МЕДЛЕННОЕ СТАЦИОНАРНОЕ ОБТЕКАНИЕ ПОРИСТОЙ СФЕРЫ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

А. И. Леонов (Москва)

Течению несжимаемой вязкой жидкости в пространстве, ограниченном пористой границей, посвящен ряд работ [1-9]. В этих работах скорость проницаемости на пористой поверхности предполагается заданной. Однако существуют задачи, в которых скорость проницаемости заранее неизвестна, а определяется в процессе решения.

Для таких задач имеют значение свойства пористой среды обтекаемого тела. В случае обтекания вязкой жидкостью пористой оболочки, толщина которой мала по сравнению с минимальным определяющим размером области течения, решение можно провести без привлечения теории фильтрации. В качестве граничных условий на пористой поверхности принимается, что компоненты скорости проницаемости, лежащие в касательной плоскости к данной точке пористой поверхности, обращаются в нуль, а нормальная составляющая вектора скорости непрерывна при переходе через пористую границу.

Следует еще отметить, что возможен и другой подход к задачам с проницаемыми границами, когда рассматривается течение в односвязной области. Например, в работе [10] скорость проницаемости предполагалась пропорциональной разности между давлением жидкости и давлением в пористой среде. Задачи об обтекании пористого кругового цилиндра и замкнутой пористой оболочки стационарным потоком идеальной жидкости рассматривались в работах [11-14] и диссертациях [1].

Пусть пористая сфера радиуса a, толщиной $\delta \ll a$ обтекается стационарным осесимметричным потоком несжимаемой вязкой жидкости. Сразу отметим, что осевая симметрия возможна только в силу однородной пористости. В сферических координатах r, φ, θ в силу симметрии имеем

$$v_\varphi \equiv 0, \quad \partial v_\theta/\partial\varphi \equiv 0, \quad \partial v_r/\partial\varphi \equiv 0$$

Имеем условия на бесконечности

$$v_r = -U\cos\theta, \qquad v_\theta = U\sin\theta, \qquad r \to \infty \tag{1}$$

Здесь U — скорость потока на бесконечности. Задачу будем решать в стоксовом приближении. Как известно [15], функция тока $\psi(r, \theta)$ удовлетворяет уравнению

$$DD\psi = 0, \qquad D = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) (D \text{ — оператор Стокса}) \tag{2}$$

Проекции вектора скорости представляются равенствами

$$v_r = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \qquad v_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r} \tag{3}$$

а давление определяется из уравнений (μ — вязкость)

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\mu}{r^2\sin\theta}\frac{\partial D\psi}{\partial\theta}, \qquad \frac{\partial p}{\partial\theta} = -\frac{\mu}{\sin\theta}\frac{\partial D\psi}{\partial r} \tag{4}$$

Функция тока, определенная во всем пространстве, имеет вид

$$\psi = \sin^2\theta\,(Ar^4 + Br + Cr^2 + E\,/\,r) \qquad (A, B, C, E = \text{const}) \tag{5}$$

Из уравнения неразрывности и условий прилипания следует

$$\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2v_r}{r}\right)_{r=a} = 0, \qquad v_\theta\,|_{r=a} = 0 \tag{6}$$

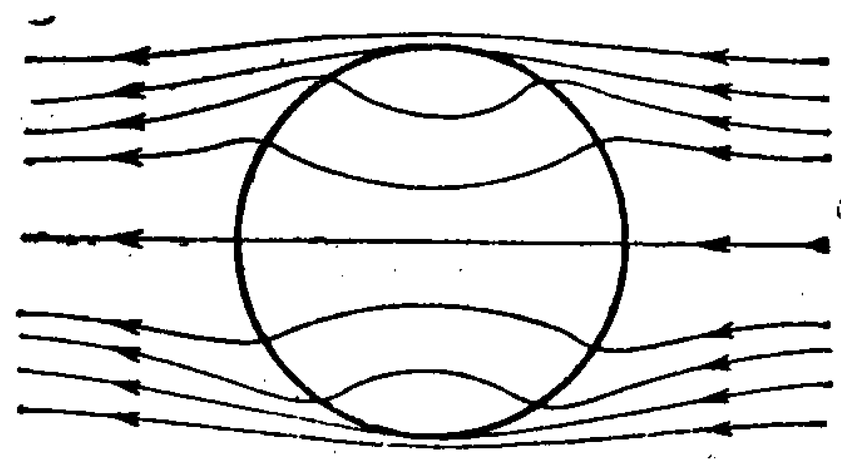
Условие непрерывности нормальной составляющей скорости при переходе через пористую границу имеет вид

$$v_r\,|_{r=a+0} = v_r\,|_{r=a-0} \tag{7}$$

---

[1] Байчоров Х. Я. Обтекание некоторых пористых препятствий потоком идеальной несжимаемой жидкости. Диссертация, МГУ, 1949, Колосовская А. К. Некоторые плоские задачи о движении проницаемого тела в идеальной несжимаемой жидкости. Диссертация, МГУ, 1953.

