

Здесь

$$V = [CD], \quad 2U = [AD] - [BC], \quad M = [DE], \quad L = [CE]$$

Перемножая вторые из уравнений (2), найдем

$$T^2 du^2 + 2UT du dv + TV dv^2 + 2(U dv + T du)(K dy - H dx) + (K dy - H dx)^2 = 0 \quad (6)$$

Если уравнения (1) однородные $E_1 = E_2 = 0$, то $K = H = M = L = 0$ и уравнение (5) совпадает с уравнением характеристик (6); кривая Γ , а следовательно, и кривая γ являются в этом случае характеристиками.

Если же система (1) неоднородна $E_1 \neq 0$, $E_2 \neq 0$ и, следовательно, величины K, L, M, H отличны от нуля, то уравнение (5), вообще говоря, не совпадает с уравнением (6).

Следовательно, в этом случае кривые γ и Γ не являются характеристиками.

Последнее обстоятельство является существенным, так как затруднения в решении краевых задач методом характеристик, возникающие при существовании кривой $J = 0$, в случае когда система (1) неоднородна, не могут быть преодолены применением метода С. А. Христиановича [2] введения многолистных поверхностей, так как край складки такой поверхности (кривая Γ) не совпадает с характеристикой и может быть определен лишь, если известно само решение [3].

В литературе встречаются неправильные утверждения, что кривая $J = 0$ является характеристикой и в случае, когда система (1) неоднородна (см. книгу В. В. Соколовского [4], где имеется ряд решений, основанных на указанном утверждении).

Поступила 12 III 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. ИИЛ, 1950.
2. Христианович С. А. Неустановившееся движение в каналах и реках. Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. Изд-во АН СССР, 1938.
3. Рыжов О. С. О течениях в окрестности поверхности перехода в соплах Лаваля. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 4.
4. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. Физматгиз, 1960.

ТОНКАЯ ПЛАСТИНА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛУЧАЙНОЙ НАГРУЗКИ

В. А. Пальмов

(Ленинград)

Рассматриваемые здесь задачи имеют непосредственное применение к расчету современных телескопов (рефлекторов). Дело в том, что для больших телескопов прогибы отражающей поверхности зеркала, вызванные его собственным весом, приводят к недопустимому искажению изображения. Для уменьшения этих прогибов используется специальная система разгрузки. В трех точках зеркало фиксируется на трубе телескопа при помощи шарнирных опор, а в ряде точек на задней поверхности к нему прикладывается система разгружающих сил, которые подбираются так, чтобы уменьшить прогибы зеркала от собственного веса. Описанная система подвески позволяет проектировать зеркала приемлемого веса, с прогибами отражающей поверхности, не превосходящими допустимых. Получаемая конструкция зеркала, с механической точки зрения, представляет сплошную или ребренную пластинку. При больших размерах зеркала сравнительно малые ошибки в осуществлении разгружающих усилий могут привести к недопустимым искажениям отражающей поверхности.

Найденные здесь решения могут применяться для определения нормальных прогибов зеркала (как пластинки), вызванных ошибками в разгружающих силах.

1. Обозначим через $\alpha(x, \xi)$ функцию влияния для пластинки при определенных условиях ее закрепления. По своему смыслу $\alpha(x, \xi)$ — нормальный прогиб пластинки в точке с двумерной векторной координатой x , вызванный приложением в точке ξ единичной сосредоточенной силы, перпендикулярной пластинке. При действии системы

сосредоточенных сил p_j в точках с координатами ξ_j прогиб пластинки имеет выражение

$$w = w(x, p_j) = \sum_j \alpha(x, \xi_j) p_j \quad (1.1)$$

Положим, что величины сил p_j могут принимать любые значения в диапазоне $[-\sigma_j, +\sigma_j]$, где σ_j — некоторые положительные величины. Требуется определить максимальный по абсолютной величине прогиб пластинки при самых неблагоприятных значениях p_j . Обозначим этот прогиб через U . По определению имеем

$$U = \max |w(x, p_j)| \quad (x \in s, |p_j| \leq \sigma_j) \quad (1.2)$$

Здесь s — множество всех точек срединной плоскости пластинки.

