

ВЛИЯНИЕ АНИЗОТРОПИИ ПРОВОДИМОСТИ НА НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Э. Г. Сахновский, Я. С. Уфлянд

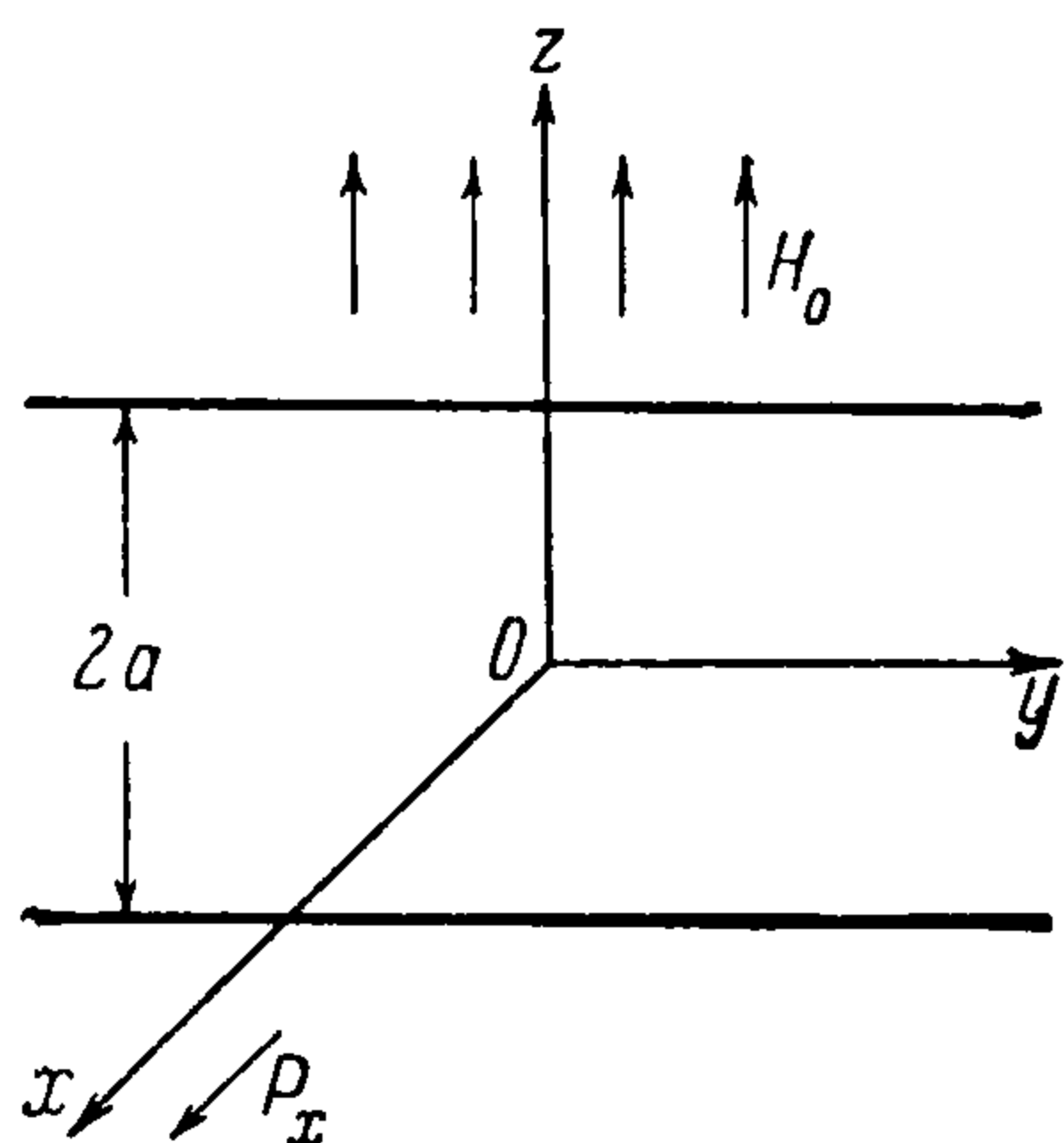
(Ленинград)

В работе исследуется неустановившееся течение слабо ионизованного невязкого газа между параллельными пластинами при наличии поперечного магнитного поля.

При помощи преобразования Лапласа получено точное решение задачи в предположении, что можно пренебречь скольжением ионов относительно газа, а также эффектами сжимаемости. Приведение решения к вещественной форме осуществлено для случая идеально проводящих пластин.

