Прикладная математика и механика. Том XXVI. 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

# ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОКА ПРИ ТЕЧЕНИИ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ ПО КАНАЛУ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. Б. Ватажин, С. А. Регирер
(Москва)

В работе рассматриваются некоторые вопросы, связанные с расчетом пространственного распределения электрического тока в проводящей среде, движущейся по каналу в присутствии магнитного поля. Необходимость в постановке пространственных задач возникла из-за невозможности изучить в рамках одномерной теории такие явления как например, вход электропроводной среды в магнитное поле и влияние неоднородности краевых условий по периметру поперечного сечения и вдоль канала. Пространственные задачи должны рассматриваться также при изучении влияния эффекта Холла.

Получение точных решений пространственных задач на основе полной системы магнитогидродинамических уравнений пока практически неосуществимо и для облегчения их анализа создаются различные упрощенные модели. Известные приближенные решения [1-7] построены только для небольшого числа простейших задач. Ниже рассматривается задача о распределении тока при течении электропроводной среды в каналах в общей постановке, а также указываются предположения, приводящие к упрощенным схемам решения.

**§ 1.** Решение пространственных краевых задач существенно облегчается, если гидродинамические величины известны.

Так существуют движения, в которых уравнения гидродинамики и электродинамики разделяются и могут быть решены последовательно. Тогда решение уравнений электродинамики, учитывающее распределение скоростей, найденное из уравнений гидродинамики, является точным решением полной системы магнитогидродинамических уравнений (§ 2).

Если течение в канале происходит при слабом магнитогидродинамическом взаимодействии, то гидродинамические величины можно считать приближенно известными из соответствующих решений обычной гидродинамики, когда отсутствует магнитное поле, и определить при их помощи распределение электромагнитных величин.

Аналогичная последовательность вычислений применима также в случае, когда электромагнитные силы мало отличаются от потенциальных и поэтому в значительной степени уравновешиваются градиентом давления. При этом распределение скорости качественно будет мало отличаться от обычного гидродинамического.

Наконец, в некоторых случаях при произвольном магнитогидродинамическом взаимодействии для скорости и температуры в потоке имеются оценки или приближенные выражения, полученные теоретически или из эксперимента, и достаточные для определения электрических величин из уравнений Максвелла и закона Ома.

Будем далее предполагать, что имеет место один из перечисленных случаев и гидродинамические величины известны. Тогда стационарная задача о распределении токов описывается системой

$$f(\mathbf{j}, \sigma, \nabla\varphi, \mathbf{B}, \mathbf{v}, \ldots) = 0 \tag{1.1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \tag{1.2}$$

причем из уравнения (1.2) вытекает условие неразрывности плотности электрического тока

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = 0 \tag{1.3}$$

Здесь $\varphi$ — электростатический потенциал, $\mathbf{B}$ — вектор магнитной индукции, $\mu$ — магнитная проницаемость среды ($\mu = \mathrm{const}$). Уравнение (1.1) представляет собой условную запись закона Ома. В общем случае функция может зависеть не только от $\mathbf{j}$, $\mathbf{B}$, $\nabla\varphi$, скорости $\mathbf{v}$, скалярной электропроводности $\sigma$, но и от других параметров, характеризующих свойства и состояние среды. Существенно, что все аргументы $f$, кроме $\mathbf{B}$, $\mathbf{j}$, $\nabla\varphi$, предполагаются известными. Система (1.1) — (1.3) служит для определения $\mathbf{B}$, $\mathbf{j}$ и $\varphi$. При необходимости после ее решения можно найти поправки к гидродинамическим параметрам, решая уравнения гидродинамики с известными объемной силой и выделением тепла в единице объема.

Следует подчеркнуть, что в отличие от так называемых «кинематических» задач [8], в которых отыскиваются точные решения системы 1.1) — (1.3), в настоящей работе будет идти речь о ее приближенном решении на основе дополнительных предположений относительно свойств жидкости, геометрии потока и характера магнитного поля.

