О РАЗВИТИИ ВОЛН НА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ И ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРЕМЕЩАЮЩИХСЯ ДАВЛЕНИЙ

Л. В. Черкесов (Минск)

Рассматривается пространственная задача о неустановившихся волнах, возникающих на свободной поверхности и поверхности раздела двух жидкостей под действием периодической перемещающейся системы давлений, приложенных к свободной поверхности в бесконечной полосе. Работа является продолжением работ [1-4], в которых рассматриваются установившиеся и неустановившиеся колебания поверхности жидкости, поддерживаемые периодическими возмущениями.

§ 1. Пусть на поверхности бесконечно глубокой жидкости плотности ρ плавает слой другой жидкости плотности ρ_1 и глубины h. В начальный момент времени $t=0$ обе жидкости покоятся, а свободная поверхность и поверхность раздела горизонтальны. Поставим своей задачей исследовать вид волн, возникающих на свободной поверхности и поверхности раздела под действием периодической перемещающейся системы давлений вида

$$p = p_0 \exp[i(kx-\omega t)] \qquad \text{при } |y|<a \tag{1.1}$$

прикладываемых, начиная с момента времени $t=0$, к свободной поверхности.

Обозначим через $\varphi(x,y,z,t)$ и $\varphi_1(x,y,z,t)$ потенциалы скоростей нижней и верхней жидкостей. Тогда для определения этих функций имеем [3] два уравнения

$$\Delta\varphi_1 = 0 \quad (0<z<h), \qquad \Delta\varphi = 0 \quad (z<0) \tag{1.2}$$

с граничными условиями

$$\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} + g\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)_{z=h} = \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p}{\partial t}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \quad \text{при } z=0$$

$$\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \rho_1\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} + g(\rho-\rho_1)\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z=0 \tag{1.3}$$

Вид свободной поверхности ζ_1 и поверхности раздела ζ даются формулами

$$\zeta_1 = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right)_{z=h} - \frac{p}{\rho_1 g}, \qquad \zeta = \frac{1}{g(\rho-\rho_1)}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \rho_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}\right)_{z=0} \tag{1.4}$$

К граничным условиям (1.3) нужно добавить начальные условия

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} = \frac{p}{\rho_1} \quad \text{при } z=0,\ t=0; \qquad \varphi_1(x,y,z,0)=0 \\ &\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \rho_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} \quad \text{при } z=0,\ t=0; \qquad \varphi(x,y,z,0)=0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

выражающие тот факт, что свободная поверхность и поверхность раздела горизонтальны и обе жидкости покоятся в начальный момент времени. Представим давления (1.1) в виде интеграла Фурье

$$p = p_0 e^{i(kx-\omega t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ma}{m} e^{imy}\, dm$$

и будем искать функции $\varphi_1(x,y,z,t)$ и $\varphi(x,y,z,t)$ в такой интегральной форме:

$$\varphi_1 = \frac{p_0}{\pi\rho_1} e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ma}{m} e^{imy} [A(m,t)e^{\Delta z} + B(m,t)e^{-\Delta z}]\, dm \tag{1.6}$$

$$\varphi = \frac{p_0}{\pi\rho} e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ma}{m} e^{imy} C(m,t) e^{\Delta z}\, dm \qquad (\Delta = \sqrt{k^2+m^2}) \tag{1.7}$$

Представленные в виде (1.6) и (1.7) функции φ_1 и φ удовлетворяют уравнениям (1.2) при произвольных значениях функций A, B, C. Удовлетворяя условиям (1.3) и (1.5), получаем для определения A, B, C систему

$$\ddot{A}e^{\Delta h} + \ddot{B}e^{-\Delta h} + g\Delta(Ae^{\Delta h} - Be^{-\Delta h}) = -i\omega e^{-i\omega t}$$

$$\ddot{C} - \ddot{A} - \ddot{B} + g\Delta(1-\gamma)C = 0, \qquad A - B = \gamma C \qquad (\gamma = \rho_1/\rho)$$

с начальными условиями

$$\dot{A}(m,0)\,e^{\Delta h}+\dot{B}(m,0)\,e^{-\Delta h}=1,\quad \dot{A}+\dot{B}-\dot{C}=0,\quad A(m,0)=B(m,0)=C(m,0)=0$$

