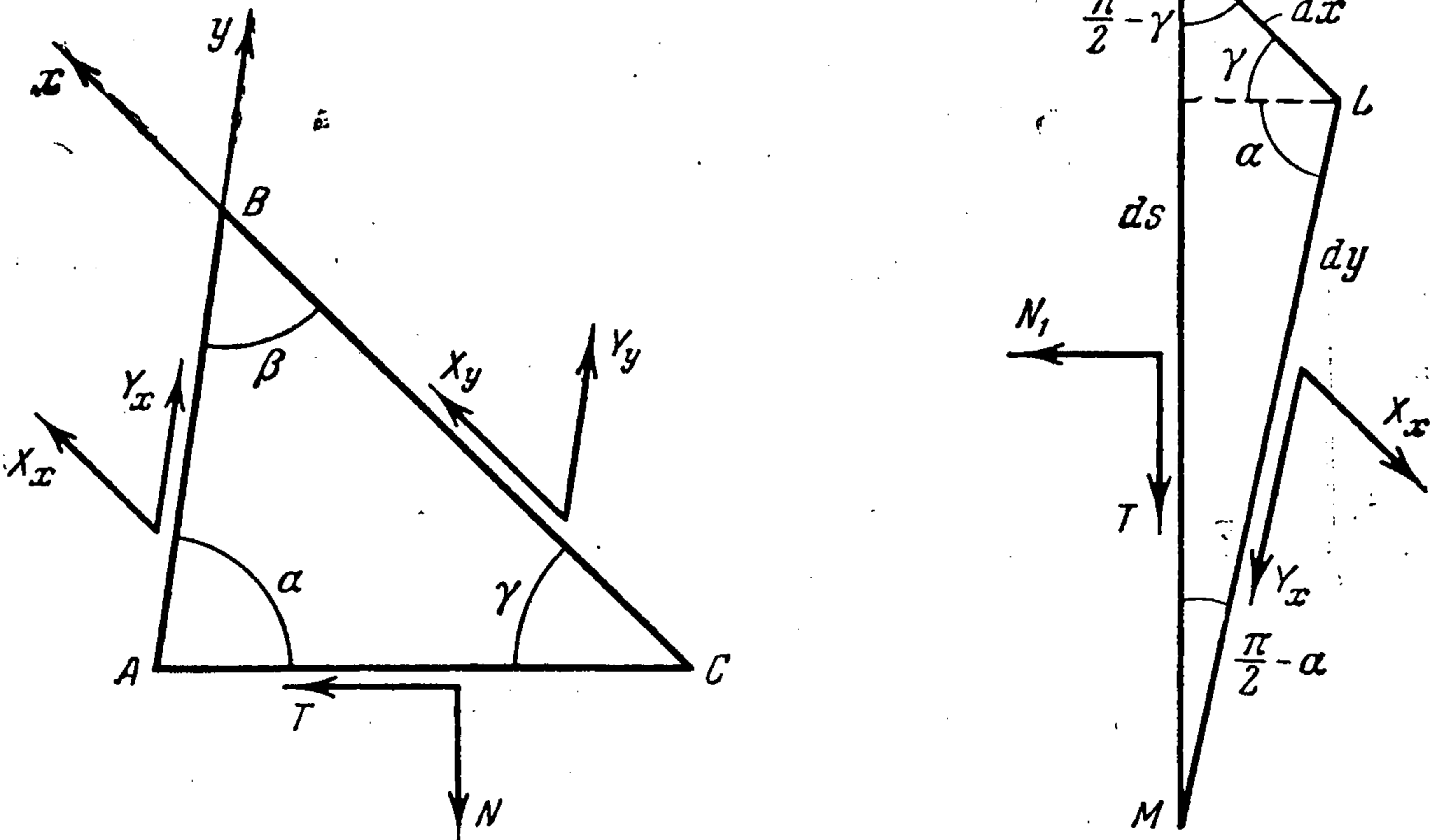
$$\begin{aligned} P_m(0) = 0, \quad P_m'(0) = 0, \quad P_n(0) = 0, \quad P_n'(0) = 0 \\ P_m(a) = 0, \quad P_m'(a) = 0, \quad P_n(c) = 0, \quad P_n'(c) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$



Фиг. 5

Системы этих функций обладают полнотой и замкнутостью. Если при помощи функции напряжений (7) выразим компоненты тензора напряжений по формулам типа (6), то заметим, что вследствие граничных свойств косинус-биномов (9) весь контур прямоугольника будет свободен от напряжений; этим путем получим корректирующий тензор для прямоугольника. Отсечем теперь от прямоугольника диагональю (или другой прямой) прямоугольный треугольник; его катеты будут свободны от напряжений, но на гипотенузе появятся нормальные и касательные напряжения, создающие самоуравновешенную нагрузку. Полнота систем функций (8) и произвольность коэффициентов A_{mn} позволяют осуществить этим путем весьма широкий класс таких нагрузок.