§ 2. Рассмотрим один из классов движений, когда поле скоростей среды может быть точно определено независимо от уравнений электродинамики. Пусть несжимаемая невязкая жидкость движется в бесконечно длинном плоском канале $-\infty < x < +\infty$, $-\delta_1(x) \leqslant y \leqslant \delta_2(x)$ в присутствии внешнего магнитного поля $\mathbf{B} = (0, 0, -B)$. Вектор внешнего поля должен удовлетворять уравнениям (1.2) при $\mathbf{j} \equiv 0$ (считается, что токи, создающие поле, находятся вне области течения среды), откуда следует, что $B = B_0 = \mathrm{const}$.

Магнитное же поле в жидкости может иметь $z$-компоненту, отличную от постоянной и зависящую от $x$ и $y$. Как известно [9], при наличии магнитного поля, перпендикулярного к плоскости течения, электромагнитная сила потенциальна и $\mathbf{j}\times\mathbf{B}/c = -(1/8\pi)\nabla B^2$. Поэтому распределение скоростей может быть найдено из известных уравнений

$$\operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{v}) = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{2.1}$$

не содержащих электромагнитных величин.

Распределение токов и магнитного поля отыскивается теперь из уравнений (1.2) и закона Ома (1.1), который с учетом эффекта Холла во многих практически интересных случаях можно записать в виде [10]

$$\mathbf{j} = \sigma\left(-\nabla\varphi + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right) - \alpha\mathbf{j}\times\mathbf{B} \qquad \left(\alpha = \frac{\omega\tau}{B}\right) \tag{2.2}$$

Заметим, что если не учитывать эффект Холла и считать электропроводность бесконечной, то величина $B_z$ легко определяется при помощи интеграла вмороженности [9].

Решение системы (1.2), (2.2) намного упрощается также в случае малых магнитных чисел Рейнольдса $R_m = VL / \nu_m$ ($V$ и $L$ — характерные скорость и размер канала, $\nu_m = c^2 / 4\pi\mu\sigma$), когда магнитное поле в жидкости мало отличается от внешнего поля $\mathbf{B} = (0, 0, -B_0)$. Тогда, положив для простоты $\sigma = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$ (при этом $\omega\tau = \text{const}$) и беря дивергенцию от (2.2), получим для потенциала $\varphi$ уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = \frac{B_0}{c}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \tag{2.3}$$

где $v_x(x, y)$, $v_y(x, y)$ известны из решения системы (2.1).

Компоненты вектора плотности тока выражаются через $\varphi$ так:

$$\begin{aligned} j_x &= \frac{\sigma}{1 + \omega^2\tau^2}\left[-\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \omega\tau\left(\frac{B_0 v_x}{c} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) - \frac{B_0 v_y}{c}\right] \\ j_y &= \frac{\sigma}{1 + \omega^2\tau^2}\left[-\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \omega\tau\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{B_0 v_y}{c}\right) + \frac{B_0 v_x}{c}\right] \end{aligned} \tag{2.4}$$

При $\sigma$ и $\alpha$, заданных как функции координат, вместо (2.3) будем иметь несколько более сложное уравнение.

Граничные условия на стенках канала, состоящих из непроводящих и идеально проводящих участков (диэлектриков и электродов), формулируются следующим образом. На диэлектриках отсутствует ток в направлении, перпендикулярном к стенке. Поэтому, обозначая через $\vartheta$ угол между осью $x$ и касательной к стенке, из (2.4) получим

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\sin\vartheta + \omega\tau\cos\vartheta) - \frac{\partial\varphi}{\partial y}(\cos\vartheta - \omega\tau\sin\vartheta) = \\ &= \frac{B_0 v_x}{c}(\omega\tau\sin\vartheta - \cos\vartheta) - \frac{B_0 v_y}{c}(\sin\vartheta + \omega\tau\cos\vartheta) \end{aligned} \tag{2.5}$$

(на диэлектриках)

На электродах, в силу предположения об идеальной проводимости, $\varphi = \text{const}$. Значения этих постоянных связываются с параметрами внешней электрической цепи посредством закона Ома (см. далее § 3).

Считая канал бесконечно длинным, необходимо еще задать асимптотические условия, т. е. условия на бесконечности вверх и вниз по потоку. Пусть, например, на бесконечности стенки канала электроды, расстояние между которыми постоянно, и токи Холла протекают свободно. Тогда $E_x = -\partial\varphi / \partial x = 0$ при $|x| \to \infty$. Если же на бесконечности стенки диэлектрики и условия таковы, что происходит разделение зарядов, то $j_x = j_y = 0$ при $|x| \to \infty$.