Так как функция $w(x, p_j)$, как прогиб пластинки, непрерывна, разыскание максимума $|w|$ можно производить в два приема: сначала найти максимум $|w|$ при изменении всех p_j , а затем при изменении x

$$U = \max_x \max_p |w(x, p_j)| \quad (x \in s, |p_j| \leq \sigma_j) \quad (1.3)$$

Внутренний максимум легко определяется, если учесть представление прогиба по формуле (1.1)

$$\max_p \left| \sum_j \alpha(x, \xi_j) p_j \right| = \sum_j |\alpha(x, \xi_j)| \sigma_j \quad (p_j \leq \sigma_j) \quad (1.4)$$

Действительно, модуль суммы достигает наибольшего значения, когда все слагаемые принимают наибольшие по величине значения и имеют одинаковые знаки. Таким образом

$$U = \max_x \sum_j |\alpha(x, \xi_j)| \sigma_j \quad (x \in s) \quad (1.5)$$

2. В случае большого числа сил маловероятна ситуация, когда они примут наиболее неблагоприятное распределение. Более естественно предположить, что силы p_j — независимые случайные величины.

Определим статистические характеристики прогиба пластинки. Допустим, кроме сказанного, что силы p_j распределены по нормальному закону с нулевым значением математического ожидания и дисперсией D_j . Так как прогиб пластинки представляет однородную линейную функцию сил p_j , он также распределен по нормальному закону и имеет нулевое математическое ожидание. Среднеквадратическое значение прогиба $\Delta(x)$ в данном случае определяется следующей формулой [1]:

$$\Delta(x) = \left(\sum_j \alpha^2(x, \xi_j) D_j \right)^{1/2} \quad (2.1)$$

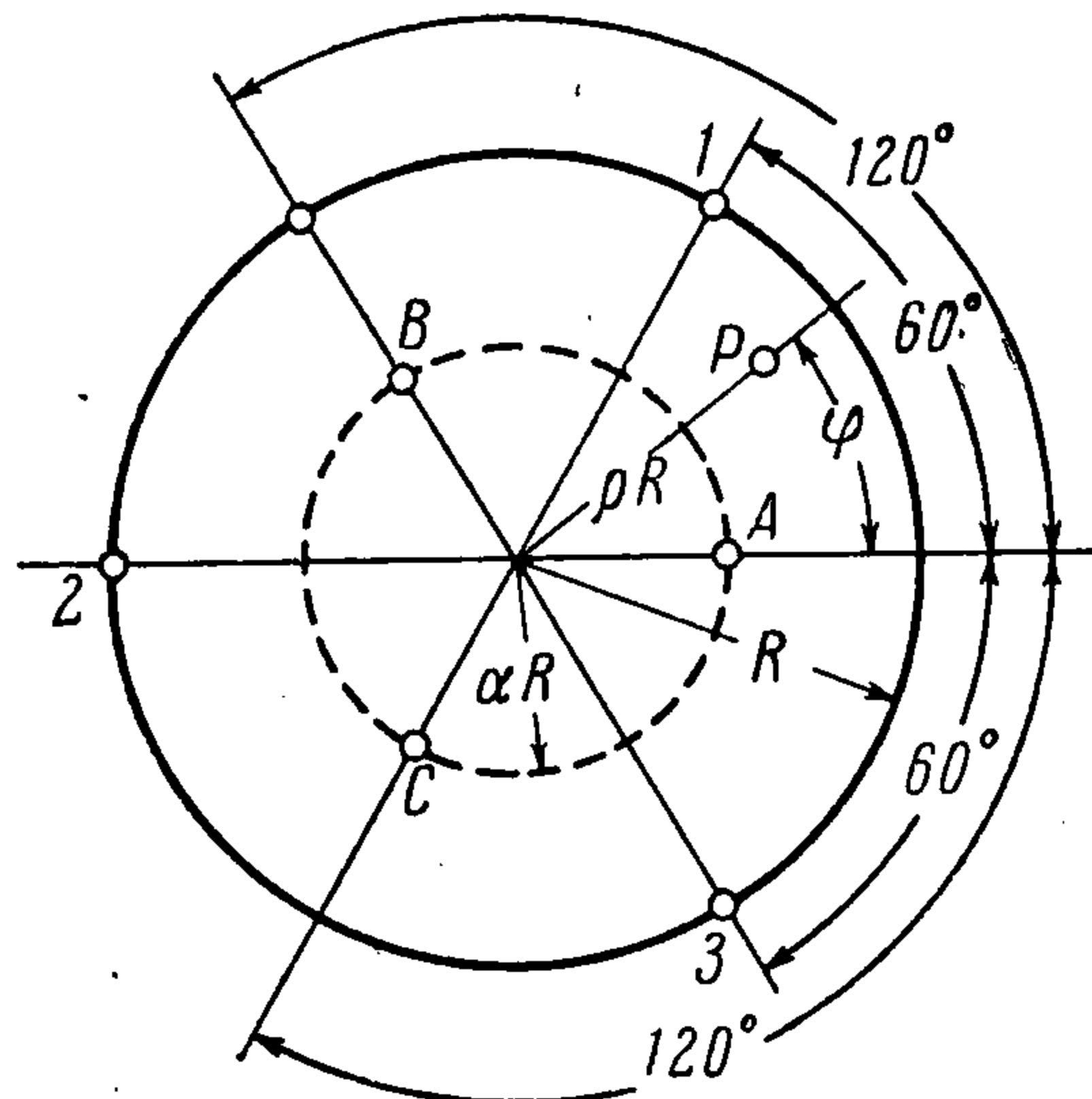
В качестве оценки прогиба может быть использована максимальная в пределах пластинки величина удвоенного среднеквадратического прогиба