Точка означает дифференцирование по времени. Отсюда имеем систему

$$\begin{gathered}\ddot{A}e^{\Delta h}+\ddot{B}e^{-\Delta h}+g\Delta\,(Ae^{\Delta h}-Be^{-\Delta h})=-i\omega e^{-i\omega t}\\ \ddot{A}-\beta\ddot{B}+g\Delta\,(A-B)=0 \qquad (\beta=1+\gamma\,/\,1-\gamma)\end{gathered}\tag{1.8}$$

с начальными условиями

$$A(m,0)=B(m,0)=0,\quad \dot{A}(m,0)=\frac{\beta e^{-\Delta h}}{\beta+e^{-2\Delta h}},\quad \dot{B}(m,0)=\frac{e^{-\Delta h}}{\beta+e^{-2\Delta h}}\tag{1.9}$$

При этом C определяется из уравнения $C=\gamma^{-1}(A-B)$.

Решая систему (1.8) с начальными условиями (1.9), находим

$$A(m,t)=\sum_{k=0}^{4}a_k e^{in_k t},\qquad B(m,t)=\sum_{k=0}^{4}b_k e^{in_k t},\qquad C(m,t)=\sum_{k=0}^{4}\gamma^{-1}(a_k-b_k)\,e^{in_k t}$$

где

$$n_0=-\omega,\qquad n_{1,2}=\pm\sqrt{g\Delta},\qquad n_{3,4}=\pm\sqrt{\xi g\Delta}$$

$$D(m)=(1+\gamma)\,\omega^2+(1-\gamma)\,[-g\Delta+(\omega^2+g\Delta)\,e^{-2\Delta h}],\qquad b_1=b_2=0$$

$$b_0=\frac{i\omega\,(1-\gamma)}{D(m)}\,e^{-\Delta h},\qquad b_1=0,\qquad b_2=0,\qquad b_3=\frac{b_0\,(\omega-n_3)-ib_5}{2n_3}$$

$$\xi=\frac{(1-\gamma)\,[1-e^{-2\Delta h}]}{1+\gamma+(1-\gamma)\,e^{-2\Delta h}},\qquad b_4=-\frac{b_0\,(\omega+n_3)-ib_5}{2n_3}$$

$$b_5=\frac{(1-\gamma)\,e^{-\Delta h}}{1+\gamma+(1-\gamma)\,e^{-2\Delta h}},\qquad a_0=\frac{-i\omega+(\omega^2+g\Delta)\,b_0e^{-\Delta h}}{g\Delta-\omega^2}\,e^{-\Delta h}$$

$$a_1=\frac{1}{2k_1}\,[a_0\,(\omega-n_1)-qb_3\,(n_1+n_3)-qb_4\,(n_1-n_3)-ia_5]$$

$$a_2=-\frac{1}{2k_1}\,[a_0\,(\omega+n_1)+qb_3\,(n_1-n_3)+qb_4\,(n_1+n_3)-ia_5]$$

$$a_3=qb_3e^{-2\Delta h},\qquad a_4=qb_4e^{-2\Delta h},\qquad a_5=\frac{(1+\gamma)\,e^{-\Delta h}}{1+\gamma+(1-\gamma)\,e^{-2\Delta h}},\qquad q=\frac{1+\xi}{1-\xi}\,e^{-2\Delta h}$$

Подставляя найденные значения функций A, B, C в формулы (1.4), находим

$$\zeta_1=\frac{ip_0}{\pi p_1 g}\,e^{ikx}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{4}f_k e^{i\,(my+n_k t)}\,dm,\qquad \zeta=\frac{ip_0}{\pi\rho_1 g}\,e^{ikx}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{4}\psi_k e^{i\,(my+n_k t)}\,dm \tag{1.10}$$

где

$$f_k=n_k\,[a_ke^{\Delta h}+b_ke^{-\Delta h}]\,\frac{\sin ma}{m},\qquad \psi_k=n_k\,[a_k-\beta b_k]\,\frac{\sin ma}{m}\tag{1.11}$$

Полученные формулы (1.10) представляют собой аналитическое выражение вида волн, возникающих на свободной поверхности и поверхности раздела.

