

ОБ УРАВНЕНИЯХ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ НЕКОТОРОМ ПРЕДЕЛЬНОМ УСЛОВИИ

П. И. Перлин (Москва)

В работе [1] предложены уравнения теории пластичности при произвольной зависимости между инвариантами тензора напряжений

$$F(s, t) = 0 \quad (s = 1/2(\sigma_x + \sigma_y), t = \sqrt{1/4(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2})$$

Следуя этой работе, представим зависимость между s и t в виде зависимости между функциями ψ и λ , определенными следующим образом:

$$dt/ds = \cos 2\psi, \quad 2d\lambda = \operatorname{tg} 2\psi d \ln t \quad (1)$$

Каноническая система уравнений характеристик в плоскости xy примет вид:

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \operatorname{tg}(\varphi - \psi) \frac{\partial x}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \operatorname{tg}(\varphi + \psi) \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad (\xi = \lambda(\psi) + \varphi, \eta = \lambda(\psi) - \varphi) \quad (2)$$

Каноническая система уравнений характеристик в плоскости uv примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = -\operatorname{tg}(\varphi - \psi) \frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\operatorname{tg}(\varphi + \psi) \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad (3)$$

В работах [1, 2] было показано, что системы уравнений (2) и (3) интегрируются в замкнутом виде в случае $\psi(\lambda) = \lambda$; в предлагаемой работе дано решение систем (2) и (3) в случае $\psi(\lambda) = \lambda/3$. Рассмотрим систему (2). Введем новые функции

$$X = -x \sin(\varphi + \psi) + y \cos(\varphi + \psi), \quad Y = x \cos(\varphi + \psi) + y \sin(\varphi + \psi) \quad (4)$$

подставляя которые в систему (2), получаем

$$\frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{\psi'(\lambda) - 1}{2} Y = 0; \quad \operatorname{ctg} 2\psi \frac{\partial X}{\partial \xi} - \frac{1 + \psi'(\lambda)}{2} X + \frac{\partial Y}{\partial \xi} + \operatorname{ctg} 2\psi \frac{1 + \psi'(\lambda)}{2} Y = 0 \quad (5)$$

Исключая функцию Y , приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 X}{\partial \eta \partial \xi} + \left(\frac{\psi''}{2(1 - \psi')} + \operatorname{ctg} 2\psi \frac{1 + \psi'}{2} \right) \frac{\partial X}{\partial \eta} + \operatorname{ctg} 2\psi \frac{1 - \psi'}{2} \frac{\partial X}{\partial \xi} - \frac{1 - \psi'^2}{4} X = 0 \quad (6)$$

В случае $\psi(\lambda) = \lambda/3$ один из инвариантов Лапласа [3] уравнения (6) оказывается равным нулю. Поэтому уравнение (6) интегрируется в замкнутой форме:

$$X(\xi, \eta) = \operatorname{csc}^2 \frac{\xi + \eta}{3} \left(F_0(\eta) + \int_{\xi_0}^{\xi} F_1(\zeta) \sin \frac{\zeta + \eta}{3} d\zeta \right) \quad (7)$$

Здесь $F_0(\eta)$ и $F_1(\zeta)$ — произвольные функции. Выражение для функции $Y(\xi, \eta)$ получим из первого уравнения системы (5).

Переходим к рассмотрению поля скоростей. Введем функции

$$U = -u \sin(\varphi - \psi) + v \cos(\varphi - \psi), \quad V = u \cos(\varphi - \psi) + v \sin(\varphi - \psi) \quad (8)$$

Тогда уравнения системы (3) примут вид:

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} - \operatorname{ctg} 2\psi \frac{1 + \psi'(\lambda)}{2} U - \operatorname{ctg} 2\psi \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{1 + \psi'(\lambda)}{2} V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{1 - \psi'(\lambda)}{2} U = 0 \quad (9)$$