Показано, что в отличие от обычного случая изотропной проводимости рассматриваемый нестационарный режим всегда имеет характер затухающих колебаний.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим неустановившееся движение электропроводного газа между двумя параллельными пластинами (стенками канала), вызванное постоянным перепадом давления P_x , причем имеется перпендикулярное к стенкам однородное магнитное поле (фиг. 1).



Фиг. 1

Если $\omega\tau \ll 1$, то проводимость можно считать скалярной величиной (ω — циклотронная частота заряженной частицы, τ — среднее время между столкновениями). При этих условиях в рассматриваемой задаче как скорость, так и индуцированное магнитное поле имеют только одну составляющую в направлении приложенного градиента давления (Ox), а электрическое поле и ток направлены по оси y . Если же условие $\omega\tau \ll 1$ нарушается, то проводимость будет носить анизотропный характер и течение газа усложняется, так как у вектора плотности тока появляется составляющая по оси x , вызывающая в свою очередь поперечные потоки газа и т. д.

В дальнейшем будем предполагать, что для ионов соотношение $\omega_i\tau_i \ll 1$ выполнено. Это позволяет пренебречь эффектом скольжения ионов относительно газа и использовать закон Ома в форме [1-3]

$$\mathbf{j} + \frac{\omega_e\tau^*}{H} \mathbf{j} \times \mathbf{H} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{H}) \quad (1.1)$$

где \mathbf{j} — плотность тока, \mathbf{H} и \mathbf{E} — магнитное и электрическое поля, \mathbf{v} — скорость газа, σ — проводимость, ω_e — циклотронная частота электронов, τ^* — среднее время между столкновениями электронов с ионами и нейтральными частицами (принята система *CGSM*, причем коэффициент магнитной проницаемости считается равным единице).

Система уравнений магнитной гидродинамики для идеальной несжимаемой среды имеет вид (ρ — плотность, p — давление газа)

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{j} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H}$$

В рассматриваемом случае вектора скорости и индуцированного магнитного поля имеют составляющие только по осям x и y , которые зависят от z и t и удовлетворяют системе уравнений в частных производных. После введения безразмерных величин

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{v_0}, \quad \mathbf{h} = \frac{\mathbf{H}}{H_0}, \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{E}}{v_0 H_0}, \quad \zeta = \frac{z}{a}, \quad \tau = \frac{v_0 t}{a} \quad (1.3)$$

$$P = \frac{P_x a}{\rho v_0^2}, \quad R_m = 4\pi \sigma a v_0, \quad S = \frac{H_0^2 \sigma a}{\rho v_0}, \quad \beta = \omega_e \tau^* \frac{H_0}{H} = \frac{e}{m} H_0 \tau^*$$

(v_0 — характерная скорость, e и m — заряд и масса электрона) упомянутая система принимает вид

$$\frac{\partial h_x}{\partial \tau} = \frac{1}{R_m} \left(\frac{\partial^2 h_x}{\partial \zeta^2} + \beta \frac{\partial^2 h_y}{\partial \zeta^2} \right) + \frac{\partial u_x}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial h_y}{\partial \tau} = \frac{1}{R_m} \left(\frac{\partial^2 h_y}{\partial \zeta^2} - \beta \frac{\partial^2 h_x}{\partial \zeta^2} \right) + \frac{\partial u_y}{\partial \zeta}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial \tau} = P + \frac{S}{R_m} \frac{\partial h_x}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial \tau} = \frac{S}{R_m} \frac{\partial h_y}{\partial \zeta} \quad (1.4)$$

Если определить составляющие градиента давления зависимостями

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -P_x, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial H^2}{\partial z} \quad (1.5)$$

то все уравнения магнитной гидродинамики будут удовлетворены, причем составляющие электрического поля даются следующими формулами:

$$e_x = \frac{1}{R_m} \left(\beta \frac{\partial h_x}{\partial \zeta} - \frac{\partial h_y}{\partial \zeta} \right) - u_y, \quad e_z = u_y h_x - u_x h_y - \frac{\beta}{2R_m} \frac{\partial h^2}{\partial \zeta} \quad (1.6)$$

$$e_y = \frac{1}{R_m} \left(\beta \frac{\partial h_y}{\partial \zeta} + \frac{\partial h_x}{\partial \zeta} \right) + u_x,$$

Система (1.4) должна решаться при нулевых начальных условиях

$$u_x = u_y = h_x = h_y = 0 \quad \text{при } \tau = 0 \quad (1.7)$$

и граничных условиях, заключающихся в непрерывности касательных составляющих электрического и магнитного поля при переходе из области газа в область стенок канала (индекс * относится к области стенок)

$$h_x = h_x^*, \quad h_y = h_y^*, \quad e_x = e_x^*, \quad e_y = e_y^* \quad \text{при } \zeta = \pm 1 \quad (1.8)$$