§ 2. Займемся исследованием первой формулы (1.10), определяющей вид волн на свободной поверхности. Прежде всего заметим, что отдельные слагаемые, входящие в подынтегральную сумму, имеют полюса первого порядка на действительной оси. Так f_0 имеет на действительной оси полюса первого порядка в точках

$$m_{1,2}=\pm\sqrt{\sigma^2-k^2}\qquad (\sigma=\omega^2g^{-1}>k),\qquad m_{3,4}=\pm\sqrt{\alpha^2-k^2}\tag{2.1}$$

где $\alpha>\beta\sigma$ — единственный положительный корень уравнения

$$(1+\gamma)\,\omega^2+(1-\gamma)\,[-g\alpha+(\omega^2+g\alpha)\,e^{-2\alpha h}]=0\tag{2.2}$$

Функция $f_2(m)$ имеет полюса первого порядка в точках m_1, m_2; $f_4(m)$ в точках m_3, m_4; функции f_1, f_3 на действительной оси особенностей не имеют. Особенности отдельных слагаемых, входящих в подынтегральную сумму первой формулы (1.10) взаимно уничтожаются, поэтому подынтегральная функция не имеет особенностей на пути интегрирования и интегрирование по действительной оси можно заменить интегрированием по контуру L, обходящему полюса m_1 и m_3 по малым полуокружностям, лежащим в нижней полуплоскости, а полюса m_2 и m_4 по малым полуокружностям в верхней полуплоскости. Формулу (1.10) можно переписать так:

$$\zeta_1 = \frac{ip_0}{\pi\rho_1 g} e^{ikx} \sum_{k=0}^{4} J_k, \qquad J_k = \int_{(L)} f_k e^{i(my + n_k t)} dm \tag{2.3}$$

Рассматривая область $y > a$ (область $y < -a$ симметрична), получим

$$J_0 = e^{-i\omega t} \left[\int_{(c)} f_0 e^{imy} dm + 2\pi i \sum_{k=1,3} \operatorname{res} (f_0 e^{imy})_{m_k} \right] \tag{2.4}$$

где контур (c) обходит полюса m_1, m_2, m_3, m_4 в верхней полуплоскости. Проводя вычисление вычетов и учитывая, что интеграл в формуле (2.4) для больших значений ky есть величина порядка $(ky)^{-1}$, имеем

$$J_0 = -N_1 - N_2 + O\,[(ky)^{-1}] \tag{2.5}$$

$$N_1 = \frac{2\pi\omega^4 \sin a \sqrt{\sigma^2 - k^2}}{\omega^4 - k^2 g^2} \left(1 - \frac{2e^{-2\sigma h}}{\beta - 1 - 2e^{-2\sigma h}}\right) \exp\,[i(\sqrt{\sigma^2 - k^2}\, y - \omega t)]$$

$$N_2 = \frac{4\pi \sin a \sqrt{\alpha^2 - k^2}}{(\alpha^2 - k^2)(\alpha - \sigma)} \; \frac{\alpha^2 \sigma e^{-2\alpha h}}{1 + [2h(\alpha + \sigma) - 1]\, e^{-2\alpha h}} \exp\,[i(\sqrt{\alpha^2 - k^2}\, y - \omega t)]$$

Рассмотрим теперь J_2, записав его в таком виде:

$$J_2 = \int_{(L)} f_2 \exp\,[kyM_2(m)]\, dm, \qquad M_2(m) = i\,(m - \nu \sqrt[4]{1 + m^2}), \qquad \nu = \frac{t}{y}\left(\frac{g}{k}\right)^{1/2}$$

Проведем исследование J_2 методом стационарных фаз для больших значений ky. Стационарные точки есть корни уравнения $M_2'(m) = 0$.