Рассмотрим течение во внешности пористой сферы, т. е. при $r \geqslant a$. В силу (3) и (5) имеем



$$v_r = 2\cos\theta\left(A_+ r^2 + \frac{B_+}{r} + C_+ + \frac{E_+}{r^3}\right)$$

$$v_\theta = -\sin\theta\left(4A_+ r^2 + \frac{B_+}{r} + 2C_+ - \frac{E_+}{r^3}\right)$$

Здесь индексом плюс отмечены значения постоянных для внешности сферы. Из (6) получим

$$4A_+ a^2 + \frac{B_+}{a} + 2C_+ - \frac{E_+}{a^3} = 0 \tag{8}$$

Уравнение (8) и условия (1) будут удовлетворены, если положить (s — параметр)

$$A_+ = 0, \qquad B_+ = -aU(s-1), \qquad C_+ = -{}^1/_2 U, \qquad E_+ = -sUa^3 \tag{9}$$

Рассмотрим теперь течение внутри пористой сферы, т. е. при $r \leqslant a$. Точно также, пользуясь условиями (6) и (7), а также условием регулярности течения во внутренней области (отсутствие источников и стоков), получим

$$A_- = {}^1/_2 U(4s-1), \qquad B_- = E_- = 0, \qquad C_- = -U(4s-1) \tag{10}$$

Индексом минус отмечены значения постоянных при $r \leqslant a$. Подставляя значения постоянных в (3) и (5), получим

$$\psi = \begin{cases} -U\sin^2\theta\left[\dfrac{r^2}{2} + ar(s-1) + s\dfrac{a^3}{r}\right] & (r \geqslant a) \\ -U\sin^2\theta\,(4s-1)\left(r^2 - \dfrac{r^4}{2a^2}\right) & (r \leqslant a) \end{cases}$$

$$v_r = \begin{cases} -2U\cos\theta\left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{a}{r}(s-1) + s\left(\dfrac{a}{r}\right)^3\right] & (r \geqslant a) \\ -2U\cos\theta\,(4s-1)\left(1 - \dfrac{r^2}{2a^2}\right) & (r \leqslant a) \end{cases} \tag{11}$$

$$v_\theta = \begin{cases} U\sin\theta\left[1 + \dfrac{a}{r}(s-1) - s\left(\dfrac{a}{r}\right)^3\right] & (r \geqslant a) \\ 2U\sin\theta\,(4s-1)\left(1 - \dfrac{r^2}{a^2}\right) & (r \leqslant a) \end{cases}$$

Из формул (11) видно, что проекции скорости непрерывны, а функция тока сохраняет непрерывные производные при переходе через пористую поверхность.

Формулы (11) определяют однопараметрическое семейство регулярных течений с нормально проницаемой границей. При $s = 1/4$ получим решение задачи Стокса об обтекании шара с непроницаемой границей. В этом случае, как это следует из (11), скорость внутри сферы равна нулю, что полностью соответствует физическому смыслу задачи. Из (11) можно определить скорость проницаемости

$$v_0 = v_r\,|_{r=a} = -U(4s-1)\cos\theta \tag{12}$$

При $s > 1/4$ (случай проницаемых течений) линии тока имеют примерный вид, изображенный на фигуре. Из уравнений (4) можно получить распределение давлений

$$p(r,\theta) = \begin{cases} p_0 - 2\mu U(s-1)\,ar^{-2}\cos\theta & (r > a) \\ p_0 + 10\mu U(4s-1)\,ra^{-2}\cos\theta & (r < a) \end{cases} \tag{13}$$

где p_0 — произвольная постоянная. Из (13) видно, что давление терпит разрыв на пористой поверхности

$$\Delta p_a = p\,|_{r=a+0} - p\,|_{r=a-0} = 6\mu U\,\frac{2-7s}{a}\cos\theta \tag{14}$$

Интервал изменения параметра s для физически возможных течений определяется из очевидных условий

$$v_0 < 0, \quad \Delta p_a > 0 \quad \text{при} \quad 0 < \theta < \pi/2, \qquad v_0 > 0, \quad \Delta p_a < 0 \quad \text{при} \quad \pi/2 < \theta < \pi$$