В том случае, когда канал имеет постоянную ширину и на бесконечности $v_y = 0$, $v_x = V = \text{const}$, то это же распределение скоростей, как следует из уравнений (2.1), поддерживается вдоль всего канала. Введя функцию $\varphi_1 = \varphi - BVy / c$, получим

$$\Delta\varphi_1 = 0, \qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = 0 \quad \text{(на электродах)} \tag{2.6}$$

$$\omega\tau\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \quad \text{(на диэлектриках)}$$

Система (2.6) была выведена и решена в работе [2] применительно к двум частным задачам.

Заметим еще, что аналогичное рассмотрение можно провести и для течения вязкой жидкости; при этом вместо (2.1) будем иметь уравнения Гельмгольца.

§ 3. Перейдем к течениям жидкости в присутствии трехмерного магнитного поля, когда соображения предыдущего раздела теряют силу.

Рассмотрим систему (1.1) — (1.3) для изотропно проводящей жидкости, когда закон Ома записывается в виде

$$\mathbf{j} = \sigma\left(-\nabla\varphi + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right) \qquad (3.1)$$

где $\sigma$ и $\mathbf{v}$ согласно основному предположению, заданные функции координат. Применяя к (3.1) операцию div, получим уравнение

$$\nabla\sigma\left(-\nabla\varphi + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right) - \sigma\triangle\varphi + \frac{\sigma}{c}(\mathbf{B}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v} - \mathbf{v}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}) = 0$$

которое, используя (1.2), можно привести к виду

$$\triangle\varphi = \nabla\ln\sigma\left(-\nabla\varphi + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right) + \frac{1}{c}\mathbf{B}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v} + \frac{1}{\nu_m}\mathbf{v}\nabla\varphi \qquad (3.2)$$

При малых магнитных числах Рейнольдса $R_m = VL/\nu_m \ll 1$ последним членом в (3.2) можно пренебречь: тогда

$$\triangle\varphi = \nabla\ln\sigma\left(-\nabla\varphi + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right) + \frac{\mathbf{B}}{c}\mathrm{rot}\,\mathbf{v} \qquad (3.3)$$

Магнитное поле $\mathbf{B}$ здесь можно считать известным и приближенно равным приложенному извне магнитному полю. При заданных $\mathbf{v}$ и $\sigma$ уравнение (3.3) с соответствующими граничными условиями позволяет найти потенциал $\varphi$, а при помощи (3.1) — ток $\mathbf{j}$.

Решение системы (3.1), (1.2), (1.3) значительно усложняется, если $R_m \gtrsim 1$. Так как при этом внешнее поле искажается движением среды и величина $\mathbf{B}$ является неизвестной, то уравнение (3.2) должно решаться совместно с уравнениями (3.1) и (1.2). Однако иногда задачу определения потенциала $\varphi$ можно отделить от определения магнитного поля. Например, если $\sigma = \mathrm{const}$, $\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = 0$ или $(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\nabla\ln\sigma = 0$, $\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = 0$, а в граничные условия для $\varphi$ входят только компоненты внешнего магнитного поля, то уравнения

$$\triangle\varphi = \frac{1}{\nu_m}\mathbf{v}\nabla\varphi \quad \text{или} \quad \triangle\varphi = -\nabla\ln\sigma\nabla\varphi + \frac{1}{\nu_m}\mathbf{v}\nabla\varphi \qquad (3.4)$$

могут быть решены независимо от других. После этого из уравнений

$$\nu_m\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = -c\nabla\varphi + \mathbf{v}\times\mathbf{B}, \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0 \qquad (3.5)$$

находится магнитное поле $\mathbf{B}$ и из (3.1) — ток $\mathbf{j}$. Одна из задач такого типа решена в работе [3].

В тех случаях, когда такое разделение уравнений невозможно, иногда все же допустимо сделать еще одно предположение, а именно считать известным распределение магнитного поля, и таким образом, опять исследовать только уравнения (3.1), (3.2). Это утверждение становится понятным, если рассматривать приближенную схему решения как первый шаг в некоторой системе последовательных приближений. Точность результатов при этом будет зависеть от точности вводимых в расчет величин $\mathbf{v}$, $\sigma$

и **B**, а погрешность может быть оценена при исследовании уравнений следующего приближения.