Очевидно, что положение стационарных точек на действительной оси существенно зависит от значения параметра ν, т. е. от отношения t к y. В то же время точки m_1 и m_2 — полюса функции $f_2(m)$ — занимают на действительной оси фиксированное положение. Исследуя положение стационарных точек относительно полюсов в зависимости от значений параметра ν, находим, что $\operatorname{Re} M_2(m) \leqslant 0$ на исходном контуре L для $y < u_1 t$ и на контуре L_1, обходящем полюс m_1 сверху, для

$$y > u_1 t, \qquad u_1 = \frac{g\sqrt{\omega^4 - k^2 g^2}}{2\omega^3} \tag{2.6}$$

Поэтому

$$J_2 = \begin{cases} N_1 + O\,[(ky)^{-1/2}] & (y > u_1 t) \\ O\,[(ky)^{-1/2}] & (y < u_1 t) \end{cases} \tag{2.7}$$

Перейдем к исследованию J_4, записав его так:

$$J_4 = \int_{(L)} f_4 \exp\,[kyM_4(m)]\, dm, \qquad M_4(m) = i\,[m - \nu\sqrt{\xi\Delta}]$$

Функция $f_4(m)$ имеет полюса только в точках m_3 и m_4. Исследуя положение стационарных точек выражения $M_4(m)$ относительно этих полюсов для различных значений параметра ν, приходим к выводу, что $\operatorname{Re} M_4(m) \leqslant 0$ на исходном контуре L для $y < u_2 t$ и на контуре L_2, обходящем полюс m_3 сверху, для $y > u_2 t$, где

$$u_2 = \frac{\omega\sqrt{\alpha^2 - k^2}}{2\alpha^2} \left[1 + \frac{2h\sigma(\alpha\sigma^{-1} + 1)}{1 - e^{-2\alpha h}}\, e^{-2\alpha h}\right] \tag{2.8}$$

Поэтому

$$J_4 = \begin{cases} N_2 + O\,[(ky)^{-1/2}] & (y > u_2 t) \\ O\,[(ky)^{-1/2}] & (y < u_2 t) \end{cases} \tag{2.9}$$

Так как $f_1(m)$ и $f_3(m)$ на действительной оси не имеют полюсов, то для больших значений ky находим

$$J_1 = O\,[(ky)^{-1/2}], \qquad J_3 = O\,[(ky)^{-1/2}] \tag{2.10}$$

Формулы (2.3), (2.5), (2.7), (2.9), (2.10) дают такое окончательное выражение вида волн на свободной поверхности жидкости:

$$\zeta_1 = \eta_1 + \eta_2 \tag{2.11}$$

где

$$\eta_1 = \begin{cases} \varkappa_1 \sin (kx + y\sqrt{\sigma^2 - k^2} - \omega t) & (y < u_1 t) \\ O\,[(ky)^{-1/2}] & (y > u_1 t) \end{cases} \tag{2.12}$$

$$\eta_2 = \begin{cases} \varkappa_2 \sin (kx + y\sqrt{\alpha^2 - k^2} - \omega t) & (y < u_2 t) \\ O\,[(ky)^{-1/2}] & (y > u_2 t) \end{cases} \tag{2.13}$$

$$\varkappa_1 = \frac{2p_0\omega^4 \sin a\sqrt{\sigma^2 - k^2}}{\rho_1 g\,(\omega^4 - k^2 g^2)} \left[1 - \frac{2e^{-2\sigma h}}{\beta - 1 + 2e^{-2\sigma h}}\right]$$
$$\varkappa_2 = \frac{4p_0 \sin a\sqrt{\alpha^2 - k^2}}{\rho_1 g\,(\alpha^2 - k^2)(\alpha - \sigma)}\;\frac{\alpha^2\sigma e^{-2\alpha h}}{1 + [2h(\alpha + \sigma) - 1]\,e^{-2\alpha h}} \tag{2.14}$$

Перейдем к исследованию второго выражения (1.10). Так как полюса функций ψ_k и f_k совпадают и вся подынтегральная сумма в (1.10) не имеет особенностей на действительной оси, то, заменяя интегрирование по действительной оси интегрирования по исходному контуру L, получаем

$$\zeta = \frac{ip_0}{\pi\rho_1 g}\, e^{ikx} \sum_{k=0}^{4} J_k, \quad J_k = \int_{(L)} \psi_k e^{i\,(n_k t + my)}\, dm \tag{2.15}$$