Исключая функцию U , получим

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} + \left(-\frac{\psi''}{2(1 - \psi')} + \operatorname{ctg} 2\psi \frac{1 + \psi'}{2} \right) \frac{\partial V}{\partial \xi} - \operatorname{ctg} 2\psi \frac{1 - \psi'}{2} \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{1 - \psi'^2}{4} V = 0 \quad (10)$$

В случае $\psi(\lambda) = \lambda/3$ один из инвариантов Лапласа уравнения (10) равен нулю. Поэтому решение имеет вид:

$$V(\xi, \eta) = \operatorname{csc}^2 \frac{\xi + \eta}{3} \left(F_2(\xi) + \int_{\eta_0}^{\eta} F_3(\zeta) \sin \frac{\zeta + \xi}{3} d\zeta \right) \quad (11)$$

Заметим, что другие интегрируемые случаи уравнений (6) и (10) могут быть получены из условия равенства нулю инвариантов Лапласа уравнений, получаемых из (6) и (10) преобразованием Лапласа [3]. Во всех случаях функция $\psi'' = 0$ будет

являться решением соответствующих нелинейных уравнений. Однако при этом значительно усложняется выражение общего интеграла.

Обратимся к условию предельного состояния в случае $\psi(\lambda) = \lambda/3$. Из уравнений (1) получаем параметрическое представление

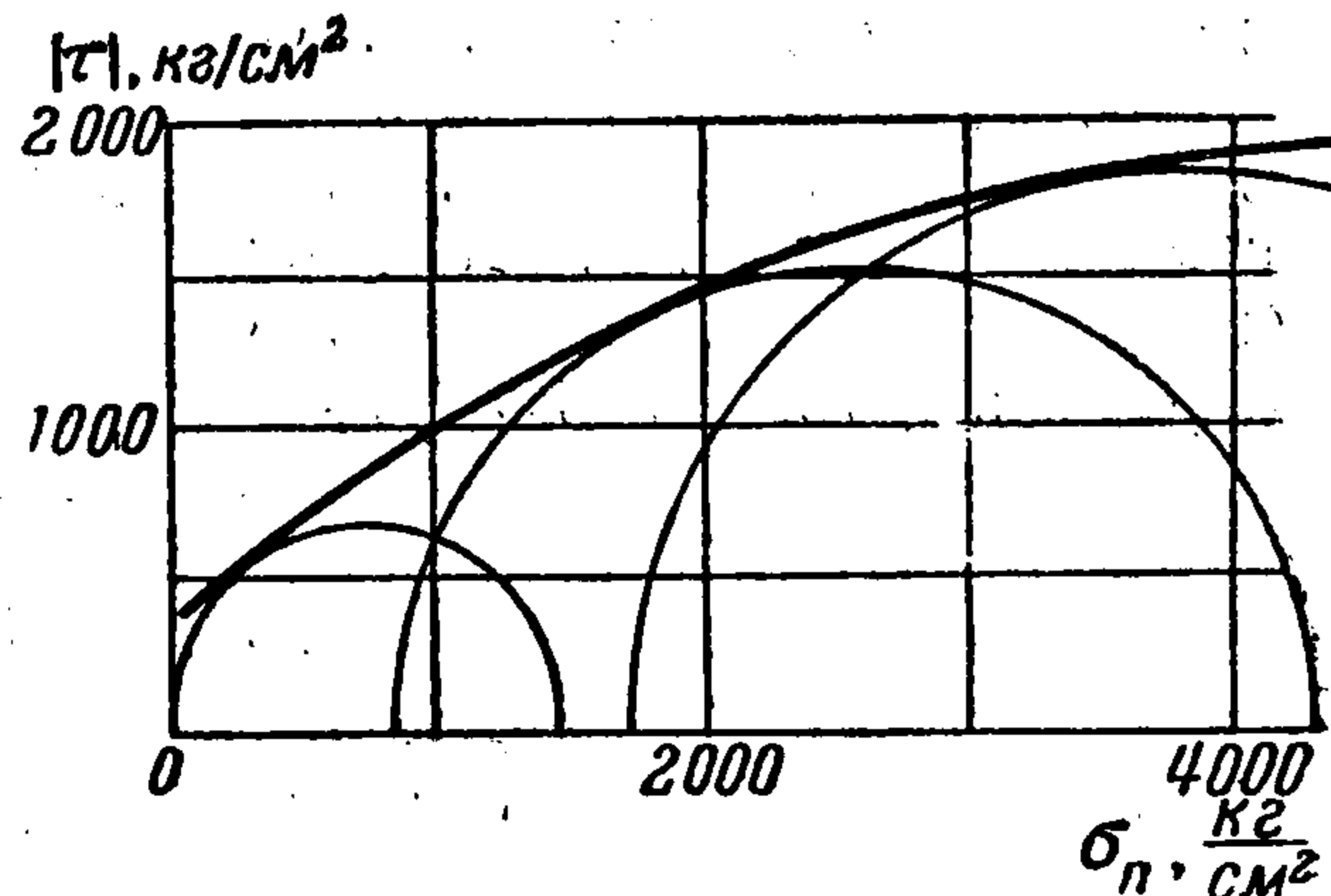
$$t = k (\sin 2\psi)^3, \quad s = 3k (\psi - 1/4 \sin 4\psi) + m \quad (k, m = \text{const}) \quad (12)$$

