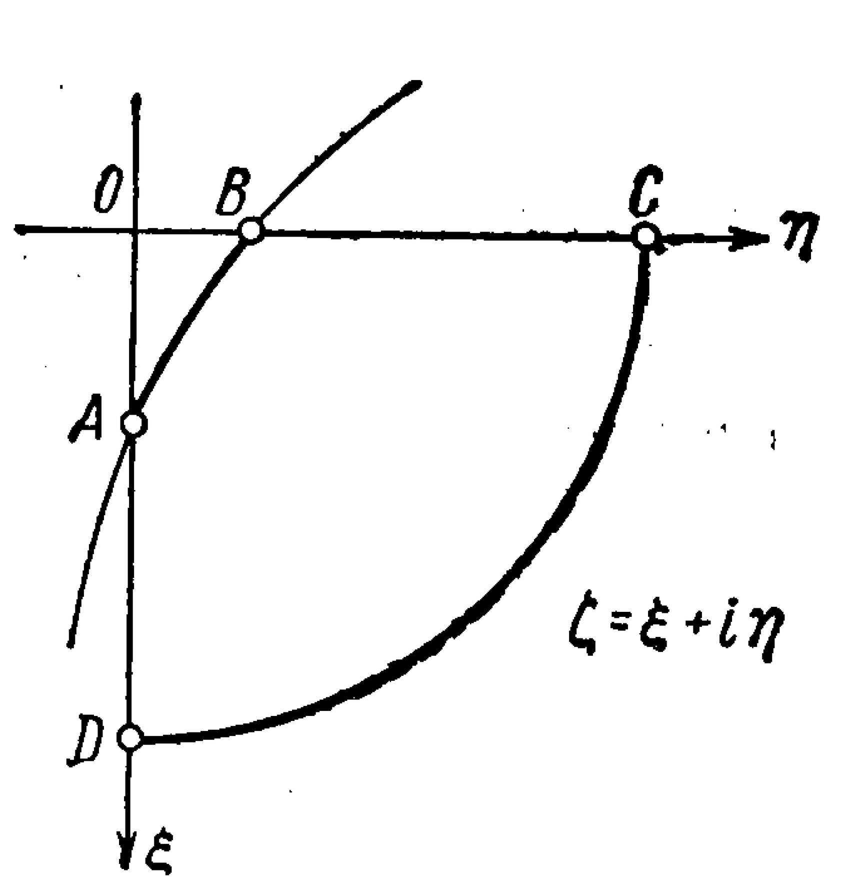
О РАБОТЕ З. Н. ДОБРОВОЛЬСКОЙ «ПРОНИКАНИЕ КЛИНА В СЖИМАЕМОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО»

С. С. Григорян

(Москва)

В работе [1] рассматривается задача о погружении с постоянной скоростью клина произвольного угла раствора 2α в полупространство, заполненное сжимаемой жидкостью в отсутствие силы тяжести. Для случая, когда величина $M = v/a_0$ мала (v — скорость клина, а a_0— невозмущенная скорость звука в среде), задача допускает линеаризацию. Автор решает ее для этого случая. В силу автомодельности движения задача сводится к краевой задаче для уравнения Лапласа в плоскости переменного $\zeta = \varepsilon \exp(i\theta)$ (придерживаясь обозначений работы [1]) для области $ABCD$ в виде четверти единичного круга с выброшенным углом (фиг. 1) с однородными граничными условиями [1]. Для решения этой задачи автор отображает область $ABCD$ на полуплоскость, причем ввиду сложности построения функции, реализующей такое отображение точно (из-за наличия криволинейного участка границы AB), строится функция, осуществляющая отображение на полуплоскость не области $ABCD$, а близкой к ней, полученной заменой участка границы AB, близкой к AB кривой, имеющей аналитическое представление, удобное для возможности явного написания отображающей функции. Затем выписывается формула, дающая решение возникающей таким образом в полуплоскости задачи Гильберта. Полученные в результате соотношения сложны и не дают эффективного решения задачи. Только в случае погружения тонкого клина ($\alpha \to 0$) решение удается представить в элементарных функциях, и оно совпадает с найденным ранее А. Я. Сагомоняном [2].



Решение задачи, данное в работе З. Н. Добровольской [1], неверно. Для построения решения рассматриваемой линейной задачи нет надобности в громоздких построениях с приближенным конформным отображением, которые составляют основное содержание работы [1]. Правильное решение задачи можно получить элементарными средствами, если ясно представить смысл процедуры, приводящей к формулировке линейной задачи.