Проводя исследование интегралов J_k аналогично исследованию интегралов J_k, находим такое окончательное выражение для профиля волн на поверхности раздела:

$$\zeta = \eta_3 + \eta_4 \tag{2.16}$$

где

$$\eta_3 = \begin{cases} \varkappa_3 \sin (kx + y\sqrt{\sigma^2 - k^2} - \omega t) & (y < u_1 t) \\ O\,[(ky)^{-1/2}] & (y > u_1 t) \end{cases} \tag{2.17}$$

$$\eta_4 = \begin{cases} \varkappa_4 \sin (kx + y\sqrt{\alpha^2 - k^2} - \omega t) & (y < u_2 t) \\ O\,[(ky)^{-1/2}] & (y > u_2 t) \end{cases} \tag{2.18}$$

$$\varkappa_3 = e^{-h\sigma}\varkappa_1, \qquad \varkappa_4 = (1 - \gamma)^{-1}\varkappa_2 \tag{2.19}$$

Из формул (2.11) и (2.16) следует, что в рассматриваемом случае на свободной поверхности возникают две системы прогрессивных волн вида (2.12) и (2.13). При этом передний фронт волн (2.12) перемещается вдоль оси y со скоростью u_1, а передний фронт волн (2.13) со скоростью u_2, причем u_1 и u_2 равны соответственно проекциям на ось y групповых скоростей волн (2.12) и (2.13).

Волны, возникающие на поверхности раздела, отличаются от волн, возникающих на свободной поверхности только амплитудами. Оказывается, что $\varkappa_3$-амплитуда волн (2.17) в $\exp(\sigma h)$ раз меньше $\varkappa_1$-амплитуды волн на свободной поверхности, а $\varkappa_4$-амплитуда волн (2.18) в $(1 - \gamma)^{-1}$ раз больше амплитуды волн (2.13).

Для значений β, h, σ, удовлетворяющих неравенству $\exp(-2\sigma\beta h) \ll 1$ формулы для $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, u_2 значительно упрощаются и принимают вид ($\alpha = \beta\sigma$)

$$\varkappa_1 = \frac{2p_0\omega^4 \sin a\sqrt{\sigma^2 - k^2}}{\rho_1 g\,(\omega^4 - k^2 g^2)}, \qquad \varkappa_2 = \frac{4p_0\alpha^2\sigma \sin a\sqrt{\alpha^2 - k^2}}{\rho_1 g\,(\alpha^2 - k^2)(\alpha - \sigma)}\, e^{-2\alpha h}, \qquad u_2 = \frac{\omega\sqrt{\alpha^2 - k^2}}{2\alpha^2}$$

Амплитуды $\varkappa_3$ и $\varkappa_4$ даются формулами (2.19). Из формул (2.6) и (2.8) находим

$$u_1 \gtrless u_2 \quad \text{для } \beta \gtrless \frac{k^2}{\sigma^2 - k^2}$$

§ 3. Работа, которую совершают силы давления (1.1), на свободной поверхности в полосе $|y| < a$, по длине волны давлений к моменту времени t будет равна

$$W = p_0 \int_x^{\chi} \cos (kx - \omega t) \left[\int_{-b}^{b} \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)_{z=h} dy\right] dx \quad \left(\chi = x + \frac{2\pi}{k}\right) \tag{3.1}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)_{z=h} = \frac{p_0}{\pi\rho_1}\, e^{ikx} \int_{(L)} \sum_{k=0}^{4} \vartheta_k e^{i\,(my + n_k t)}\, dm, \quad \vartheta_k = \Delta\,(a_k e^{\Delta h} - b_k e^{-\Delta h})\,\frac{\sin ma}{m} \tag{3.2}$$

Здесь L — исходный путь интегрирования. Из формул (1.11) и (3.2) видно, что полюса функций f_k и ϑ_k совпадают. Учитывая, что $L\,\mathrm{Re}\,(in_k) \leqslant 0$ $(k = 1, \ldots, 4)$ на пути интегрирования, а производная $n_k'(m)$ имеет только одну стационарную точку $m = 0$, находим, что для больших значений $\sqrt{gkt}$ формула (3.2) принимает вид