Все сказанное может быть применено к рассматриваемой задаче о косоугольном треугольнике; для этого дополним треугольник (фиг. 5) до параллелограмма $ABCD$ и используем функцию напряжений (7) в принятой косоугольной системе координат. При этом контур параллелограмма останется свободным от напряжений, а на диагонали его AC появится самоуравновешенная нагрузка достаточно произвольного вида. Значит, основной тензор для треугольника получается как корректирующий тензор для параллелограмма.



Фиг. 6

Для использования полученного решения удобно уравновешенную нагрузку в сечении AC выразить через нормальное напряжение N и касательное напряжение T . Выражения N и T через принятые косоугольные компоненты получим из уравнений равновесия бесконечно малого треугольного элемента (фиг. 6)

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{\sin \beta} (X_x \sin^2 \gamma + Y_y \sin^2 \alpha + 2X_y \sin \alpha \sin \gamma) \\ T &= \frac{1}{\sin \beta} [-X_x \sin \gamma \cos \gamma + Y_y \sin \alpha \cos \alpha + X_y (\sin \gamma \cos \alpha - \cos \gamma \sin \alpha)] \end{aligned} \quad (10)$$

В случае прямоугольной системы координат ($\beta = \pi/2$, $\gamma = \pi/2 - \alpha$) эти формулы совпадают с формулами «напряжений по косым площадкам», применяемыми в сопротивлении материалов. Уравнение сечения AC запишем в виде (фиг. 5)

$$x/a + y/c = 1 \quad (11)$$

При расположении треугольника согласно фиг. 5 отрезки a и c будут отрицательными. На прямой AC переменную y надо рассматривать как функцию от x

$$y = c(1 - x/a)$$

В соответствии с этим преобразуется аргумент функции $P_n(y)$ и ее производных

$$\frac{n\pi y}{c} = n\pi \left(1 - \frac{x}{a}\right) = n\pi - \frac{n\pi x}{a}$$

Собирая результаты, получим:

При n четном	При n нечетном	
$P_n(y) = P_n(x),$	$P_n(y) = -P_n(x)$	
$P_n'(y) = -\frac{a}{c} P_n'(x),$	$P_n'(y) = \frac{a}{c} P_n'(x)$	(12)
$P_n''(y) = \frac{a^2}{c^2} P_n''(x),$	$P_n''(y) = -\frac{a^2}{c^2} P_n''(x)$	

Из этой сводки следует, что на прямой AC функция $P_n(y)$, рассматриваемая на отрезке c , переходит в функцию $P_n(x)$, рассматриваемую на отрезке a . Таким образом, напряжения N и T в сечении AC выражаются как функции одной (косоугольной) координаты x . Для получения этих выражений следует компоненты X_x , Y_y , X_y получить из функции напряжений (7)

$$\begin{aligned} X_x^{(0)} &= \sum \sum A_{mn} P_m(x) P_n''(y), & Y_y^{(0)} &= \sum \sum A_{mn} P_m''(x) P_n(y) \\ X_y^{(0)} &= -\sum \sum A_{mn} P_m'(x) P_n'(y) \end{aligned} \quad (13)$$

и преобразовать $P_n(y)$ и ее производные согласно (12). Опуская соответствующие выкладки, приведем окончательные выражения N и T ; при получении этих результатов используется теорема синусов для треугольника ABC .