Следует заметить, что из уравнения (3.2) исключены производные от магнитного поля. При их сохранении точность приближенного расчета может значительно понизиться, так как, даже при малой ошибке в задании самого поля, ошибка в задании его производных может быть велика.

Переходя к формулировке граничных условий, предположим, что стенки канала состоят из участков с различной, в том числе и с конечной, проводимостью. На границе жидкости и стенки должны быть выполнены условия непрерывности нормальной составляющей плотности тока и касательной составляющей электрического поля $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$

$$\sigma\left[-\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\frac{1}{c}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})_n\right] = -\sigma^*\frac{\partial\varphi^*}{\partial n} \tag{3.6}$$

$$\boldsymbol{\tau}_1\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_1}+\boldsymbol{\tau}_2\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_2} = \boldsymbol{\tau}_1\frac{\partial\varphi^*}{\partial\tau_1}+\boldsymbol{\tau}_2\frac{\partial\varphi^*}{\partial\tau_2} \tag{3.7}$$

Здесь $\varphi^*$ — потенциал в стенке канала, $\sigma^*$ — ее проводимость, $\boldsymbol{\tau}_1$ и $\boldsymbol{\tau}_2$ — ортогональные единичные векторы в касательной плоскости к поверхности раздела сред. Распределение потенциала $\varphi^*$ в стенке подчиняется уравнению типа (3.2)

$$\sigma^*\Delta\varphi^* = -\nabla\sigma^*\nabla\varphi^* \tag{3.8}$$

и дополнительным условиям на внешней границе стенки. Легко видеть, что при $\sigma^* \to 0$ и $\sigma^* \to \infty$ получим отсюда известные условия

$$j_n = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{1}{c}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})_n \qquad \text{(на диэлектриках)} \tag{3.9}$$

$$\varphi = \mathrm{const} \qquad \text{(на электродах)} \tag{3.10}$$

Если два электрода соединены между собой через внешнюю цепь с сопротивлением $R$, по которой ток $J$ течет от электрода с потенциалом $\varphi_1$ к электроду с потенциалом $\varphi_2$, то величины $\varphi_1-\varphi_2$, $J$ и $R$ связаны законом Ома

$$\varphi_1-\varphi_2 = JR, \qquad J = \int\limits_{S_1} j_n dS = \int\limits_{S_2} j_n dS \tag{3.11}$$

где $S_i$ — площади электродов.

Асимптотические условия для $\varphi$ получаются из (3.1). Пусть например, направление основного потока совпадает с осью $x$, и на бесконечности магнитное поле убывает до нуля. Тогда токи и потенциал также должны стремиться к нулю

$$\varphi = 0, \quad \nabla\varphi = 0 \ \text{ при } \ x = \pm\infty \tag{3.12}$$

Если же на бесконечности происходит разделение зарядов и, следовательно, ток равен нулю, то

$$\nabla\varphi = \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B} \ \text{ при } \ x = \pm\infty \tag{3.13}$$

Дальнейшие упрощения записанных уравнений связаны обычно с предположением о прямолинейности линий тока жидкости: $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$. При этом компонента магнитного поля, параллельная скорости, не входит в расчет, и этим облегчается задание **B**. Однако решение пространственных задач для уравнений (3.2) или (3.3) остается сложным. Поэтому рассмотрим двумерные задачи, в которых эффекты продольного и поперечного растекания токов изучаются отдельно.

§ 4. Переход к двумерным задачам особенно просто осуществить в случае постоянной проводимости жидкости и малых значений $R_m$. Предположим, что жидкость течет в прямоугольном канале бесконечной длины с сечением $|y| < \delta(x)$, $|z| < a(x)$, причем профиль скорости, магнитное поле и граничные условия симметричны относительно плоскости $z = 0$, так что потенциал $\varphi$ есть заведомо четная функция $z$. Тогда, определяя операцию усреднения по $z$ как

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{+a} w(x, y, z)\, dz$$

и применяя ее к (3.1) и (3.3), получим

$$\langle \mathbf{j} \rangle = \sigma\Big(-\nabla\langle\varphi\rangle + \frac{1}{c}\langle \mathbf{v}\times\mathbf{B}\rangle\Big) \tag{4.1}$$

$$\triangle\langle\varphi\rangle = \frac{1}{c}\langle \mathbf{B}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}\rangle - \frac{1}{a}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=a} \tag{4.2}$$

Эти два уравнения вместе с усредненными по $z$ граничными условиями на стенках $y = \pm\delta$ и в бесконечности дают возможность решать двумерную продольную задачу.