$$K = 2 \max \Delta(x) \quad (x \in s) \quad (2.2)$$

так как при нормальном распределении случайная величина $w(x)$ с вероятностью 0.95 заключена в интервале $[-2\Delta(x), +2\Delta(x)]$.

3. Построим функцию влияния для пластинки постоянной жесткости D , шарнирно-опертой в трех точках A, B, C , как показано на фиг. 1. Край пластинки предполагается свободным от усилий и моментов, а прогиб в точках A, B, C равен нулю. Опоры расположены на расстоянии aR от центра, причем R — радиус пластинки, а a — относительное расстояние опор от центра ее.

Для определения функции влияния необходимо найти прогиб пластинки в точке с полярными координатами rR, θ , вызванный действием единичной сосредоточенной силы в точке P (фиг. 1) с координатами $\rho R, \varphi$ и опорных реакций A, B, C , которые



Фиг. 1

в силу условий равновесия пластинки имеют следующие значения:

$$A = -\frac{1}{3} \left[1 + 2 \frac{\rho}{a} \cos \varphi \right], \quad B = -\frac{1}{3} \left[1 + 2 \frac{\rho}{a} \cos \left(\varphi - \frac{2\pi}{3} \right) \right] \quad (3.1)$$

$$C = -\frac{1}{3} \left[1 + 2 \frac{\rho}{a} \cos \left(\varphi + \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

Задача о прогибах пластинки под действием системы произвольно расположенных сосредоточенных сил рассматривалась в работах А. И. Лурье [2], Бассали [3] и др. и решение для обсуждаемого здесь варианта может быть получено как частный случай соответствующих выражений в работах [1, 2]. Однако целесообразно получить решение непосредственно ввиду очевидных упрощений, вносимых симметрией расположения опор A, B, C . Выражение функции влияния будем искать в виде

$$\alpha(r, \theta; \rho, \varphi) = \frac{R^2}{8\pi D} \quad w = \frac{R^2}{8\pi D} (w_0 + w^*) \quad (3.2)$$

Здесь $R^2 w_0 / 8\pi D$ — частное решение уравнения изгиба пластинки, учитывающее действие сосредоточенных сил

$$w_0 = z^2 \ln z + Az_1^2 \ln z_1 + Bz_2^2 \ln z_2 + Cz_3^2 \ln z_3 \quad (3.3)$$

$$z = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi)}, \quad z_2 = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\theta - 2/3\pi)} \quad (3.4)$$

$$z_1 = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}, \quad z_3 = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\theta + 2/3\pi)}$$

а w^* — бигармоническая функция, не имеющая особенностей в своих производных по r и θ до третьего порядка включительно по всей области $r < 1$.