Тогда из (12) и (14) следует

$$1/4 \leqslant s < 2/7 \tag{15}$$

Сопоставляя (12) и (14), получим

$$\Delta p_a = -6\mu\,\frac{v_0}{a}\,\frac{2-7s}{4s-1} \tag{16}$$

Определим теперь результирующее сопротивление пористой сферы. В силу осевой симметрии оно будет направлено по оси симметрии потока, оси z; имеем

$$R_z = 2\pi a^2 \int_0^\pi [p_{rr} \cos\theta - p_{r\theta} \sin\theta]_a \sin\theta \, d\theta \tag{17}$$

В квадратных скобках здесь берется разность предельных значений при $r = a + 0$ и $r = a - 0$. Выражая значения p_{rr} и $p_{r\theta}$ при $r = a$ через p, v_r, v_θ по закону Ньютона и используя затем формулу (11) и (13), можно легко вычислить подынтегральное выражение (17). Интегрируя, будет иметь

$$R_z = -{}^8/_3 \pi a \mu U \, (11 - 35s) \tag{18}$$

При $s = 1/4$ из (18) получим формулу Стокса.

Рассмотрим обратную задачу. Пористая сфера движется в вязкой жидкости с постоянной скоростью U в направлении оси z. Пусть ψ^* — функция тока, а v_r^*, v_θ^* — компоненты скорости этого обращенного движения. Решение получим,полагая,

$$\psi^* = \psi + {}^1/_2 U r^2 \sin^2\theta, \qquad v_r^* = v_r + U\cos\theta, \qquad v_\theta^* = v_\theta - U\sin\theta \tag{19}$$

Распределение давлений в этом случае будет совершенно таким же, как и в задаче об обтекании, т. е. будет определяться формулой (13). Доказательство следует из (4), (19) и из того, что $D(r^2 \sin^2\theta) = 0$; результирующее сопротивление пористой сферы для данного случая будет также определяться выражением (19).

Параметр s должен быть определен из эксперимента. Он легко определяется, если известен коэффициент проницаемости пористого материала, составляющего оболочку. Действительно, выражение (16) можно записать в следующем виде:

$$v_0 = -\frac{k}{\mu}\frac{\Delta p_a}{\delta}, \qquad k = \frac{a\delta}{6}\frac{4s-1}{2-7s} \tag{20}$$

представляющем собой закон Дарси; постоянная k есть коэффициент проницаемости.

Поступила 19 I 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Berman A. S. Laminar flow in channels with porous walls. Journ. of Appl. Physics, 1953, 24, № 9.
2. Sellars John R. Laminar flow in channels with porous walls of high suction Reynolds numbers. Journ. of Appl. Physics, 1955, 26, 489—90.
3. Yuan S. W. Further investigation of laminar flow in channels with porous walls. Journ of Appl. Physics, 1957, 27, № 3.
4. Долидзе Д. Е. О нестационарном течении вязкой жидкости между параллельными пористыми стенками. ДАН СССР, 1957, т. 117, № 3.
5. Долидзе Д. Е. Нестационарное течение вязкой жидкости в полупространстве с пористой границей. Тр. Тбилисск. ун-та, 1957, т. 64.
6. Watson J. A solution of the Navier — Stokes equations illustrating the response of a laminar boundary layer to a given change in the external stream velosity. Quart. Journ. of Mech. and Appl. Math., 1958, XI, 3.
7. Berman A. S. Laminar flow in annulus with porous walls. Journ. of Appl. Physics, 1958, 29, № 1.
8. Джорбенадзе Н. П. О нестационарном течении вязкой жидкости в пористой круглой кольцевой трубе. Сообщ. АН ГрузССР, 1959, т. XXII, № 6.
9. Джорбенадзе Н. П. О нестационарном течении вязкой жидкости в пористой круглой кольцевой трубе. Сообщ. АН ГрузССР, 1960, т. XXIV, № 5.
10. Слезкин Н. А. О развитии течений вязкой жидкости между параллельными пористыми стенками. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 4.
11. Рахматулин Х. А. Обтекание проницаемого тела. Вестн. Моск. ун-та, 1950, № 3.
12. Байчоров Х. Я. Общие положения об обтекании пористого круглого цилиндра плоско-параллельным потоком идеальной несжимаемой жидкости. Вест. Моск. ун-та, 1951, № 10.
13. Байчоров Х. Я. Обтекание пористого круглого цилиндра плоско-параллельным потоком идеальной несжимаемой жидкости при линейном и квадратичном законе фильтрации. Вест. Моск. ун-та, 1952, № 8.
14. Колосовская А. К., Ицкович И. А. Пространственная задача об обтекании потоком идеальной жидкости пористых препятствий. Уч. зап. Кишиневск. ун-та, 1954, т. XI (Физ.-матем.).
15. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., Гостехиздат, 1955.