В некоторых случаях допустимо пренебречь корреляциями при вычислении средних значений произведений, т. е. принять приближенно

$$\langle w_1 w_2\rangle = \langle w_1\rangle\langle w_2\rangle$$

Тогда уравнения (4.1) и (4.2) примут вид уравнений (3.1), (3.3), если в последних формально положить $j_z = 0$, $\partial/\partial z = 0$, $\sigma = \mathrm{const}$, $\mathbf{j} = \langle \mathbf{j}\rangle$, $\varphi = \langle\varphi\rangle$ и добавить слагаемое

$$\frac{1}{a}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=a} = -\frac{1}{a}\left(\frac{j_z}{\sigma} - \frac{1}{c}vB_y\right)_{z=a} \tag{4.3}$$

Этот дополнительный член точно обращается в нуль, например, если стенки $z = \pm a$ непроводящие и на них $v = 0$ или $B_y = 0$. В общем случае равенство (4.3) вместе с граничными условиями при $z = \pm a$ позволяет исключить из (4.2) неизвестную величину $\partial\varphi / \partial z$.

Аналогичные рассуждения при помощи усреднения по координате $x$ на некотором интервале (на длине электрода и т. п.) приводят к двумерным поперечным задачам. При переменной проводимости, не зависящей от координаты, по которой проводится усреднение, все рассуждения остаются в силе. В противном случае двумерные уравнения типа (4.1), (4.2) удается получить, только пренебрегая корреляциями при усреднении произведений, содержащих $\sigma$.

Рассмотрим более подробно задачи с прямолинейным течением жидкости при малых $R_m$ в прямоугольном канале постоянного сечения. Стенки канала $|z| = a$ всюду непроводящие, а на стенках $|y| = \delta$ имеются симметрично расположенные электроды. Пусть магнитное поле создается магнитом, полюсы которого ограничены плоскостями $z = \pm z_1$, $|x| < x_1$, $|y| < y_1$, причем $y_1 < \delta$. Тогда с большой степенью точности можно считать, что в области течения $B_x = B_x(x, z)$, $B_y = 0$, $B_z = B_z(x, z)$ и $B_z$ — четная функция $z$. При течении в режиме генерирования электроэнергии $B_z$ — «рабочая» компонента магнитного поля.

Принятые допущения и условие прямолинейности течения позволяют записать уравнения (3.1), (3.3) в форме, содержащей только рабочую компоненту поля

$$j_x = -\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad j_y = \sigma\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{c} vB_z\right), \qquad j_z = -\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{4.4}$$

$$\triangle \varphi = -\nabla \ln \sigma \nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \ln \sigma}{\partial y} vB_z - \frac{B_z}{c} \frac{\partial v}{\partial y} \tag{4.5}$$

При постоянной проводимости и скорости течения усреднение по $z$ с учетом условия (3.9) дает

$$\langle j_x \rangle = -\sigma \frac{\partial}{\partial x} \langle \varphi \rangle, \qquad \langle j_y \rangle = \sigma \left(-\frac{\partial}{\partial x} \langle \varphi \rangle - \left\langle \frac{vB_z}{c} \right\rangle \right) \tag{4.6}$$
$$\triangle \langle \varphi \rangle = 0$$

Граничные условия при $y = \pm \delta$ не меняют своего вида, так же как и интегральное условие (3.11); в последнем интегралы берутся по $x$ в пределах длины электрода.

Система (4.6), характеризующая усредненные по ширине канала электрическое поле и распределение токов, совпадает по виду с системой уравнений, использованной в работах [4–6] для решения плоских задач. Таким образом, результаты этих работ применимы не только к плоским задачам, но и к пространственным.