При плоской деформации условие предельного состояния представляют также в форме огибающей кругов напряжений. Тогда предлагаемое условие запишется в виде

$$\sigma_n = k (3\psi - \sin 4\psi + 1/8 \sin 8\psi) + m$$

$$|\tau| = 1/8 k (3 + \cos 8\psi - 4 \cos 4\psi) \quad (13)$$

На фиг. 1 представлена полученная Карманом [6] из эксперимента с песчаником огибающая кругов напряжений, которая весьма близка к кривой (13) при $k=1900 \text{ кг/см}^2$ и $m = -8850 \text{ кг/см}^2$.



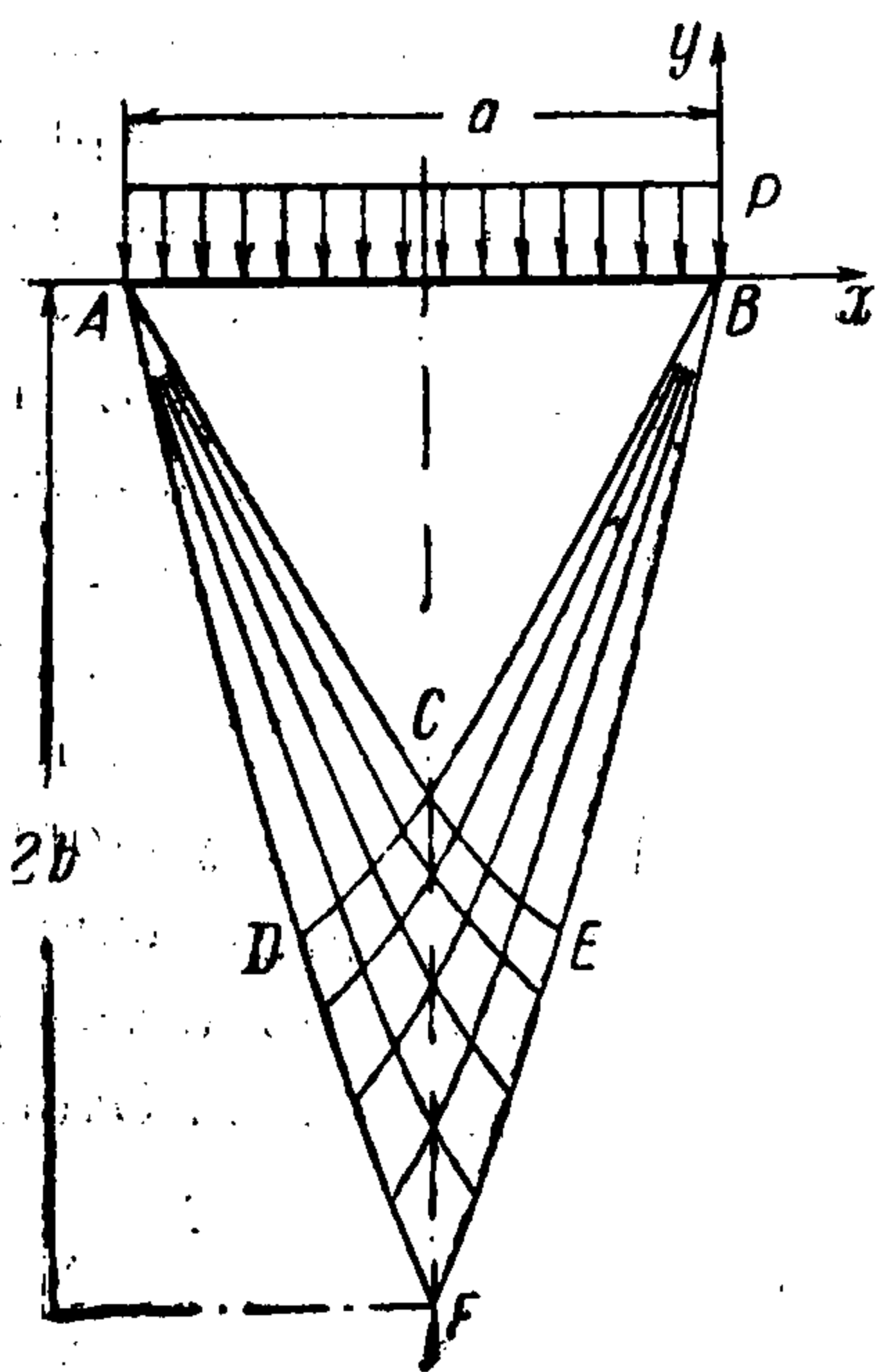
Фиг. 1.