Выражение w^* возьмем в виде ряда [4]

$$w^* = R_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (R_n \cos n\theta + R'_n \sin n\theta) \quad (3.5)$$

где

$$R_n = (A_n + B_n r^2) r^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad R'_n = (A'_n + B'_n r^2) r^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Используя известное разложение

$$\ln z = \ln r - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\rho}{r} \right)^n \cos n(\theta - \varphi) \quad (r > \rho) \quad (3.6)$$

а также выражение опорных реакций по формулам (3.1) получим следующее представление w_0 в виде ряда Фурье по угловой координате θ , справедливое при $r > \rho, a$:

$$w_0 = (\rho^2 - a^2) (\ln r + 1) - \frac{\rho}{2r} (\rho^2 - a^2) (\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi) +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ \cos n\theta \left[\left(\frac{\rho}{r} \right)^n \left(\frac{r^2}{n-1} - \frac{\rho^2}{n+1} \right) \cos n\varphi - \left(\frac{a}{r} \right)^n \left(\frac{r^2}{n-1} - \frac{a^2}{n+1} \right) C_n \right] + \right.$$

$$\left. + \sin n\theta \left[\left(\frac{\rho}{r} \right)^n \left(\frac{r^2}{n-1} - \frac{\rho^2}{n+1} \right) \sin n\varphi - \left(\frac{a}{r} \right)^n \left(\frac{r^2}{n-1} - \frac{a^2}{n+1} \right) S_n \right] \right\} \quad (3.7)$$

Здесь введены обозначения

$$C_n = \frac{2}{3} \frac{\rho}{a} \cos \varphi \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{3} \right) + \frac{1}{3} \left(1 + 2 \cos \frac{2\pi n}{3} \right)$$

$$S_n = \frac{2}{3} \sqrt{3} \sin \varphi \sin \frac{2\pi n}{3}$$

Край пластинки свободен от усилий и изгибающих моментов, поэтому необходимо выполнение следующих условий [4]:

$$\Delta \alpha - (1 - \nu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \Delta \alpha + (1 - \nu) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \alpha}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad \text{при } r = 1$$

Подстановка в (3.8) выражения функции влияния по формуле (3.2) с учетом найденных разложений приводит к системе уравнений, определяющей величины A_n и B_n . Решение этой системы таково:

$$B_0 = \frac{1-\nu}{2(1+\nu)} (\rho^2 - a^2)$$

$$B_1 = \frac{1-\nu}{2(3+\nu)} \rho (\rho^2 - a^2) \cos \varphi, \quad B_1' = \frac{1-\nu}{2(3+\nu)} \rho (\rho^2 - a^2) \sin \varphi \quad \text{при } n \geq 2$$

$$B_n = -\frac{1-\nu}{3+\nu} \left[\rho^n \left(\frac{1}{n} - \frac{\rho^2}{n+1} \right) \cos n\varphi - a^n \left(\frac{1}{n} - \frac{a^2}{n+1} \right) C_n \right]$$

$$A_n = -\frac{n+1}{n} B_n + \frac{3+\nu}{1-\nu} \frac{1}{n^2(n-1)} (\rho^n \cos n\varphi - a^n C_n)$$

$$B_n' = -\frac{1-\nu}{3+\nu} \left[\rho^n \left(\frac{1}{n} - \frac{\rho^2}{n+1} \right) \sin n\varphi - a^n \left(\frac{1}{n} - \frac{a^2}{n+1} \right) S_n \right]$$

$$A_n' = -\frac{n+1}{n} B_n' + \frac{3+\nu}{1-\nu} \frac{1}{n^2(n-1)} (\rho^n \sin n\varphi - a^n S_n)$$

Чтобы найти постоянные A_0 , A_1 , A_1' , представим w^* в таком виде:

$$w^* = A_0 + (A_1 \cos \theta + A_1' \sin \theta) r + v \quad (3.9)$$

где в соответствии с формулой (3.5) имеем

$$v = \sum_{n=2}^{\infty} (A_n \cos n\theta + A_n' \sin n\theta) r^n + \sum_{n=0}^{\infty} (B_n \cos n\theta + B_n' \sin n\theta) r^{n+2} \quad (3.10)$$

Подставим (3.9) в (3.2) и удовлетворим условиям опирания пластинки в точках A , B , C

$$A_0 + A_1 a + w_0(A) + v(A) = 0$$

$$A_0 + A_1 a \cos \frac{2\pi}{3} + A_1' \sin \frac{2\pi}{3} + w_0(B) + v(B) = 0 \quad (3.11)$$

$$A_0 + A_1 a \cos \frac{2\pi}{3} - A_1' \sin \frac{2\pi}{3} + w_0(C) + v(C) = 0$$

Здесь $w_0(A), \dots, v(C)$ — значения функций w_0 и v в точках A ($r = a, \theta = 0$), B ($r = a, \theta = 2/3 \pi$), C ($r = a, \theta = -2\pi/3$).