§ 5. Рассмотрим течение жидкости с анизотропной проводимостью, когда закон Ома имеет вид (2.1)

$$\mathbf{j} = \sigma\left(-\nabla \varphi + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) - \alpha \mathbf{j} \times \mathbf{B} \tag{5.1}$$

Магнитное поле здесь, в отличие от § 2, предполагается трехмерным. Из (5.1) можно найти явное выражение для $\mathbf{j}$

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma}{1 + \alpha^2 B^2} [\mathbf{E}' + \alpha \mathbf{B} \times \mathbf{E}' + \alpha^2 \mathbf{B} (\mathbf{E}' \mathbf{B})]$$

где $\mathbf{E}' = -\nabla \varphi + \mathbf{v} \times \mathbf{B} / c$, но дальнейший переход к уравнению для $\varphi$ оказывается весьма сложным и не приводит в общем случае к приемлемым результатам. В частности, не удается исключить из уравнения производные от магнитного поля. Поэтому преобразуем предварительно выражение (5.1) при помощи уравнения движения

$$\nabla p = \mathbf{F} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \tag{5.2}$$

где $\mathbf{F}$— сумма инерционных и вязких сил. Исключая $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ из (5.1) и (5.2), будем иметь

$$\mathbf{j} = \sigma\left(-\nabla \Phi + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) + \alpha c \mathbf{F} \qquad \left(\Phi = \varphi + \frac{\alpha c}{\sigma} p\right) \tag{5.3}$$

Теперь, применяя к (5.3) операцию div и считая магнитное число Рейнольдса малым, получим уравнение, аналогичное (3.3)

$$\triangle \Phi = \frac{1}{c} \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{v} + \alpha c \operatorname{div} \mathbf{F} \tag{5.4}$$

Вектор $\mathbf{F}$ здесь можно считать заданным, так как он выражается через известные гидродинамические величины (скорость $\mathbf{v}$ и ее производные).

Граничные условия для $\Phi$ на диэлектрике легко найти, требуя, чтобы нормальная составляющая тока обращалась в нуль

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=\frac{\alpha c}{\sigma}F_n+\frac{1}{c}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})_n \qquad \text{(на диэлектриках)} \tag{5.5}$$

Чтобы получить условие на электроде, исключим $\mathbf{j}$ из (5.2) и (5.3) и спроектируем получившиеся уравнения на касательные направления $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2$ к поверхности электрода. Тогда, замечая, что на этой поверхности

$$\varphi=\text{const},\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\tau_i}=\frac{\alpha c}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial\tau_i} \qquad (i=1,2) \tag{5.6}$$

получим

$$\frac{\sigma}{\alpha}\frac{\partial\Phi}{\partial\tau_i}+cF_{\tau_i}=\left|\left[\sigma\left(-\nabla\Phi+\frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)+\alpha c\mathbf{F}\right]\times\mathbf{B}\right|_{\tau_i} \qquad (i=1,2) \tag{5.7}$$

(на электродах)

Из (5.7) следует, в частности, что здесь параллельная скорости компонента поля, вообще говоря, сохраняется в уравнениях задачи.

Условие, связывающее разность потенциалов на двух электродах с параметрами внешней цепи, и выраженное через $\Phi$, можно получить из следующих соображений. Пусть, например, электроды расположены симметрично на стенках $y=\pm\delta$ прямоугольного канала. Тогда по определению

$$\varphi(\delta)-\varphi(-\delta)=\Phi(x,\delta,z)-\Phi(x,-\delta,z)-\frac{\alpha c}{\sigma}\left[p(x,\delta,z)-p(x,-\delta,z)\right]$$

Второе слагаемое в правой части можно преобразовать при помощи (5.2), а левую часть заменить через $JR$. Окончательно получим

$$JR=\Phi(x,\delta,z)-\Phi(x,-\delta,z)-\frac{\alpha c}{\sigma}\int_{-\delta}^{\delta}\left[F_y+\frac{1}{c}(\mathbf{j}\times\mathbf{B})_y\right]dy \tag{5.8}$$

Это равенство (в каналах другой формы оно может иметь иной вид) заменяет условие (3.11) в случае анизотропно проводящей среды.

