К ТЕОРИИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

С. В. Салькович (Саратов)

Система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + B_1 \frac{\partial u}{\partial y} + C_1 \frac{\partial v}{\partial x} + D_1 \frac{\partial v}{\partial y} + E_1 = 0 \\ A_2 \frac{\partial u}{\partial x} + B_2 \frac{\partial u}{\partial y} + C_2 \frac{\partial v}{\partial x} + D_2 \frac{\partial v}{\partial y} + E_2 = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

часто встречается в различных вопросах механики сплошной среды. Примерами могут служить плоское и осесимметричное безвихревые установившиеся течения газа, неустановившееся течение газа, зависящее от одной пространственной координаты, плоская задача предельного равновесия сыпучей среды, распространение длинных волн в реках и каналах и ряд других задач.

Будем предполагать, как это имеет место в перечисленных случаях, что A_1, A_2, $B_1, \ldots, D_2$ — известные функции от u и v; E_1 и E_2 — функции от u, v, x, y.

Предположим, что все эти функции непрерывны и имеют столько производных, сколько потребуется. Будем рассматривать случай, когда выполняется неравенство $ac - b^2 < 0$; тогда система (1) принадлежит к гиперболическому типу. Здесь

$$a = [AC], \qquad 2b = [AD] + [BC], \qquad c = [BD]$$

и используется предложенная Р. Курантом и К. Фридрихсом [1] сокращенная запись

$$[XY] = X_1Y_2 - X_2Y_1$$

Уравнение $ax^2 - 2bx + c = 0$ в этом случае будет иметь два действительных корня $\chi_1 \neq \chi_2$. Для решения краевых задач систему (1) путем введения параметрических характеристических переменных (α, β) приводят к каноническому виду [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \alpha} - \chi_1 \frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0, \qquad T \frac{\partial u}{\partial \alpha} + (a\chi_1 - S) \frac{\partial v}{\partial \alpha} + K \frac{\partial y}{\partial \alpha} - H \frac{\partial x}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial \beta} - \chi_2 \frac{\partial x}{\partial \beta} = 0, \qquad T \frac{\partial u}{\partial \beta} + (a\chi_2 - S) \frac{\partial v}{\partial \beta} + K \frac{\partial y}{\partial \beta} - H \frac{\partial x}{\partial \beta} = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь

$$T = [AB], \qquad S = [BC], \qquad K = [AE], \qquad H = [BE]$$

Как известно, каждое решение системы (2) удовлетворяет исходной системе (1), если в области, расположенной на плоскости переменных (α, β), где определено решение системы (2), якобиан $\partial(x, y) / \partial(\alpha, \beta)$ не обращается в нуль.

Рассмотрим случай, когда в некоторой точке плоскости xy

$$J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0$$

Если при этом одна из производных $\partial J / \partial x$ или $\partial J / \partial y$ не равна нулю в этой точке, то $J = 0$ вдоль целой кривой γ на плоскости xy. Решение уравнений (1) и $u(x, y)$ $v(x, y)$ определяет в плоскости uv, вообще говоря, некоторую кривую Γ — образ кривой γ.

Рассмотрим, возможно ли решение задачи Коши с данными, заданными на кривой γ. Пусть уравнение кривой γ будет $x = x(s)$, $y = y(s)$ и значения искомых функций на кривой γ $u = u(s)$, $v = v(s)$. Дифференцируя, получим

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds}, \qquad \frac{dv}{ds} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{ds} \tag{3}$$

Из (1) и (3) можно найти значения производных $\partial u / \partial x$, $\partial u / \partial y$, $\partial v / \partial x$, $\partial v / \partial y$ вдоль кривой γ. Подставляя найденные значения этих производных в уравнение

$$J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

получим

$$T du^2 + 2U du\, dv + V dv^2 + (K dy - H dx)\, du + (M dy - L dx)\, dv = 0 \tag{5}$$

---

[1] Подробности см. в книге Р. Куранта и К. Фридрихса [1].

Здесь

$$V = [CD], \qquad 2U = [AD] - [BC], \qquad M = [DE], \qquad L = [CE]$$

Перемножая вторые из уравнений (2), найдем

$$T^2\, du^2 + 2UT\, du\, dv + TV\, dv^2 + 2\,(U\, dv + T\, du)\,(K\, dy - H\, dx) + (K\, dy - H\, dx)^2 = 0 \qquad (6)$$

Если уравнения (1) однородные $E_1 = E_2 = 0$, то $K = H = M = L = 0$ и уравнение (5) совпадает с уравнением характеристик (6); кривая Γ, а следовательно, и кривая γ являются в этом случае характеристиками.

Если же система (1) неоднородна $E_1 \neq 0$, $E_2 \neq 0$ и, следовательно, величины K, L, M, H отличны от нуля, то уравнение (5), вообще говоря, не совпадает с уравнением (6).

Следовательно, в этом случае кривые γ и Γ не являются характеристиками.

Последнее обстоятельство является существенным, так как затруднения в решении краевых задач методом характеристик, возникающие при существовании кривой $J = 0$, в случае когда система (1) неоднородна, не могут быть преодолены применением метода С. А. Христиановича [2] введения многолистных поверхностей, так как край складки такой поверхности (кривая Γ) не совпадает с характеристикой и может быть определен лишь, если известно само решение [3].

В литературе встречаются неправильные утверждения, что кривая $J = 0$ является характеристикой и в случае, когда система (1) неоднородна (см. книгу В. В. Соколовского [4], где имеется ряд решений, основанных на указанном утверждении).

Поступила 12 III 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. ИИЛ, 1950.
2. Христианович С. А. Неустановившееся движение в каналах и реках. Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. Изд-во АН СССР, 1938.
3. Рыжов О. С. О течениях в окрестности поверхности перехода в соплах Лаваля. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 4.
4. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. Физматгиз, 1960.

ТОНКАЯ ПЛАСТИНА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛУЧАЙНОЙ НАГРУЗКИ

В. А. Пальмов

(Ленинград)

Рассматриваемые здесь задачи имеют непосредственное применение к расчету современных телескопов рефлекторов. Дело в том, что для больших телескопов прогибы отражающей поверхности зеркала, вызванные его собственным весом, приводят к недопустимому искажению изображения. Для уменьшения этих прогибов используется специальная система разгрузки. В трех точках зеркало фиксируется на трубе телескопа при помощи шарнирных опор, а в ряде точек на задней поверхности к нему прикладывается система разгружающих сил, которые подбираются так, чтобы уменьшить прогибы зеркала от собственного веса. Описанная система подвески позволяет проектировать зеркала приемлемого веса, с прогибами отражающей поверхности, не превосходящими допустимых. Получающаяся конструкция зеркала, с механической точки зрения, представляет сплошную или оребренную пластинку. При больших размерах зеркала сравнительно малые ошибки в осуществлении разгружающих усилий могут привести к недопустимым искажениям отражающей поверхности.

Найденные здесь решения могут применяться для определения нормальных прогибов зеркала (как пластинки), вызванных ошибками в разгружающих силах.

1. Обозначим через $\alpha(x, \xi)$ функцию влияния для пластинки при определенных условиях ее закрепления. По своему смыслу $\alpha(x, \xi)$ — нормальный прогиб пластинки в точке с двумерной векторной координатой x, вызванный приложением в точке ξ единичной сосредоточенной силы, перпендикулярной пластинке. При действии системы