ОБ ОДНОЗНАЧНЫХ ИНТЕГРАЛАХ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ СИЛ

Ю. А. Архангельский
(Москва)

1. Как известно [1], приближенные уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки под действием центрального ньютоновского поля сил в предположении, что неподвижная точка тела находится на достаточно большом расстоянии R от центра притяжения, с точностью до второго порядка малости, имеют вид

$$\begin{gathered}
A\frac{dp}{dt}+(C-B)qr=Mg(y_0\gamma''-z_0\gamma')+\frac{3g}{R}(C-B)\gamma'\gamma''\\
B\frac{dq}{dt}+(A-C)rp=Mg(z_0\gamma-x_0\gamma'')+\frac{3g}{R}(A-C)\gamma''\gamma\\
C\frac{dr}{dt}+(B-A)pq=Mg(x_0\gamma'-y_0\gamma)+\frac{3g}{R}(B-A)\gamma'\gamma\\
\frac{d\gamma}{dt}=r\gamma'-q\gamma'',\qquad \frac{d\gamma'}{dt}=p\gamma''-r\gamma,\qquad \frac{d\gamma''}{dt}=q\gamma-p\gamma'
\end{gathered}\tag{1}$$

К уравнениям (1), обобщающим уравнения классической задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки, применима теория последнего множителя Якоби. Вследствие этого задача интеграции уравнений сводится к квадратурам, если известны четыре независимых интеграла, не содержащих время.

В общем случае система уравнений (1) имеет три первых независимых интеграла:

интеграл энергии

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2-2Mg(x_0\gamma+y_0\gamma'+z_0\gamma'')+\frac{3g}{R}(A\gamma^2+B\gamma'^2+C\gamma''^2)=\text{const}$$

интеграл момента количества движения

$$Ap\gamma+Bq\gamma'+Cr\gamma''=\text{const}$$

тривиальный интеграл

$$\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1$$

Четвертый интеграл был найден в следующих двух случаях:

1°. Когда тело закреплено в центре масс

$$x_0=y_0=z_0=0$$

(аналог случая Эйлера в классической задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки), четвертый интеграл — интеграл кинетического момента — имеет вид

$$A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2-\frac{3g}{R}(BC\gamma^2+AC\gamma'^2+AB\gamma''^2)=\text{const}$$

Этот интеграл впервые нашел Брун [2] и задача была приведена к квадратурам Коббом [3] и затем иным способом Е. И. Харламовой [4].

2°. Когда тело обладает кинетической симметрией около одной из главных осей инерции, а центр тяжести лежит на этой оси

$$A=B,\qquad x_0=y_0=0$$

(аналог случая Лагранжа в классической задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки), четвертый интеграл будет

$$r=\text{const}$$

В этом случае задача была приведена к квадратурам В. В. Белецким [1]. Таким образом, проинтегрировать уравнения (1) удалось только в этих двух случаях.

2. Если рассматривать время, как комплексное переменное, то для интегрирования системы (1) особый интерес представляют те случаи, когда интегралы этой системы имеют подвижными особыми точками только полюсы. В этих случаях оказывается возможным получить полное решение задачи при помощи составления дифференциальных уравнений для целых функций, отношение которых давало бы по теореме Вейерштрасса мероморфные интегралы системы (1), и интегрирование их степенными рядами [5]. В качестве первого шага в решении этой задачи необходимо найти все случаи, когда система (1) имеет общие интегралы, представляющие однозначные функции времени.

В работе показывается, что отыскание всех случаев, когда интегралы дифференциальных уравнений (1) однозначны, не приводит к новым случаям, а сводится к исследованию решений для указанных выше двух случаев. Для доказательства этого утверждения используем метод малого параметра, следуя В. В. Голубеву [6].

Посредством подстановки

$$p=\alpha p_1,\quad q=\alpha q_1,\quad r=\alpha r_1,\quad \gamma=\alpha^2\gamma_1,\quad \gamma'=\alpha^2\gamma_1',\quad \gamma''=\alpha^2\gamma_1'',\quad t=t_0+\frac{t_1}{\alpha}$$

систему уравнений (1) преобразуем в систему

$$\begin{aligned}
&A\frac{dp_1}{dt_1}+(C-B)\,q_1r_1=Mg\,(y_0\gamma_1''-z_0\gamma_1')+\alpha^2\frac{3g}{R}\,(C-B)\,\gamma_1'\gamma_1''\\
&B\frac{dq_1}{dt_1}+(A-C)\,r_1p_1=Mg\,(z_0\gamma_1-x_0\gamma_1'')+\alpha^2\frac{3g}{R}\,(A-C)\,\gamma_1''\gamma_1\\
&C\frac{dr_1}{dt_1}+(B-A)\,p_1q_1=Mg\,(x_0\gamma_1'-y_0\gamma_1)+\alpha^2\frac{3g}{R}\,(B-A)\,\gamma_1\gamma_1'\\
&\frac{d\gamma_1}{dt_1}=r_1\gamma_1'-q_1\gamma_1'',\qquad \frac{d\gamma_1'}{dt_1}=p_1\gamma_1'-r_1\gamma_1,\qquad \frac{d\gamma_1''}{dt_1}=q_1\gamma_1-p_1\gamma_1'
\end{aligned}\tag{2}$$

содержащую малый параметр α^2. При $\alpha=0$ получим систему упрощенных уравнений, которые представляют классические уравнения движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки [7]. Относительно этих уравнений известно [8], что они имеют однозначные интегралы только в трех случаях:

1) $x_0=y_0=z_0=0$
2) $A=B,\quad x_0=y_0=0$
3) $A=B=2C,\quad y_0=z_0=0$

Поэтому для доказательства сделанного выше утверждения достаточно показать, что система (1), переписанная для третьего из указанных случаев в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{dp}{dt}-\frac{1}{2}qr=-b^2\gamma'\gamma'', &&\frac{d\gamma}{dt}=r\gamma'-q\gamma''\\
&\frac{dq}{dt}+\frac{1}{2}pr=-\frac{c}{2}\gamma''+b^2\gamma\gamma'', &&\frac{d\gamma'}{dt}=p\gamma''-r\gamma\\
&\frac{dr}{dt}=c\gamma', &&\frac{d\gamma''}{dt}=q\gamma-p\gamma'
\end{aligned}\tag{3}$$

$$\left(b^2=\frac{3g}{2R},\quad c=\frac{Mgx_0}{C}\right)$$

имеет неоднозначные интегралы.

Вводим малый параметр α по формулам

$$p=\frac{p_1}{\alpha},\ q=\frac{q_1}{\alpha},\ r=\frac{r_1}{\alpha},\ \gamma=\frac{\gamma_1}{\alpha},\ \gamma'=\frac{\gamma_1'}{\alpha},\ \gamma''=\frac{\gamma_1''}{\alpha},\ t=t_0+\alpha t_1$$

Тогда уравнения (3) примут вид

$$\begin{aligned}
&\frac{dp_1}{dt_1}-\frac{1}{2}q_1r_1=-b^2\gamma_1'\gamma_1'', &&\frac{d\gamma_1}{dt_1}=r_1\gamma_1'-q_1\gamma_1''\\
&\frac{dq_1}{dt_1}+\frac{1}{2}p_1r_1=b^2\gamma_1''\gamma_1-\alpha\frac{c}{2}\gamma_1'', &&\frac{d\gamma_1'}{dt_1}=p_1\gamma_1''-r_1\gamma_1\\
&\frac{dr_1}{dt_1}=\alpha c\gamma_1', &&\frac{d\gamma_1''}{dt_1}=q_1\gamma_1-p_1\gamma_1'
\end{aligned}\tag{4}$$

При $\alpha = 0$ получим систему упрощенных уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{dp_1}{dt_1} - \frac{1}{2} q_1 r_1 = -b^2 \gamma_1' \gamma_1'', && \frac{d\gamma_1}{dt_1} = r_1\gamma_1' - q_1\gamma_1'' \\
&\frac{dq_1}{dt_1} + \frac{1}{2} p_1 r_1 = b^2 \gamma_1'' \gamma_1, && \frac{d\gamma_1'}{dt_1} = p_1\gamma_1'' - r_1\gamma_1 \\
&\frac{dr_1}{dt_1} = 0, && \frac{d\gamma_1''}{dt_1} = q_1\gamma_1 - p_1\gamma_1'
\end{aligned} \tag{5}$$

Этой системе удовлетворяют следующие частные интегралы:

$$p_1 = \frac{i}{t_1}, \quad q_1 = r_1 = \gamma_1 = 0, \quad \gamma_1' = \frac{1}{bt_1}, \quad \gamma_1'' = \frac{i}{bt_1} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

Разлагая по параметру α интегралы системы (4)

$$\begin{gathered}
p_1 = \frac{i}{t_1} + \alpha p_2 + \ldots, \quad q_1 = \alpha q_2 + \ldots, \quad r_1 = \alpha r_2 + \ldots, \quad \gamma_1 = \alpha\gamma_2 + \ldots \\
\gamma_1' = \frac{1}{bt_1} + \alpha\gamma_2' + \ldots \qquad \gamma_1'' = \frac{i}{bt_1} + \alpha\gamma_2'' + \ldots
\end{gathered} \tag{6}$$

подставляя затем в эту систему полученные разложения (6) и сравнивая коэффициенты при α, получим уравнения для определения величин p_2, q_2, r_2, γ_2, γ_2', γ_2'', например

$$\frac{dr_2}{dt_1} = \frac{c}{bt_1} \tag{7}$$

Так как величина c/b отлична от нуля, из уравнения (7) следует, что в r_2 имеется критическая подвижная логарифмическая точка.

Таким образом, система (3) имеет многозначные интегралы, что окончательно и доказывает высказанное утверждение.

Поступила 5 I 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В. В. Об интегрируемости уравнений движения твердого тела около закрепленной точки под действием центрального ньютоновского поля сил. ДАН СССР, 1957, т. 113, № 2.
2. de Brum F. Rotation kring en fix punkt. Öfversigt af Kongl. Svenska Vetenskaps — Akademiens Vörhandlingar, Stockholm, 1893.
3. Kobb G. Sur le problème de la rotation d'un corps autour d'un point fixe. Bulletin de la Société Mathématique, 1895, XXIII.
4. Харламова Е. И. О движении твердого тела вокруг неподвижной точки в центральном ньютоновском поле сил. Изв. Сибирск. отд. АН СССР, 1959, № 6.
5. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1950.
6. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. Гостехиздат, 1953.
7. Архангельский Ю. А. Об однозначных интегралах в задаче о качении шара по плоскости. Вестн. Моск. ун-та, 1958, № 3.
8. Ляпунов А. Н. Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. Собр. соч. Т. I, М., Изд-во АН СССР, 1954.