Таким образом, для решения задачи в случае стенок конечной проводимости (σ^*) необходимо наряду с системой (1.4) рассматривать уравнения электродинамики в области $|\zeta| > 1$ (током смещения пренебрегаем)

$$\frac{\partial h_x^*}{\partial \zeta} = R_m^* e_y^*, \quad -\frac{\partial h_y^*}{\partial \zeta} = R_m^* e_x^*, \quad \frac{\partial e_x^*}{\partial \zeta} = -\frac{\partial h_y^*}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial e_y^*}{\partial \zeta} = \frac{\partial h_x^*}{\partial \tau} \quad (1.9)$$

с начальными условиями

$$h_x^* = h_y^* = 0 \quad \text{при } \tau = 0 \quad (1.10)$$

Предполагается, что при $|\zeta| \rightarrow \infty$ электромагнитные поля остаются ограниченными. Итак, задача сводится к решению систем (1.4) и (1.9) при граничных условиях (1.8) и начальных условиях (1.7) и (1.10).

§ 2. Общее решение задачи. Применяя к (1.4) преобразование Лапласа и обозначая

$$F(\zeta, p) = \int_0^{\infty} f(\zeta, \tau) e^{-p\tau} d\tau \quad (2.1)$$

получаем для области $|\zeta| < 1$ с учетом начальных условий (1.7)

$$pU_x = \frac{P}{p} + \frac{1}{R_m} H_x', \quad pU_y = \frac{S}{R_m} H_y' \quad (2.2)$$

$$pH_x = \frac{1}{R_m} (H_x'' + \beta H_y'') + U_x', \quad pH_y = \frac{1}{R_m} (H_y'' - \beta H_x'') + U_y'$$

Исключение величин U_x и U_y приводит к следующей системе относительно преобразованных по Лапласу индуцированных магнитных полей

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{S}{p}\right) H_x'' + \beta H_y'' - R_m p H_x &= 0 \\ \left(1 + \frac{S}{p}\right) H_y'' - \beta H_x'' - R_m p H_y &= 0 \end{aligned} \quad (|\zeta| < 1) \quad (2.3)$$

Если положить

$$\Phi = h_x - i h_y \quad (2.4)$$

то система (2.3) может быть записана в виде одного уравнения

$$\left(1 + i\beta + \frac{S}{p}\right) \Phi'' - p R_m \Phi = 0 \quad (2.5)$$

Использование преобразования Лапласа при решении уравнений (1.9) с условиями (1.10) приводит к системе для области $|\zeta| > 1$:

$$H_x^* = R_m^* E_y^*, \quad p H_x^* = E_y^*, \quad H_y^* = -R_m^* E_x^*, \quad p H_y^* = -E_x^* \quad (2.6)$$

Решая вытекающие из (2.6) уравнения

$$H_x^{*''} - p R_m^* H_x^* = 0, \quad H_y^{*''} - p R_m^* H_y^* = 0 \quad (2.7)$$

и принимая во внимание условия ограниченности при $|\zeta| \rightarrow \infty$, имеем (здесь и в дальнейшем верхний знак относится к области $\zeta > 1$, а нижний — к области $\zeta < -1$)

$$H_x^* = M \exp(-|\zeta| \sqrt{R_m^* p}), \quad H_y^* = N \exp(-|\zeta| \sqrt{R_m^* p}) \quad (2.8)$$

Полученные соотношения позволяют, не находя полностью электромагнитные поля в стенках канала, составить граничные условия, необходимые для решения основного уравнения (2.5). В самом деле, применяя преобразование Лапласа к формулам (1.6) [и исключая величины U_x и U_y при помощи уравнений (2.2)], получаем

$$E_x = \frac{1}{R_m} \left[\beta H_x' - \left(1 + \frac{S}{p}\right) H_y' \right], \quad E_y = \frac{1}{R_m} \left[\beta H_y' + \left(1 + \frac{S}{p}\right) H_x' \right] + \frac{P}{p^2} \quad (2.9)$$

Теперь, выражая электрические поля в стенках через магнитные

$$E_x^* = \pm \sqrt{p/R_m^*} H_y^*, \quad E_y^* = \mp \sqrt{p/R_m^*} H_x^* \quad (2.10)$$