Анализ случаев, когда хотя бы одна из величин ξ или η является постоянной в рассматриваемой области, проводится согласно работе [1]. Пусть $\xi = \xi_0 = \text{const}$. Тогда семейство характеристик $\eta = \text{const}$ состоит из прямых

$$y = x \operatorname{tg}(\varphi - \psi) + \Phi(\eta) = x \operatorname{tg}^{1/3}(\xi_0 - 2\eta) + \Phi(\eta) \quad (14)$$

Здесь $\Phi(\eta)$ — произвольная функция. Второе семейство находится интегрированием уравнения

$$dy/dx = \operatorname{tg}(\varphi + \psi) = \operatorname{tg}^{1/3}(2\xi_0 - \eta) \quad (15)$$



Фиг. 2

совместно с (14). При $\eta = \eta_0 = \text{const}$ рассмотрение аналогично. Когда обе величины постоянны, каждое из семейств характеристик состоит из параллельных прямых. Рассмотрим в качестве примера сжатие полосы высотой $2b$, у которой противолежащие участки длины a нагружены равномерно распределенным давлением p (фиг. 2). Целесообразно начало координат взять в точке B . В треугольнике ABC имеет место однородное напряженное состояние. В области ACD семейство характеристик $\eta = \text{const}$ представляет собой пучок прямых, проходящих через точку A :

$$y = (x + a) \operatorname{tg}^{1/3}(\xi_0 - 2\eta) \quad (16)$$

Из (16) и (15) получаем дифференциальное уравнение для характеристик второго семейства:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \left[\frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x+a} + \xi_0 \right) \right] \quad (17)$$