Асимптотические условия для вспомогательного потенциала легко получаются из (5.3). В частности, при отсутствии магнитного поля и тока на бесконечности

$$\nabla\Phi=\frac{\alpha c}{\sigma}\mathbf{F} \qquad \text{при } x=\pm\infty \tag{5.9}$$

Переход от трехмерных задач к двумерным в указанных выше уравнениях может быть также осуществлен путем усреднения. Рассмотрим, например, частную задачу о течении в прямоугольном канале постоянного сечения, когда, как в § 4, $\mathbf{v}=(v,0,0)$, на стенках выполнено условие прилипания и магнитное поле имеет только компоненты $B_x$, $B_z$, зависящие от $x$, $z$. После усреднения вместо уравнения (5.4) получим двумерное уравнение Пуассона и вместо двух условий (5.7) — одно

$$\frac{\partial}{\partial x}\langle\Phi\rangle+\frac{\alpha c}{\sigma}\langle F_x\rangle=-\alpha\langle B_z\rangle\frac{\partial}{\partial y}\langle\Phi\rangle \qquad \text{(на электродах)} \tag{5.10}$$

Заметим, что при указанной структуре магнитного поля интеграл в (5.8) сведется к разности магнитных давлений при $\delta$ и $-\delta$, которая при симметричном внешнем поле и малых индуцированных полях равна нулю.

Таким образом, условие (5.10) также значительно упрощается и приводится к виду (3.11).

Следует отметить, что соображения, изложенные в этом разделе, можно по аналогии с § 3 распространить на случай, когда $\sigma$ и $\alpha$ суть заданные функции координат. Кроме того, можно использовать и более общую форму закона Ома, включающую электронное давление $p_e$

$$\mathbf{j} = \sigma\left(-\nabla\varphi + \frac{1}{c}\,\mathbf{v}\times\mathbf{B} + \frac{1}{en_e}\nabla p_e\right) - \alpha\mathbf{j}\times\mathbf{B}$$

Если ввести вспомогательный потенциал

$$\Phi = \varphi + \frac{\alpha c}{\sigma}p - \frac{p_e}{en_e}$$

и предположить, что $p_e = \zeta p$, $\zeta = \mathrm{const}$, то изменятся лишь постоянные множители в некоторых из написанных выше уравнений. Для полностью ионизованного газа предположение о постоянстве $\zeta$ означает, что отношение температур электронной и ионной компонент постоянно во всем объеме, причем $\zeta = T_e / (T_e + T_i)$.

Укажем в заключение, что задачи, рассмотренные в настоящей статье, при малых магнитных числах Рейнольдса сводятся к уравнению Пуассона или к неоднородному эллиптическому уравнению более общего вида с линейными краевыми условиями. Однородные уравнения получаются только в отдельных случаях. Вместе с тем при рассмотрении конкретных задач предпочтительнее пользоваться однородными уравнениями, для которых существуют эффективные методы решения, основанные на теории функции комплексного переменного. Поэтому представляет интерес изучение задач о течении в каналах с диэлектрическими стенками, так как отсюда получаются наиболее простые частные решения неоднородных уравнений, необходимые для перехода к однородным.

Поступила 5 III 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Реслер Э., Сирс У. Перспективы магнитной аэродинамики. Сб. пер., Механика, 1958, № 6(52), стр. 3—22.
2. Hurwitz H., Jr., Kilb R. W., Sutton G. W. Influence of tensor conductivity on current distribution in a MHD generator. J. Appl. Phys., 1961, vol. 32, No. 2, pp. 205—216.
3. Boucher R. A., Ames D. B. End effect losses in dc magnetohydrodynamic generators. J. Appl. Phys., 1961, vol. 32, No. 5, pp. 755—759.
4. Бирзвалк Ю. А. Эквивалентная схема канала насоса постоянного тока и расчет насоса на максимум к. п. д. Тр. Ин-та физики АН ЛатвССР, 1961, т. XII, стр. 25—141.
5. Ватажин А. Б. К решению некоторых краевых задач магнитогидродинамики. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 5, стр. 845—850.
6. Ватажин А. Б. Магнитогидродинамическое течение в плоском канале с конечными электродами. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 1, стр. 52—58.
7. Sutton G. W., Carlson A. W. End effects in inviscid flow in a magnetohydrodynamic channel. J. Fluid Mech., 1961, vol. 11, No. 1, pp. 121—132.
8. Cowley M. D. On some kinematic problems in magnetohydrodynamics. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1961, vol. 14, No. 3, pp. 319—333.
9. Grad H. Reducible problems in magneto-fluid dynamic steady flows. Rev. Mod. Phys., 1960, vol. 32, No. 4, pp. 830—847.
10. Любимов Г. А. О форме закона Ома в магнитной гидродинамике. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 4, стр. 611—622.