и преобразуя по Лапласу (1.8), получаем требуемые граничные условия:

$$\begin{aligned} \left[\beta H_x' - \left(1 + \frac{S}{p}\right) H_y' \right]_{\zeta=\pm 1} &= \pm R_m \sqrt{p/R_m^*} H_y|_{\zeta=\pm 1} \\ \left[\beta H_y' + \left(1 + \frac{S}{p}\right) H_x' \right]_{\zeta=\pm 1} + \frac{R_m P}{p^2} &= \mp R_m \sqrt{p/R_m^*} H_x|_{\zeta=\pm 1} \end{aligned} \quad (2.11)$$

которые могут быть записаны в виде следующего соотношения:

$$\left[\left(1 + i\beta + \frac{S}{p}\right) \Phi' \pm R_m \sqrt{p/R_m^*} \Phi \right]_{\zeta=\pm 1} + \frac{P R_m}{p^2} = 0 \quad (2.12)$$

Таким образом, задача заключается в решении уравнения (2.5) с граничными условиями (2.12).

В силу нечетности полей h_x и h_y по координате ζ , полагаем

$$\Phi = A \operatorname{sh} \gamma \zeta, \quad \gamma = \frac{p \sqrt{R_m}}{\sqrt{(1+i\beta)p+S}} \quad (2.13)$$

причем величина A находится из краевых условий (2.12)

$$A = - \frac{1}{(1+ip+S/p)\gamma \operatorname{ch} \gamma + R_m \sqrt{p/R_m^*} \operatorname{sh} \gamma} \frac{PR_m}{p^2} \quad (2.14)$$

Общие формулы для индуцированных магнитных полей легко получаются теперь при помощи теоремы обращения Римана — Меллина

$$h_x = \operatorname{Re} \varphi, \quad h_y = -\operatorname{Im} \varphi \quad (2.15)$$

$$\varphi = - \frac{P}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{\operatorname{sh} \gamma \zeta}{p/\gamma \operatorname{ch} \gamma + \sqrt{p/R_m^*} \operatorname{sh} \gamma} \frac{\exp(p\tau)}{p^2} dp \quad (2.16)$$

Аналогичные выражения для скоростей u_x и u_y могут быть найдены на основании вытекающего из (2.2) соотношения

$$U_x - iU_y = \frac{P}{p^2} + \frac{S}{pR_m} \Phi' \quad (2.17)$$

Таким образом

$$u_x = P\tau + \operatorname{Re} \psi, \quad u_y = -\operatorname{Im} \psi \quad (2.18)$$

где

$$\psi = - \frac{PS}{R_m} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{\gamma \operatorname{ch} \gamma \zeta}{p/\gamma \operatorname{ch} \gamma + \sqrt{p/R_m^*} \operatorname{sh} \gamma} \frac{\exp(p\tau)}{p^3} dp \quad (2.19)$$

На этом общее решение задачи можно считать законченным.

Фактическое проведение выкладок, приводящих полученное решение к вещественному виду, оказывается довольно сложным, что связано, в частности, с многозначностью преобразованных функций и смешанным характером спектра собственных значений (см. работу [4], где аналогичное обстоятельство имело место при течении вязкой жидкости с изотропной проводимостью). Поэтому в дальнейшем остановимся на частном случае идеально проводящих стенок канала.

§ 3. Течение в канале с идеально проводящими стенками. Полагая в формулах предыдущего параграфа $R_m^* = \infty$, получаем общее решение задачи в следующем виде:

$$\begin{aligned} h_x(\zeta, \tau) &= \operatorname{Re} \varphi(\zeta, \tau), & h_y(\zeta, \tau) &= -\operatorname{Im} \varphi(\zeta, \tau) \\ u_x(\zeta, \tau) &= P\tau + \operatorname{Re} \psi(\zeta, \tau), & u_y(\zeta, \tau) &= -\operatorname{Im} \psi(\zeta, \tau) \end{aligned} \quad (3.1)$$

где, как и выше, введены обозначения

$$\varphi = - \frac{P}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{\gamma \operatorname{sh} \gamma \zeta}{p^3 \operatorname{ch} \gamma} \exp(p\tau) dp, \quad \psi = - \frac{PS}{2\pi i R_m} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{\gamma^2 \operatorname{ch} \gamma \zeta}{p^4 \operatorname{ch} \gamma} \exp(p\tau) dp$$

Особыми точками подынтегральных функций являются полюса $p = 0$ и $p = p_n$; последние получаются решением уравнения $\operatorname{ch} \gamma = 0$ и даются формулой ($n = 0, 1, 2, \dots$)

$$p_{n1,2} = \frac{\lambda_n^2}{2R_m} (1+i\beta) \left[-1 \mp \sqrt{1 - \frac{4R_m S}{\lambda_n^2 (1+i\beta)^2}} \right], \quad \lambda_n = \frac{2n+1}{2} \pi \quad (3.3)$$