Будем иметь

$$N = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \beta} \sum \sum (-1)^n A_{mn} [P_m(x) P_n(x)]'' \quad (14)$$

$$T = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \beta} \left\{ \text{ctg } \alpha \sum \sum (-1)^n A_{mn} [P_m'(x) P_n(x)]' - \text{ctg } \gamma \sum \sum (-1)^n A_{mn} [P_m(x) P_n'(x)]' \right\}$$

Штрихи при выражениях в квадратных скобках обозначают производные от них по переменной x . Пользуясь выражениями (14), подсчитаем главный вектор и главный момент сил, приложенных в сечении AC

$$\begin{aligned} \int_0^l N(s) ds &= \int_0^a N(x) \frac{dx}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} \int_0^a N(x) dx \\ \int_0^l sN(s) ds &= \int_0^a \frac{x}{\sin \alpha} N(x) \frac{dx}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \int_0^a xN(x) dx \\ \int_0^l T(s) ds &= \int_0^a T(x) \frac{dx}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} \int_0^a T(x) dx \end{aligned} \quad (15)$$

Подставив сюда выражения N и T из (14), заметим, что под знаками интегралов стоят полные производные; поэтому интегралы берутся без затруднения; подстановка пределов с учетом граничных свойств косинус-биномов показывает, что все величины (15) обращаются в нуль и нагрузка по сечению AC самоуравновешена, как это было установлено a priori.

Если в сечении AC заданы нормальные и касательные напряжения $N^\circ(x)$, $T^\circ(x)$ (законы распределения их, как и в (15), выражены в функции от x), то их надо аппроксимировать при помощи формул (14), например, методом наименьшего квадратического отклонения, т. е. требуя, чтобы интеграл

$$J = \int_0^a [(N - N^\circ)^2 + (T - T^\circ)^2] dx$$

принимал минимальное значение. Приравнявая нулю производные его по параметрам A_{mn} , получим систему линейных уравнений для определения их

$$\frac{\partial J}{\partial A_{mn}} = 0 \quad \begin{pmatrix} m = 0, 1, 2, \dots \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{pmatrix}$$

Этим будет закончено построение основного тензора напряжений.

5. Основной тензор был построен при помощи функции напряжений (7); при этом стороны BA и BC треугольника оказались свободными от напряжений вследствие граничных свойств (9) косинус-биномов. Для построения корректирующего тензора добавим к каждому члену суммы (7) аналогичный множитель, обращающийся в нуль вместе с производной на прямой AC . Для этого введем новый аргумент

$$w = x/a + y/c \quad (16)$$

На основании уравнения прямой AC (11) на этой прямой $w = 1$ тогда, например, функция

$$P(w) = 1 - \cos 2\pi w \quad (17)$$

удовлетворяет требуемым условиям; действительно

$$P(w) = 0, \quad \frac{dP}{dw} = P'(w) = 2\pi \sin 2\pi w = 0 \quad (18)$$

Корректирующий тензор построим при помощи функции напряжений

$$\varphi_k = P(w) \sum \sum C_{mn} P_m(x) P_n(y) \quad (19)$$

Выпишем компоненты тензора напряжений; для сокращения сохраним лишь одиночные знаки сумм; и кроме того, опустим аргументы функций $P_m = P_m(x)$, $P_n = P_n(y)$ и $P = P(w)$.

Производные этих функций будем обозначать штрихами; будем иметь

$$\begin{aligned} X_x^{(k)} &= \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} P'' \sum C_{mn} P_m P_n + 2 \frac{1}{c} P' \sum C_{mn} P_m P_n' + P \sum C_{mn} P_m P_n'' \\ Y_y^{(k)} &= \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} P'' \sum C_{mn} P_m P_n + 2 \frac{1}{a} P' \sum C_{mn} P_m' P_n + P \sum C_{mn} P_m'' P_n \\ X_y^{(k)} &= -\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{ac} P'' \sum C_{mn} P_m P_n - P' \left(\frac{1}{a} \sum C_{mn} P_m P_n' + \frac{1}{c} \sum C_{mn} P_m' P_n \right) - \\ &\quad - P \sum C_{mn} P_m' P_n' \end{aligned} \quad (20)$$

Эти формулы дают корректирующий тензор для треугольника; в этом можно непосредственно убедиться. На сторонах BA и BC косоугольные компоненты (20) обращаются в нуль; это следует из граничных свойств косинус-биномов (9). Что касается стороны AC , то составим для нее компоненты (10); заметим, что на прямой AC формулы (20) значительно упрощаются: здесь $P = 0$, $P' = 0$ согласно (17) и (18) и сохраняются лишь первые члены формул (20); подставляя это в формулы (10), получим

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{\sin \beta} \left[\frac{\sin^2 \gamma}{c^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{a^2} - \frac{2 \sin \alpha \sin \gamma}{ac} \right] P'' \sum C_{mn} P_m P_n \\ T &= \frac{1}{\sin \beta} \left[-\frac{\sin \gamma \cos \gamma}{c^2} + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{a^2} - \frac{\sin \gamma \cos \alpha - \cos \gamma \sin \alpha}{ac} \right] P'' \sum C_{mn} P_m P_n \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь выражения в квадратных скобках обращаются в нуль на основании теоремы синусов и поэтому напряжения N и T на стороне AC также отсутствуют при произвольных значениях параметров C_{mn} , что и требовалось доказать.

