ОБ УЧЕТЕ ВЛИЯНИЯ ЭФФЕКТА БАУШИНГЕРА НА ПОТЕРЮ УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТОЙ ПОЛОСЫ

Л. В. Ершов

(Москва)

При исследовании потери устойчивости стержней за пределом упругости в постановке Кармана [1] и Шенли [2] достаточно знать локальные характеристики материала при данном значении критической силы; критическая нагрузка может зависеть от касательного, секущего модулей в данной точке диаграммы σ — ε и модуля упругости (разумеется, и от геометрических характеристик стержня). Таким образом, эффект Баушингера, являющийся следствием приобретенной анизотропии материала, никак не учитывается. Это обстоятельство обусловлено приближениями, используемыми в постановках Кармана, Шенли. В предлагаемой работе, следуя идеям Л. С. Лейбензона [3] и А. Ю. Ишлинского [4] рассматривается задача о потере устойчивости равномерно сжатой полосы в случае плоской деформации.

Используются представления Шенли [2].

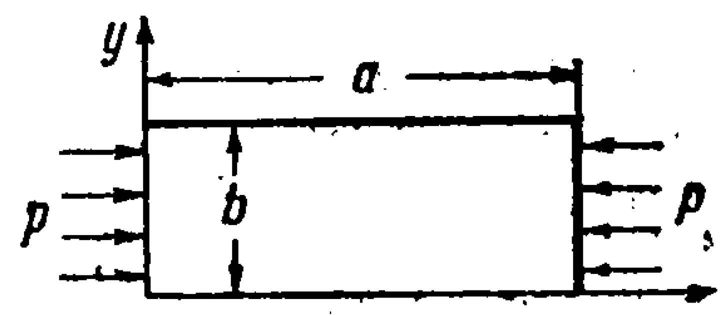
Показано, что при всех прочих равных условиях критическая сила не зависит от характера приобретенной анизотропии.

Рассмотрим полосу прямоугольной формы со сторонами a и b, сжатую равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью p (фиг. 1). Используем соотношения теории пластичности Прагера [5] — А. Ю. Ишлинского [6].

Условие пластичности примем в виде [7]

$$[(\sigma_x - c\varepsilon_{[x]}) - (\sigma_y - c\varepsilon_{[y]})]^2 + 4(\tau_{xy} - c\varepsilon_{[xy]})^2 = 4f^2(\Gamma) \qquad (1)$$

$$\Gamma = \frac{1}{4}(\varepsilon_{[x]} - \varepsilon_{[y]})^2 + \varepsilon_{[xy]}^2$$



Фиг. 1

где σ_{ij} — компоненты напряжения, ε_{ij} — компоненты деформации.

Здесь и в дальнейшем условимся квадратными скобками у индексов отмечать величины, относящиеся к пластической области, а круглыми скобками — к упругой, там где это не требуется, скобки опускаются.

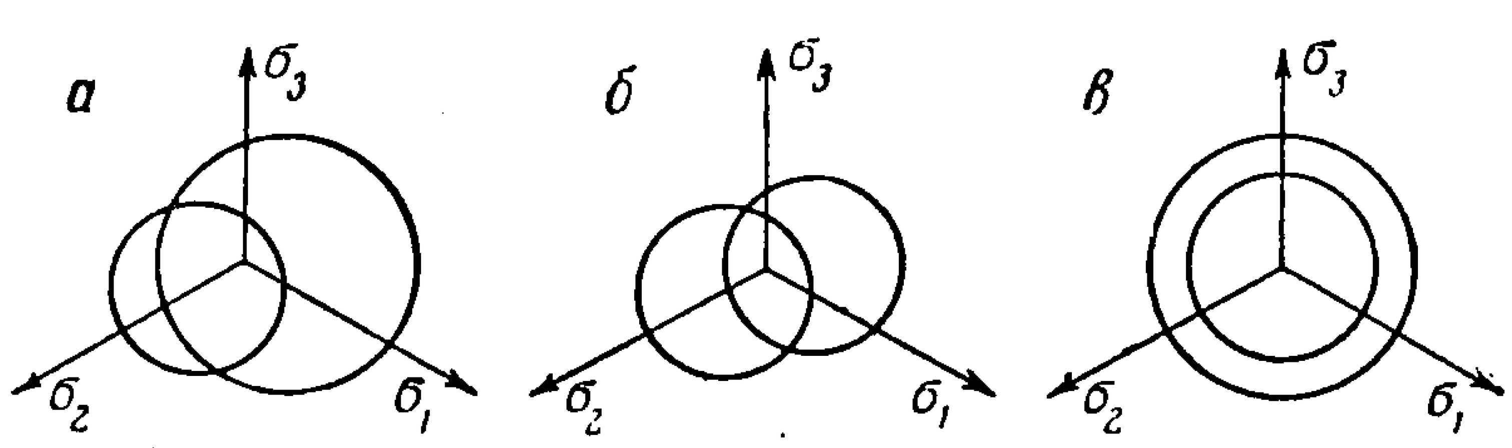
Соотношения ассоциированного закона пластического течения примут вид

$$\frac{d\varepsilon_{[x]}}{(\sigma_x - c\varepsilon_{[x]}) - (\sigma_y - c\varepsilon_{[y]})} = \frac{d\varepsilon_{[y]}}{(\sigma_y - c\varepsilon_{[y]}) - (\sigma_x - c\varepsilon_{[x]})} = \frac{d\varepsilon_{[xy]}}{2(\tau_{xy} - c\varepsilon_{[xy]})} \qquad (2)$$