Для пояснения сказанного заметим, что линеаризация по малому параметру M, которая делается в рассматриваемой задаче [1], допустима только на расстояниях от клина, значительных по сравнению с размером погруженной части клина.

Действительно, область, охваченная движением в момент t, ограничена смоченной поверхностью клина, свободной поверхностью и полуокружностью радиуса a_0t с центром в точке входа клина. Размер погруженной части клина при этом будет порядка vt, того же порядка будет размер расположенного вблизи клина участка свободной поверхности, претерпевшего существенное отклонение от первоначального прямолинейного положения. Но $M = v/a_0$— малая по сравнению с единицей величина.

Это и означает, что размеры области движения жидкости, в которой проявляются нелинейные эффекты, будут малы по сравнению с характерным размером всей области движения, где возмущение будет малым и может быть описано линейными соотношениями.

Поэтому, решая линейную задачу, следует принять, что решение этой задачи определено всюду внутри полукруга радиуса a_0t с центром в точке входа клина в жидкость, за исключением самой точки, в которой решение имеет особенность. В окрестности этой точки решение будет иметь асимптотику, которая и должна быть использована для того, чтобы решение линеаризированной задачи стыковать с решением нелинейной задачи на расстояниях, уже значительных по сравнению с vt — размером области, где существенна нелинейность, но еще малых по сравнению с a_0t — размером области, где движение линейно. Это стыкование и свяжет произвольный параметр, имеющийся в асимптотике линейного решения, с величиной угла α.

Решая линейную задачу, ни в коем случае нельзя требовать, чтобы оно точно удовлетворяло условию обтекания на клине, т. е. точному граничному условию на малом участке границы AB, ибо в окрестности AB вообще линейное решение несправедливо; линейное решение должно, повторяю, быть связано с нелинейной частью только путем согласования их асимптотических представлений. Но именно таким недопустимым образом и поступает автор работы [1].

Приведем решение задачи. Правильная постановка линейной задачи в соответствии со сказанным выше сводится к следующему. Найти в четверти единичного круга в плоскости $\zeta = \varepsilon \exp(i\theta)$ гармоническую функцию p (давление) по граничным условиям (фиг. 1)

$$p|_{OC} = 0, \qquad \left.\frac{\partial p}{\partial \eta}\right|_{OD} = 0, \qquad p|_{CD} = 0 \tag{1}$$

При этом функция p должна быть всюду в области OCD, включая границу, регулярной, кроме точки O, где она должна иметь особенность известного типа. Решение этой задачи путем, например, отображения области OCD на полуплоскость и применения формулы Келдыша — Седова [3] выписывается немедленно. Оно имеет вид

$$p = \rho_0 v^2 c(M, \alpha)\left(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon\right)\cos\theta \tag{2}$$

Безразмерная постоянная C зависит от угла клина α и числа M.

Для того чтобы найти эту зависимость, нужно решить нелинейную задачу о погружении клина в несжимаемую жидкость (эта задача до сих пор не решена) и найти асимптотику этого решения на далеких от клина расстояниях, которая для давления и даст формулу

$$p = \rho_0 v^2 c_1(\alpha)\frac{vt}{r}\cos\theta \tag{3}$$

ибо эта асимптотика будет не чем иным, как течением от плоского диполя. Требование совпадения правых частей (2) и (3) при условии, что

$$\varepsilon \ll 1, \quad vt / r \ll 1, \quad r / a_0 t = 2\varepsilon$$

(последнее следует из преобразования Чаплыгина при $\varepsilon \to 0$) определит $C(M, \alpha)$

$$C(M, \alpha) = \frac{1}{2} M C_1(\alpha) \tag{4}$$

Здесь $C_1(\alpha)$ — известная величина.

Из формулы (4) следует, что малость движения в линеаризированной задаче состоит в том, что давление p пропорционально M — малому параметру задачи.

Наконец, следует еще отметить, что при $\alpha \to 0$ решение работы [1] становится верным, и это связано с тем, что в этом случае линеаризация происходит не по параметру M, а по углу α. Параметр M может в этом случае принимать любое положительное значение, и линеаризация, тем не менее, при малом α будет допустима. Граничное условие на клине в этом случае должно удовлетворяться решением линеаризированной задачи точно, а не через «дипольную» асимптотику, как это было выше при $M \ll 1$. Таким образом, только при малом α решение работы [1] становится правильным (по причинам, о которых в работе [1] не указывается).

Поступила 30 IX 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Добровольская З. Н. Проникание клина в сжимаемое полупространство. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 3.
2. Сагомонян А. Я. Проникание узкого клина в сжимаемую жидкость. Вест. МГУ, 1956, № 2.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.