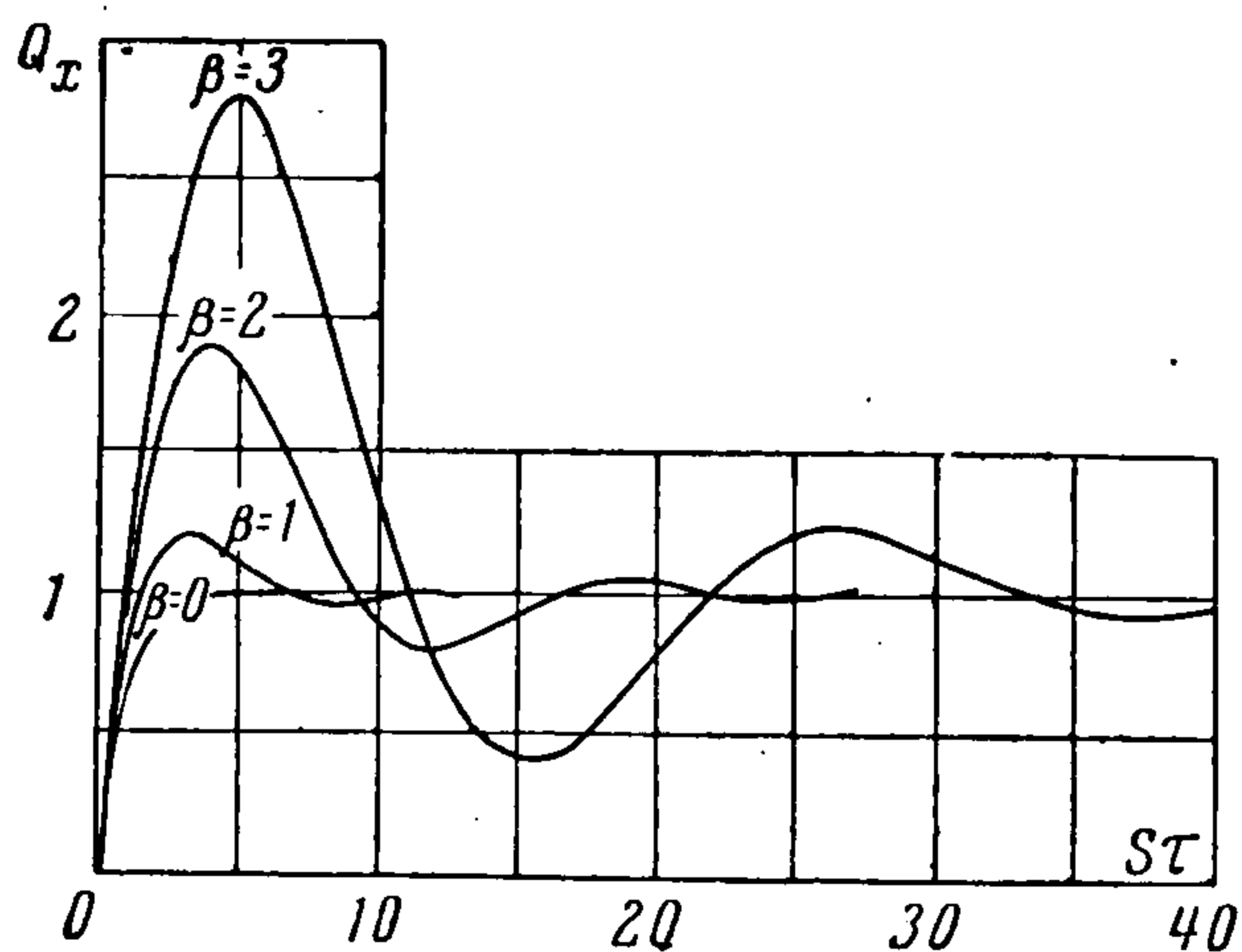
Применение теоремы о вычетах приводит к решению задачи в вещественной форме

$$\begin{aligned} h_x &= h_x^\circ + 2PR_m \operatorname{Re} F_1, & h_y &= h_y^\circ - 2PR_m \operatorname{Im} F_1 \\ u_x &= u_x^\circ + 2PS \operatorname{Re} F_2, & u_y &= u_y^\circ - 2PS \operatorname{Im} F_2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} F_1(\zeta, \tau) &= \frac{1}{1+i\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\exp(p_{n1}\tau)}{p_{n1}} - \frac{\exp(p_{n2}\tau)}{p_{n2}} \right] \frac{(-1)^n \sin \lambda_n \zeta}{\lambda_n^2 \sqrt{1 - 4R_m S / \lambda_n^2 (1+i\beta)^2}} \\ F_2(\zeta, \tau) &= \frac{1}{1+i\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\exp(p_{n1}\tau)}{p_{n1}^2} - \frac{\exp(p_{n2}\tau)}{p_{n2}^2} \right] \frac{(-1)^n \cos \lambda_n \zeta}{\lambda_n \sqrt{1 - 4R_m S / \lambda_n^2 (1+i\beta)^2}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