Решение системы (3.11) таково:

$$A_0 = -\frac{1}{3} [w_0(A) + w_0(B) + w_0(C)] - \frac{1}{3} [v(A) + v(B) + v(C)]$$

$$A_1' = -\frac{1}{a\sqrt{3}} [w_0(B) - w_0(C) + v(B) - v(C)] \quad (3.12)$$

$$A_1 = -\frac{1}{a} [A_0 + w_0(A) + v(A)]$$

Таким образом, найдены значения всех величин A_n, B_n, A_n', B_n' , входящих в выражение w^* , которые, очевидно, являются функциями координат точки приложения единичной силы (ρ, φ). Поэтому

$$w = w(r, \theta; \rho, \varphi)$$

4. В случае $\sigma_j = \sigma_0 = \text{const}$ формула (1.5) упрощается. Если, кроме того, силы ρ_j приложены к пластинке в узлах регулярной сетки и число их велико, сумма может быть приближенно заменена интегралом

$$U \approx \sigma_0 n \max_S \frac{1}{S} \int_S |\alpha(x, \xi)| d\xi \quad (x \in S) \quad (4.1)$$

где S — площадь пластинки, n — полное число сосредоточенных сил, действующих на пластинку, включая и опорные реакции, $d\xi$ — дифференциал площади. Замена суммы интегралом до некоторой степени облегчает вычисления, так как в интеграле не учитывается тот факт, по какой конкретной системе к пластинке приложены

силы (в вершинах квадратной, треугольной и других сеток). Ошибка, возникающая при этой замене, для большого n , очевидно, мала.

Подставляя в (4.1) выражение (3.2) и $d\xi = R^2 \rho d\rho d\varphi$, получим

$$U = \frac{R^2 \sigma_0 n}{8\pi D} \max \left(\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} |w(r, \theta; \rho, \varphi)| \rho d\varphi d\rho \right) \quad \left(\begin{array}{l} r \leq 1 \\ |\theta| \leq \pi \end{array} \right) \quad (4.2)$$

Числовые расчеты показывают, что величина в круглых скобках достигает наибольшего значения в точках 1, 2, 3. Поэтому

$$U = \frac{R^2 \sigma_0 n}{8\pi D} \psi \quad \left(\psi = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} |w(1, \pi; \rho, \varphi)| \rho d\varphi d\rho \right) \quad (4.3)$$

Так как функция влияния зависит от a , ψ — функция a . Зависимость $\psi = \psi(a)$ показана на фиг. 2.