6. Полный тензор напряжений данной задачи получится согласно (1) как сумма корректирующего тензора (20) и основного тензора, построенного при помощи функции напряжений (7)

$$\begin{aligned} X_x^{(0)} &= \sum \sum A_{mn} P_m(x) P_n''(y), & Y_y^{(0)} &= \sum \sum A_{mn} P_m''(x) P_n(y) \\ X_y^{(0)} &= -\sum \sum A_{mn} P_m'(x) P_n'(y) \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь коэффициенты A_{mn} определяются из условий аппроксимирования нагрузок, заданных на грани AC , как это было указано в п. 4.

Для составления вариационного уравнения Кастильяно (3) остается построить выражение упругой энергии W . Если отнесем исследуемый треугольник к прямоугольной системе координат, одна из осей которой параллельна стороне AC , то в качестве компонентов тензора напряжений будут фигурировать введенные выше (фиг. 6, а) составляющие N и T ; к ним надо добавить составляющую N_1 (фиг. 6, б). Последняя выразится через косоугольные компоненты X_x , Y_y , X_y из условий равновесия элемента KLM аналогично (10)

$$N_1 = \frac{1}{\sin \beta} (X_x \cos^2 \gamma + Y_y \cos^2 \alpha - 2X_y \cos \alpha \cos \gamma) \quad (23)$$

Добавляя эту зависимость к (10), получим полную систему формул преобразования тензора напряжений. Выражение упругой энергии

$$W = \frac{1}{2} (N \epsilon_N + N_1 \epsilon_{N_1} + T \gamma) = \frac{1}{2E} [(N + N_1)^2 - 2(1 + \nu) N N_1 + 2(1 + \nu) T] \quad (24)$$

Пользуясь формулами (23) и (10) отсюда имеем

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2E \sin^2 \beta} \{ (X_x + Y_y)^2 - 2(1 + \nu) \sin^2 \beta X_x Y_y + 4 \cos \beta X_y (X_x + Y_y) + \\ &\quad + 2 [1 + \nu + (1 - \nu) \cos^2 \beta] X_y^2 \} \end{aligned} \quad (25)$$

При получении этого результата учтено, что

$$\alpha + \gamma = \pi - \beta, \quad \sin(\alpha + \gamma) = \sin \beta, \quad \cos(\alpha + \gamma) = -\cos \beta, \quad X_y = Y_x$$

Полная упругая энергия треугольника ABC будет

$$V = \int_{(S)} W dS \quad (dS = dx dy \sin \beta) \quad (26)$$

Внося это выражение в (26), получим

$$V = \frac{1}{2E \sin \beta} \iint_{(S)} \{ (X_x + Y_y)^2 - K X_x Y_y + L X_y (X_x + Y_y) + M X_y^2 \} dx dy \quad (27)$$

$$K = 2(1 + \nu) \sin^2 \beta, \quad L = 4 \cos \beta, \quad M = 2 [1 + \nu + (1 - \nu) \cos^2 \beta] \quad (28)$$

Под интеграл следует внести компоненты полного тензора напряжений, пользуясь формулами (22) и (20)

$$X_x = X_x^{(0)} + X_x^{(k)}, \quad Y_y = Y_y^{(0)} + Y_y^{(k)}, \quad X_y = X_y^{(0)} + X_y^{(k)} \quad (29)$$

При выполнении интегрирования энергия выразится в виде квадратичной функции искомых параметров C_{mn} и тогда для них обычным путем получим систему

$$\partial V / \partial C_{mn} = 0 \quad (30)$$

Поступила 10 IV 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Филоненко - Бородич М. М. Об одной системе функций. ПММ, 1946, т. X, вып. 1.
2. Филоненко - Бородич М. М. Задача о равновесии упругого параллелепипеда, ПММ, 1951, т. XV, вып. 2.
3. Мешков А. И. Равновесие упругого параллелепипеда. Вест. Московского ун-та, 1957, № 2.