и выделен стационарный режим



Фиг. 2

$$\begin{aligned} h_x^\circ &= -\frac{R_m P}{S} \zeta, & h_y^\circ &= 0, & u_x^\circ &= \frac{P}{S} \\ u_y^\circ &= -\frac{P}{S} \beta \end{aligned} \quad (3.6)$$

Таким образом, в случае идеально проводящих стенок канала существует стационарный режим, в котором газ движется равномерно со скоростью $v_x^\circ = P_x / H_0^2 \sigma$ в направлении приложенного градиента давления P_x , а также со скоростью $v_y^\circ = -\beta v_x^\circ$ в перпендикулярном

направлении. При этом в газе течет постоянный ток с плотностью $j_y = -P_x / H_0$, а электрические поля отсутствуют.

Полагая в полученном решении $\beta = 0$, находим значения полей и скоростей для случая изотропной проводимости¹:

$$\begin{aligned} h_x &= -\frac{R_m P}{S} \zeta + 2PR_m \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\exp(q_{n1}\tau)}{q_{n1}} - \frac{\exp(q_{n2}\tau)}{q_{n2}} \right] \frac{(-1)^n \sin \lambda_n \zeta}{\lambda_n^2 \sqrt{1 - 4R_m S / \lambda_n^2}} \\ u_x &= \frac{P}{S} + 2PS \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\exp(q_{n1}\tau)}{q_{n1}^2} - \frac{\exp(q_{n2}\tau)}{q_{n2}^2} \right] \frac{(-1)^n \cos \lambda_n \zeta}{\lambda_n \sqrt{1 - 4R_m S / \lambda_n^2}} \\ h_y &\equiv 0, & u_y &\equiv 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$q_{n1,2} = \frac{\lambda_n^2}{2R_m} \left[-1 \mp \sqrt{1 - \frac{4R_m S}{\lambda_n^2}} \right] \quad (3.8)$$

Из полученных формул вытекает, что при $SR_m < (\pi/4)^2$ все q_n будут вещественными отрицательными числами, так что переходной режим носит аперриодический характер. Если же $SR_m > (\pi/4)^2$, то некоторое конечное количество (N) чисел q_n будут комплексными (с отрицательной вещественной частью) и переход к стационарному режиму происходит через затухающие колебания с частотами

$$\frac{\lambda_n^2 v_0}{2R_m a} \sqrt{\frac{4R_m S}{\lambda_n^2} - 1} \quad (0 \leq n \leq N-1)$$

Оказывается, что наличие анизотропии проводимости вносит существенные изменения в характер переходного режима, а именно, колеба-