Аналогичные рассуждения приводят к следующему выражению K

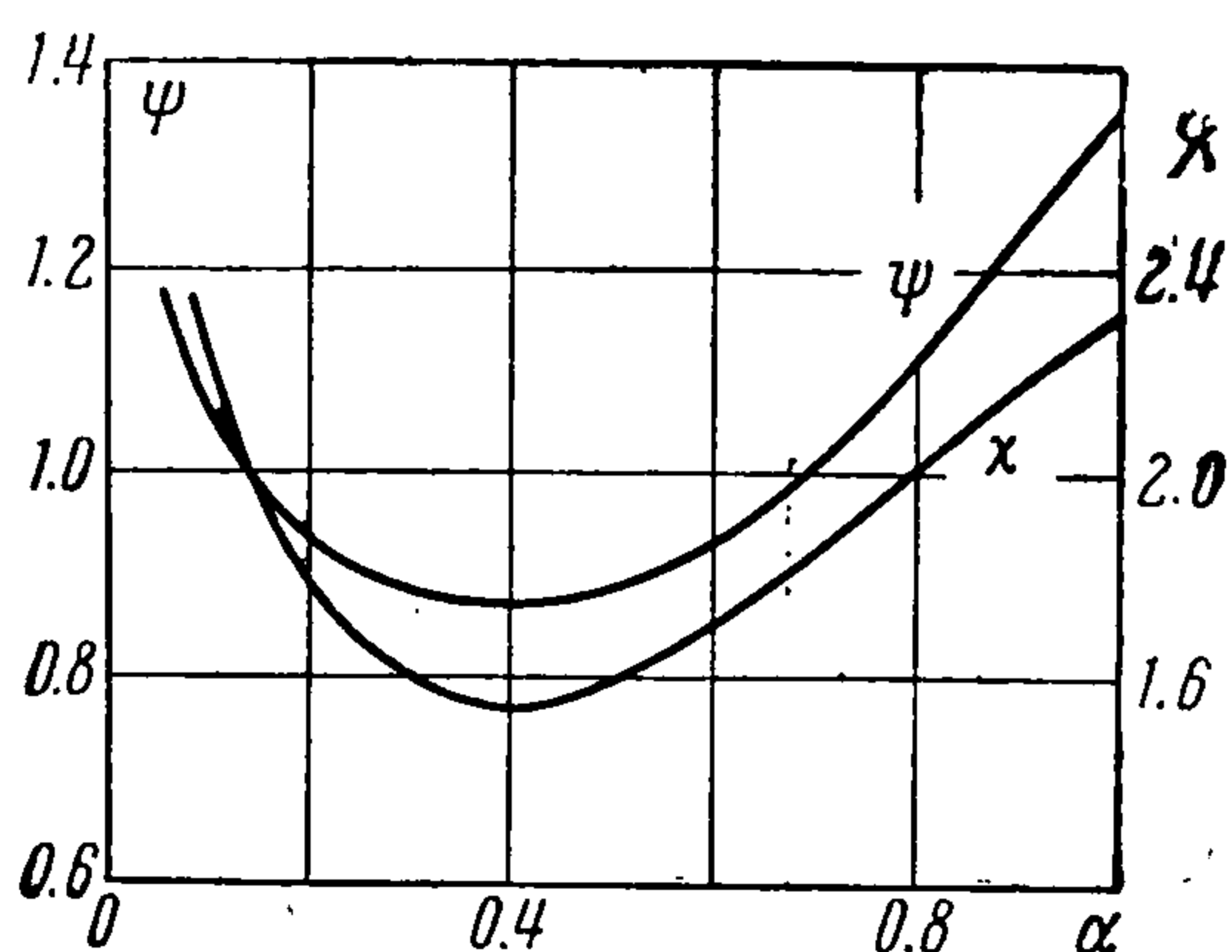
$$K = \frac{R^2 \sqrt{D_0 n}}{4\pi D} \chi, \quad \chi = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} [w(1, \pi; \rho, \varphi)]^2 \rho d\varphi d\rho \right)^{1/2} \quad (4.4)$$

($D_0 = D_j = \text{const}$)

Зависимость $\chi = \chi(a)$ представлена также на фиг. 2.

В применении к задаче разгрузки зеркала телескопа следует положить

$$\sigma_0 = \frac{P}{n} \delta, \quad D_0 = \left(\frac{P}{n} \varepsilon \right)^2 \quad (4.5)$$



Фиг. 2

где P — вес зеркала, δ и ε — соответственно относительная максимальная и среднеквадратическая ошибки в одном разгрузочном усилении. Подставив (4.5) в формулы (4.3) и (4.4), придем к следующим результатам:

$$U = \frac{R^2 P}{8\pi D} \delta \psi, \quad K = \frac{R^2 P}{4\pi D \sqrt{n}} \varepsilon \chi \quad (4.6)$$

По формулам (4.6) произведены расчеты для трех зеркал ($R = 1.35, 3.06, 2.55$), схематизированных в виде сплошных пластинок постоянной толщины с характеристиками материала: удельный вес 2.25 г/см^3 , модуль Юнга $0.7 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, коэффициент Пуассона 0.25.

Кроме этого, предполагалось $\varepsilon = 0.25 \cdot 10^{-2}$, $\delta = 0.5 \cdot 10^{-2}$, $V = 5 \cdot 10^{-6} \text{ см}$.

Приводим результаты вычислений значений U и K :

$R, \text{м}$	$Ra, \text{м}$	a	$h, \text{м}$	n	U/V	K/V
1.35	0.78	0.58	0.336	27	1.29	0.46
3.05	1.83	0.60	1	50	3.87	0.95
2.55	1.53	0.60	0.65	36	4.45	1.28

Если считать V допустимым прогибом зеркала, то даже при таких малых ошибках в разгрузочных силах, которые приняты при расчете, прогибы зеркал имеют величины того же порядка, что и допустимый прогиб.

Поступила 6 II 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Пугачев В. С. Теория случайных функций. Физматгиз, 1960.
2. Лурье А. И. Некоторые задачи об изгибе круглой пластинки. ПММ, 1940, т. IV, вып. 1.
3. Bassali W. A. Bending of a singularly loaded thin circular annulus with free boundaries. Journ. of Mechanics and Physics of Solids 1960, vol. 8, n. 2.
4. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. Гостехиздат, 1948.