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)_{z=h} = \frac{p_0}{\pi \rho_1} e^{i(kx - \omega t)} \int\limits_{(L)} \vartheta_0 e^{imy} dm + O\,[(\sqrt{gkt})^{-1/2}]$$

Подставляя последнее равенство в формулу (3.1) и проводя интегрирование, находим такое выражение работы E прикладываемых давлений на длине волны давлений за период $\tau = 2\pi\omega^{-1}$ для больших значений времени $t\,(\sqrt{gkt} \gg 1)$:

$$E = E_1 + E_2, \qquad E_1 = \frac{8\pi^2 p_0^2 (\beta - 1)\, \sigma^2 \sin^2 a \sqrt{\sigma^2 - k^2}}{k\rho_1 g\, (\sigma^2 - k^2)^{3/2}\, [\beta - 1 + 2e^{-2\Delta h}]}$$

$$E_2 = \frac{16\pi^2 p_0^2 \alpha^2 \sigma e^{-2\alpha h} \sin^2 a \sqrt{\alpha^2 - k^2}}{k\rho_1 g\, (\alpha^2 - k^2)^{3/2} (\alpha - \sigma)\, \{1 + [2h(\alpha + \sigma) - 1]\, e^{-2\Delta h}\}}$$

Найденные нами выражения незатухающих волн на свободной поверхности и поверхности раздела и выражение работы прикладываемых давлений справедливы для значений $\sigma > k$. В случае $\sigma < k$, $\alpha > k$ незатухающие волны вида (2.12) и (2.17) возникать не будут, при этом, как это следует из формулы (2.19), амплитуды волн на поверхности раздела будет в $(1-\gamma)^{-1}$ раз больше амплитуды волн на свободной поверхности. Такое же явление будет иметь место и в случае $\sigma > k$ при выполнении равенства:

$$a\sqrt{\sigma^2 - k^2} = n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

В обоих рассмотренных случаях слагаемое E_1, входящее в выражение работы давлений, будет отсутствовать. Заметим, что для значений $\alpha < k$ незатухающие волны возникать не будут, а прикладываемые давления для больших значений времени t не будут совершать работы.

Таким же методом получается решение плоской задачи о неустановившихся волнах, возникающих на свободной поверхности и поверхности раздела под действием периодических давлений вида $p = p_0 \exp(-i\omega t)$, прикладываемых к свободной поверхности, начиная с момента времени $t = 0$, в области $|x| < a$. Волны на свободной поверхности ζ_1 и на поверхности раздела ζ при этом имеют вид

$$\zeta_1 = \eta_1 + \eta_2, \qquad \zeta = \eta_3 + \eta_4,$$

где

$$\eta_{1,3} = \begin{cases} \varkappa_{1,3} \sin(\sigma x - \omega t) & (y < u_1 t), \\ O\,[(\sigma x)^{-1/2}] & (y > u_1 t), \end{cases} \qquad \eta_{2,4} = \begin{cases} \varkappa_{2,4} \sin(\alpha x - \omega t) & (y < u_2 t) \\ O\,[(\sigma x)^{-1/2}] & (y > u_2 t) \end{cases}$$

Здесь амплитуды волн и скорости u_1, u_2 даются формулами (2.14), (2.19), (2.6), (2.8), если в них положить $k = 0$. В случае $a\sigma = n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ амплитуда волн, возникающих на поверхности раздела, будет в $(1-\gamma)^{-1}$ раз больше амплитуды волн на свободной поверхности.

Поступила 29 I 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. О направленном излучении волн из области, подверженной внешнему давлению. ПММ, 1956, т. XX, вып. 3.
2. Войт С. С. Волны на поверхности жидкости, возникающие от перемещающейся периодической системы давлений. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 1.
3. Войт С. С. Волны на свободной поверхности и поверхности раздела, возникающие от периодически действующего источника. Тр. Морского гидрофизического ин-та АН СССР, 1959, т. XVIII.
4. Черкесов Л. В. Развитие поверхностных волн, возникающих от периодических перемещающихся давлений. ДАН СССР, 1959, т. 127, № 4.