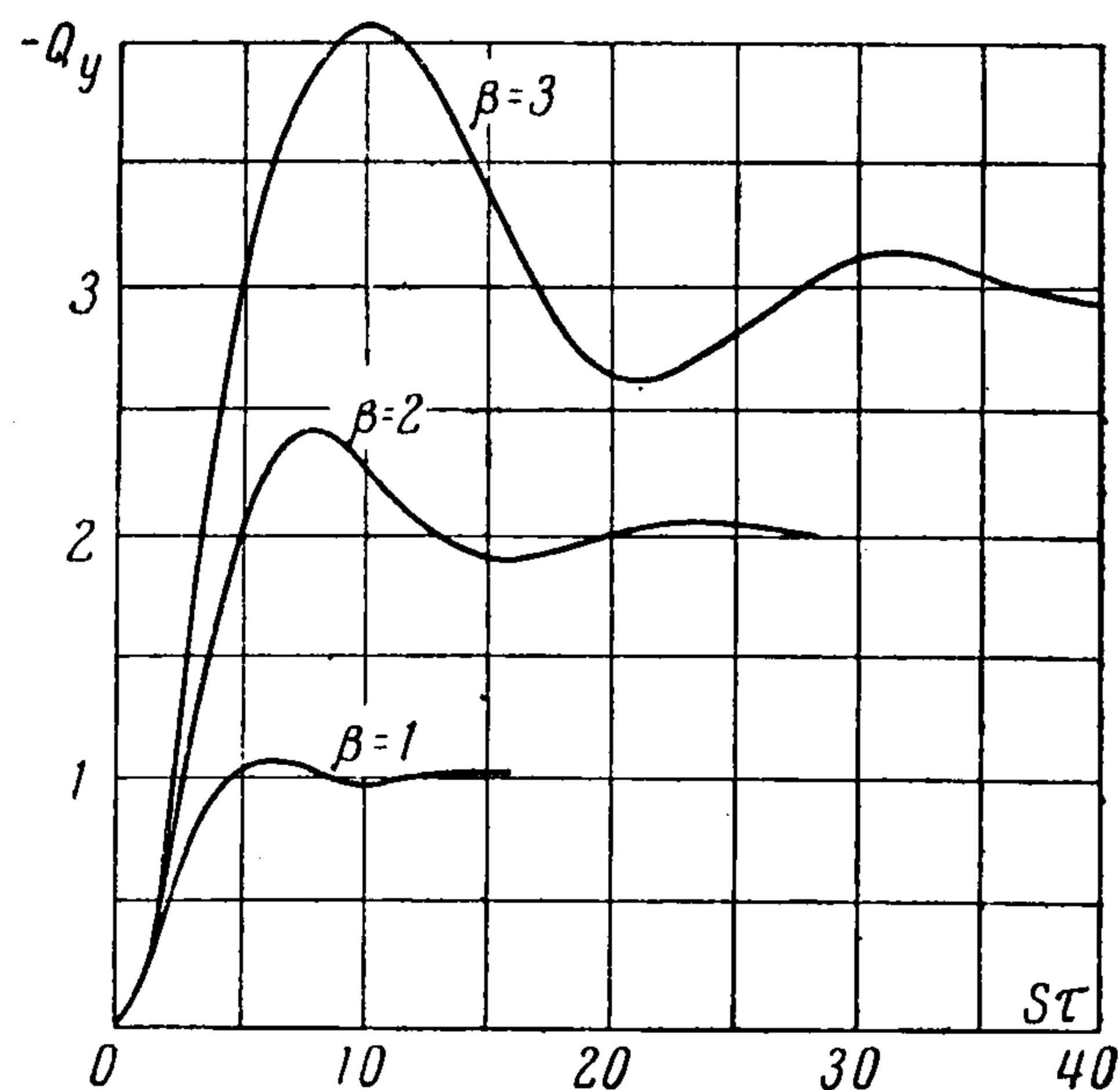
¹ Сходная задача рассматривалась в работе [5].

тельный процесс возникает при любом сколь угодно малом значении магнитного числа Рейнольдса R_m .

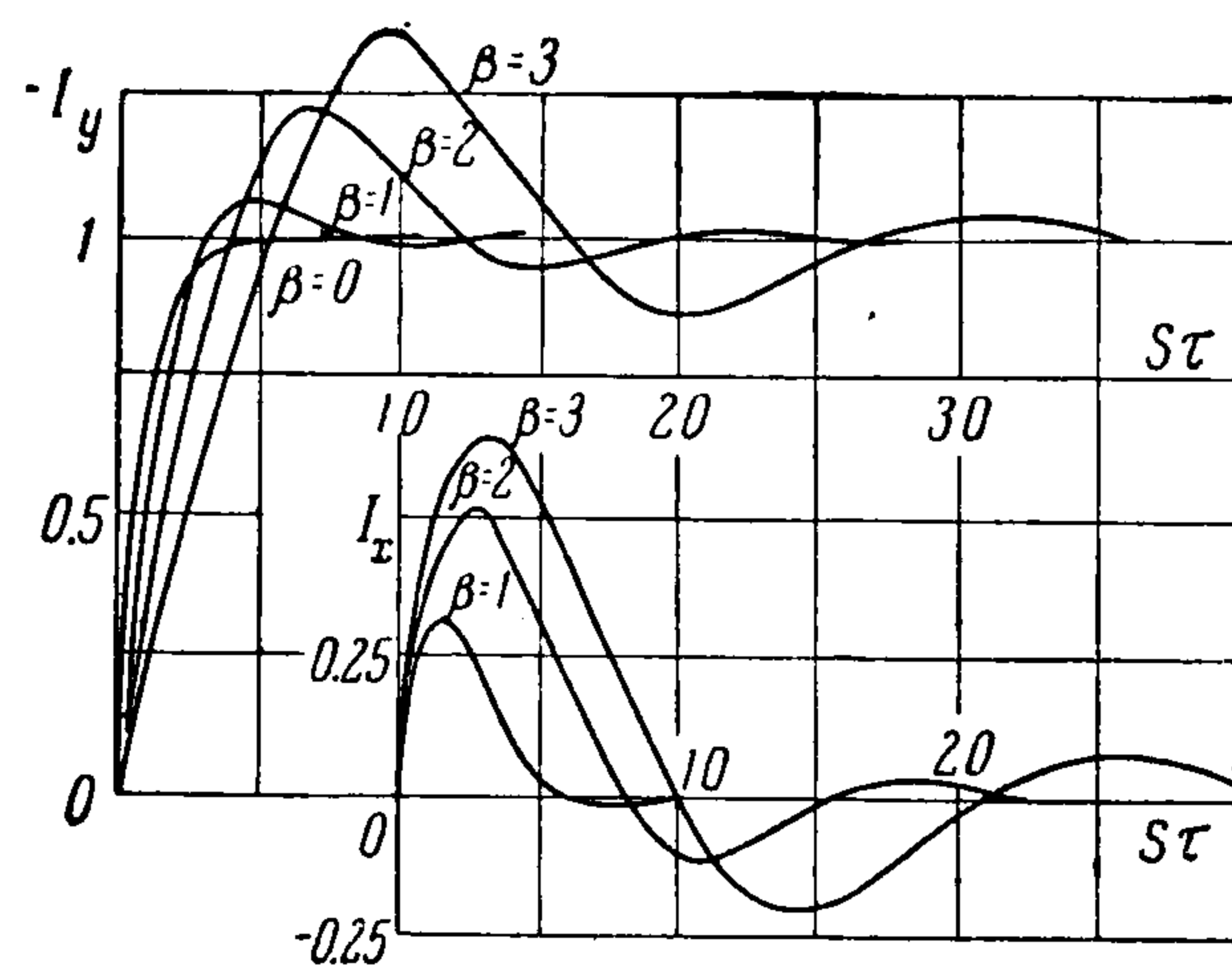
Чтобы это показать, рассмотрим вытекающие из формул (3.4), (3.5) асимптотические выражения полей и скоростей при $R_m \ll 1$ ($\lambda = S/(1 + \beta^2)$)