Полная деформация слагается из упругой и пластической

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{(ij)} + \varepsilon_{[ij]} \qquad (3)$$

Для простоты будем считать материал пластины несжимаемым.



Фиг. 2

В общем случае соотношения (1), (2) определяют поведение анизотропно упрочняющегося пластического материала, поверхность текучести которого при деформировании перемещается и расширяется (фиг. 2, *а*). В случае, если $f = \mathrm{const}$ имеет место перемещение поверхности текучести как жесткого целого (фиг. 2, *б*).

В случае, если $c = 0$ имеет место изотропное упрочнение материала и поверхность текучести изменяется подобно самой себе (фиг. 2, *в*).

Ограничимся случаем линейного упрочнения, условие пластичности (1) примет вид

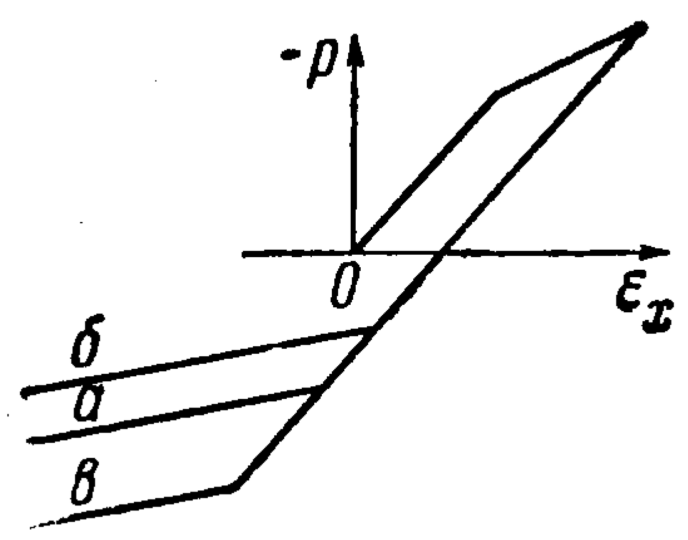
$$\sqrt{[(\sigma_x - c\varepsilon_{[x]}) - (\sigma_y - c\varepsilon_{[y]})]^2 + 4(\tau_{xy} - c\varepsilon_{[xy]})^2} = 2k + d\cdot\sqrt{(\varepsilon_{[x]} - \varepsilon_{[y]})^2 + 4\varepsilon_{[xy]}^2} \quad (4)$$

где c, d, k — постоянные.

При сжатии полосы за пределом упругости до потери устойчивости будет иметь место

$$\sigma_x = -p, \qquad \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \qquad \varepsilon_x + \varepsilon_y = 0, \qquad \varepsilon_{xy} = 0 \quad (5)$$

Из (3), (4), (5) получим зависимость между сжимающей нагрузкой p и деформацией сжатия ε_x



Фиг. 3

$$-p\left(1 + \frac{c+d}{G}\right) = 2k + 2(c+d)\,\varepsilon_x \quad (6)$$

Следовательно, если величина $c+d$ есть некоторая фиксированная постоянная q (касательный модуль), то характер зависимости $(-p - \varepsilon_x)$ один и тот же для любого условия пластичности (4), т. е. эксперимент на сжатие не позволяет определить какое условие пластичности (4) имеет место.

На фиг. 3 показана диаграмма зависимости $(-p - \varepsilon_x)$ для условий текучести, соответствующих фиг. 2.

Выясним, будет ли критическая сила зависеть только от величины q или еще и от параметров c и d.

Предположим, что полоса потеряла устойчивость при некотором $p = p^*$.

Решение задачи будем искать в виде

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_x', \ldots, \varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + \varepsilon_x', \ldots, u = u^0 + u', \ldots \quad (7)$$

Компоненты с нуликом наверху определяют напряженное и деформированное состояние полосы до потери устойчивости, они заданы формулами (5) — (6). Компоненты с индексом штрих наверху есть компоненты возмущения при потере устойчивости. Задача сводится к определению компонент возмущения.

Уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_x'}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}'}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\tau_{xy}'}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y'}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

В соотношениях закона пластического течения (2) фигурируют приращения пластических деформаций $d\varepsilon_{[ij]}$. При потере устойчивости компоненты возмущения ε_{ij}' малы и совпадают с приращениями деформации, поэтому можно принять

$$d\varepsilon_{[ij]} \approx \varepsilon_{[ij]}'$$

Линеаризируя соотношения (2) и (4) для компонент пластической деформации будем иметь

$$\sigma_x' - \sigma_y' = 2q\varepsilon_{[x]}', \qquad \varepsilon_{[xy]}' = 0 \quad (9)$$

Используя зависимости закона упругого деформирования из (9) с учетом (3), получим

$$\sigma_x' - \sigma_y' = \frac{2q}{[1 + q/G]}\,\varepsilon_x', \qquad \tau_{xy}' = 2G\varepsilon_{xy}' \quad (10)$$

Для компонент возмущенного состояния имеют место граничные условия

$$\sigma_y' = 0, \qquad \tau_{xy}' + p\frac{\partial v'}{\partial x} = 0 \quad \text{при } y = 0,\ y = b \quad (11)$$

Полагая $u' = \partial\Phi/\partial y$, $v' = -\partial\Phi/\partial x$, удовлетворим уравнению несжимаемости. Для определения функции $\Phi(x, y)$ из (8) и (10) с учетом зависимостей между де формациями и перемещениями получим уравнение

$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4} - 2\beta^2 \frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4} = 0 \qquad \left(\beta^2 = \frac{1 - q/2G}{1 + q/2G}\right) \tag{12}$$

Общий интеграл уравнения (12) имеет вид

$$\Phi(x, y) = [C_1 Y_1(y) + C_2 Y_2(y) + C_3 Y_3(y) + C_4 Y_4(y)] \cos nx \tag{13}$$

Здесь

$$Y_1(y) = \operatorname{ch} \alpha_1 y \sin \alpha_2 y, \qquad Y_2(y) = \operatorname{ch} \alpha_1 y \cos \alpha_2 y$$

$$Y_3(y) = \operatorname{sh} \alpha_1 y \cos \alpha_2 y, \qquad Y_4(y) = \operatorname{sh} \alpha_1 y \sin \alpha_2 y$$

($\alpha_1 = n\sqrt{(1 - \beta^2)/2}$, $\alpha_2 = n\sqrt{(1 + \beta^2)/2}$, C_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ — произвольные постоянные интегрирования.

Выражая компоненты напряжения и перемещения через функцию (13) и подставляя их в граничные условия (11), получим однородную линейную систему алгебраических уравнений относительно C_i.

При потере устойчивости $C_i \neq 0$, поэтому определитель системы равен нулю. Отсюда будем иметь уравнение, определяющее величину критической силы

$$\gamma = \sqrt{1 - \beta^4}\, \frac{(\alpha_2 b) \operatorname{sh} \alpha_1 b - (\alpha_1 b) \sin \alpha_2 b}{(\alpha_2 b) \sin \alpha_2 b} \qquad (\gamma = p^*/G) \tag{14}$$

Для удовлетворения геометрических условий на краях полосы примем $n = m\pi/a$, m — число полуволн ($m \geqslant 1$). Считая ширину полосы достаточно малой, разлагая правую часть соотношения (14) в ряд и ограничиваясь малыми второго порядка, получим формулу

$$\gamma = \frac{1 - \beta^2}{6} \frac{m^2 \pi^2 b^2}{a^2} \tag{15}$$

Рассмотрим отношение $\eta = [\gamma]/(\gamma)$, где $[\gamma]$ определяется согласно (15), а (γ) — по формуле Брайена для критического параметра при потере устойчивости полосы в упругой области. Тогда из (15) следует, что

$$\eta = \frac{q}{2G + q}$$

Таким образом, критическая сила зависит только от постоянных G и q (что также следует из теории устойчивости стержней).

Параметр c, характеризующий влияние приобретенной анизотропии (эффекта Баушингера), в выражение для критической силы не входит.

Автор благодарит А. Ю. Ишлинского за внимание к работе и замечания по ней.

Поступила 20 XII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Karman Th. Untersuchungen über Knickfestigkeit Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 81, Berlin, 1910.
2. Shanley F. R. The Column Paradox, Journal of the Aeronautical Sciences, 13, 1946.
3. Лейбензон Л. С. О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочек. Собр. тр., 1951, т. I.
4. Ишлинский А. Ю. Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости. Укр. матем. журнал, 1954, т. 6, № 2.
5. Prager W. Der Einfluss der Verformung auf die Fliessbedingung Zähplastischer Körper, ZAMM, Bd 15, H. 1/2, s. 76—80 (1935); (русский пер. в сб. «Теория пластичности» под редакцией Ю. Н. Работнова, ГИИЛ, М., 1948.)
6. Ишлинский А. Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением. Укр. матем. журнал, 1954, т. 6, № 3.
7. Ивлев Д. Д. К теории плоской деформации упрочняющегося пластического материала. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 4.