Отсюда интегрируя, получаем параметрическое представление этих характеристик

$$x(\xi_0, \eta) = C \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^{2/3}(\xi_0 - 2\eta)} - \operatorname{tg}^{1/3}(\xi_0 - 2\eta)}{\left[\sqrt{1 + \operatorname{tg}^{2/3}(\xi_0 - 2\eta)} - \operatorname{tg}^{1/3}(\xi_0 - 2\eta) - \frac{1 - \operatorname{tg}^{1/2} \xi_0}{1 + \operatorname{tg}^{1/2} \xi_0} \right]^2} - a$$

$$y(\xi_0, \eta) = (x + a) \operatorname{tg}^{1/3}(\xi_0 - 2\eta) \quad (18)$$

Для характеристики CD постоянная C определяется из условия, что $x = -a/2$ при $\eta = \eta_0$. Аналогичным образом получаем параметрическое представление для характеристик в области BCE . Опуская промежуточные выкладки, приводим выражения функции $X(\xi, \eta)$ на характеристиках CD и CE

$$X(\xi_0, \eta) = -x(\xi_0, \eta) \sin^{1/3}(2\xi_0 - \eta) + [x(\xi_0, \eta) + a] \operatorname{tg}^{1/3}(\xi_0 - 2\eta) \cos^{1/3}(2\xi_0 - \eta) \quad (19)$$

$$X(\xi, \eta_0) = 0$$

Отсюда получаем решение в области $CDEF$

$$X(\xi, \eta) = \csc^{2/3}(\xi + \eta) \sin^{2/3}(\xi_0 + \eta) X(\xi_0, \eta) \quad (20)$$

Далее следует определить результирующее напряжение σ_{x_2} по вертикальной оси симметрии и из условия равенства нулю получить искомую связь между a , b и p .

Поступила 21 IV 1961

ЛИТЕРАТУРА

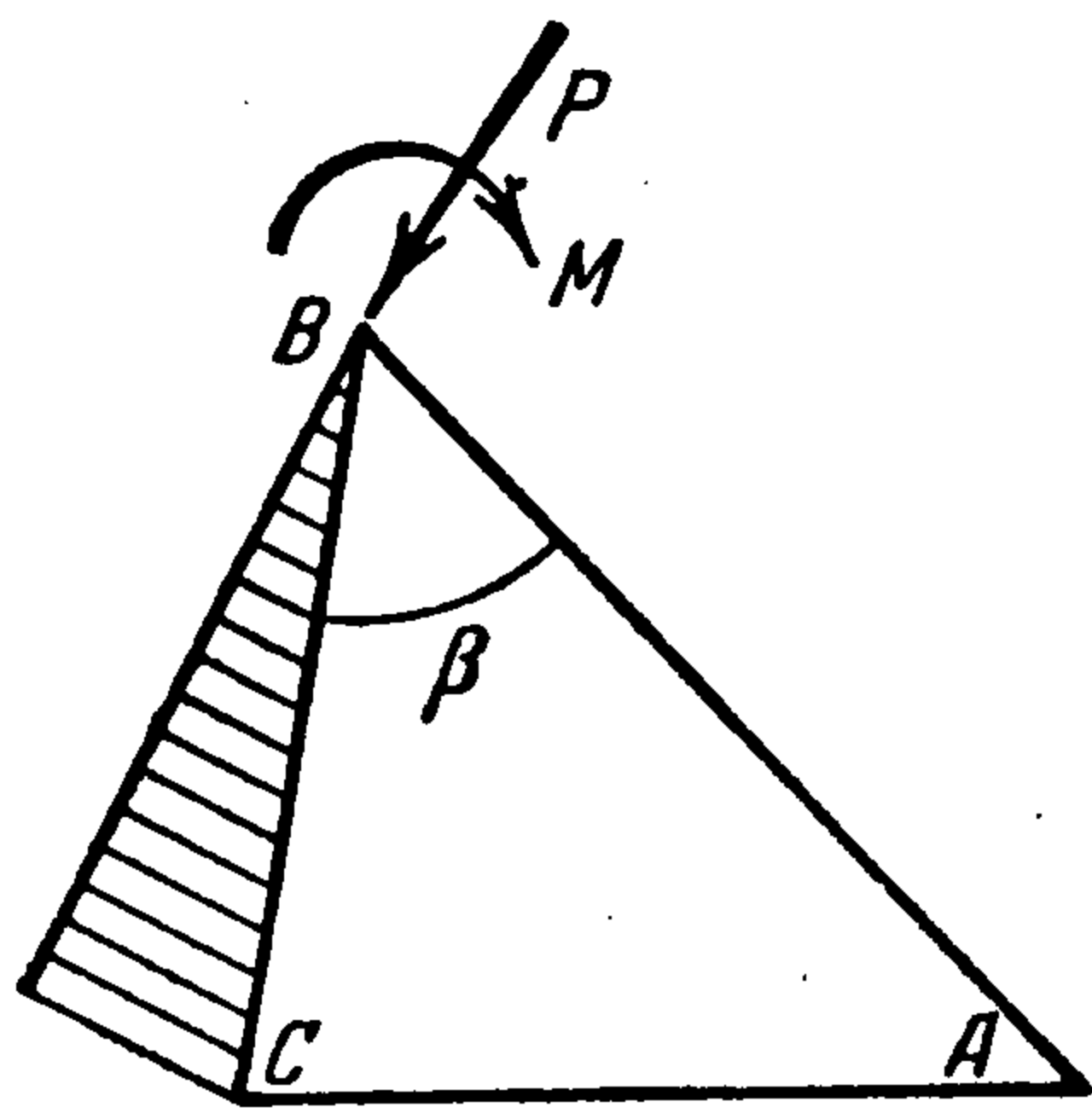
1. Соколовский В. В. Об уравнениях теории пластичности. ПММ, 1955, т. XIX, вып. 1.
2. Соколовский В. В. Теория пластичности. Гостехиздат, 1950.
3. Гурса Э. Курс математического анализа. т. 3, ч. 1, ГТТИ НТТИ, 1933.
4. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. Гостехиздат, 1961.
5. Кузнецов Г. Н. Механические свойства горных пород. Углетехиздат, 1947.

О ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ КЛИНА

М. М. Филоненко-Бородич

(Москва)

Известно несколько решений этой задачи в случае нагрузок клина на его гранях и в вершине; таковы, например, случаи, показанные на фиг. 1. Однако, каждое из этих решений не является единственным, так как граничные условия задаются только на гранях клина, который предполагается бесконечным, поведение же напряжений на бесконечности заранее не обуславливается.



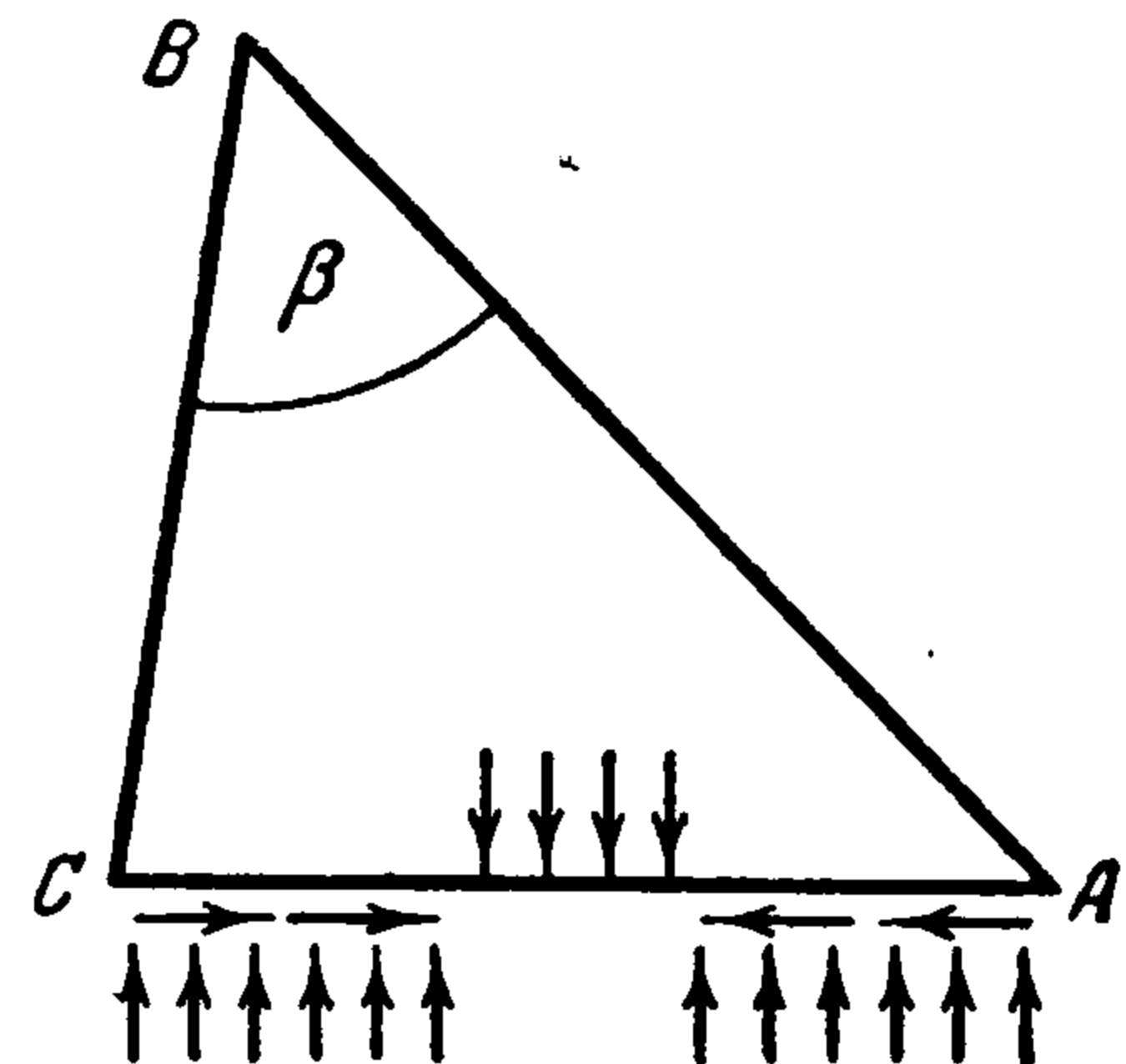
Фиг. 1

Действительно, рассмотрим (фиг. 2) верхнюю часть клина, отделенную сечением AC , т. е. треугольник ABC , и предположим, что он нагружен по грани AC произвольной самоуравновешенной нагрузкой, причем грани BA и BC остаются свободными; в треугольнике этом возникнет напряженное состояние, зависящее от характера нагрузки, приложенной на грани AC . Наложим полученное таким путем напряженное состояние на то состояние, которое имеется в любой из указанных выше задач; граничные условия задачи при этом сохранятся, но напряженное состояние изменится в зависимости от нагрузки на грани AC . Если нагрузку, ограниченную лишь условием равенства нулю главного момента и главного вектора ее, в остальном будем считать произвольной, то для выбранной задачи можем получить бесчисленное множество решений при заданных условиях на гранях BA и BC , что и требовалось доказать. Отсюда следует, что для полного решения задачи для клина представляет интерес решить задачу о треугольнике (фиг. 2), несущем произвольную, самоуравновешенную нагрузку на одной грани AC ; остальные две грани BA и BC свободны.

1. В предлагаемой работе для решения указанной сейчас задачи применен вариационный метод Кастильяно; искомый тензор напряжений представим как сумму двух тензоров

$$X_x = X_x^0 + \sum A_m X_x^{(m)}, \quad Y_y = Y_y^0 + \sum A_m Y_y^{(m)}$$

$$X_y = X_y^0 + \sum A_m X_y^{(m)} \quad (1)$$



Фиг. 2

Здесь тензор, компоненты которого отмечены индексом 0, есть основной тензор, удовлетворяющий дифференциальным уравнениям равновесия и граничным условиям задачи (фиг. 2). Вторые члены в формулах (1) составляют корректирующий тензор, также удовлетворяющий уравнениям равновесия, но оставляющий границу области ABC свободной от напряжений; этим двум условиям должен удовлетворять каждый