$$\begin{aligned} h_x &= -\frac{PR_m}{S} \xi [1 - \exp(-\lambda\tau) \cos \lambda\beta\tau] + O(R_m^2) \\ h_y &= -\frac{PR_m}{S} \zeta \exp(-\lambda\tau) \sin \lambda\beta\tau + O(R_m^2) \\ u_x &= \frac{P}{S} [1 - \exp(-\lambda\tau) (\cos \lambda\beta\tau - \beta \sin \lambda\beta\tau)] + O(R_m) \\ u_y &= -\frac{P}{S} [\beta - \exp(-\lambda\tau) (\sin \lambda\beta\tau + \beta \cos \lambda\beta\tau)] + O(R_m) \end{aligned} \quad (3.9)$$

При этом предполагается, что магнитный параметр взаимодействия S будет величиной порядка единицы. Это имеет место, например, при достаточно сильных магнитных полях.



Фиг. 3



Фиг. 4

Из последних формул видно, что при $R_m \ll 1$ и $\beta \neq 0$ (наличие анизотропии проводимости) переходной режим осуществляется в виде колебаний частоты $\lambda\beta$, в то время как при $\beta = 0$ (отсутствие анизотропии) он носит чисто апериодический характер.

В заключение приводим графики значений поперечных расходов (фиг. 2 и 3) и текущих в газе полных электрических токов (фиг. 4), построенные при помощи формул (3.9) для различных значений времени $S\tau = H_0^2 \sigma / \rho t$ и параметра анизотропии β и отнесенные к величинам $2Pv_0\alpha / S$ и $PR_m H_0 / 2\pi S$ соответственно.

Поступила 3 II 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Любимов Г. А. О форме закона Ома в магнитной гидродинамике. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 4, стр. 611.
2. Чекарев И. Б. Влияние анизотропии проводимости на стационарное течение несжимаемого вязкого ионизованного газа между коаксиальными цилиндрами при наличии радиального магнитного поля. Научно-техн. инф. бюлл. Ленингр. политехн. ин-та, раздел физ.-матем. наук, 1960, № 7, стр. 81.
3. Чекарев И. Б. Установившееся течение слабо ионизованного газа между параллельными пластинами с учетом анизотропии проводимости. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 3, стр. 473.
4. Уфлянд Я. С., Чекарев И. Б. Исследование неустановившегося течения проводящей жидкости в плоском канале с движущимися границами. ЖТФ, 1960, т. XXX, № 5, стр. 465.
5. Чекарев И. Б., Уфлянд Я. С. О некоторых возможностях ускорения электропроводной жидкости с помощью скрещенных магнитных полей. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 5, стр. 845.