

О РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ ПРИ АНИЗОТРОПНОЙ ПРОВОДИМОСТИ

Г. А. Любимов

(Москва)

Из обобщенного закона Ома при некоторых предположениях относительно характера рассматриваемых задач получается одно векторное уравнение, описывающее изменение магнитного поля, не зависящее от уравнений механики. Если считать параметры задачи не зависящими от одной из координат, то это уравнение сводится к системе двух скалярных уравнений. Указываются свойства некоторых частных решений этой системы. Для случая малых токов и больших внешних магнитных полей, когда в первом приближении можно пренебречь индуцированными полями, решение полученной системы можно искать в виде ряда по малому параметру $\lambda = 4\pi I/cH_0$ (I — полный ток, протекающий в системе, H_0 — внешнее поле). В качестве примера рассмотрена задача о влиянии анизотропии проводимости на течение газа в канале в скрещенных электрическом и магнитном полях.

§ 1. Будем рассматривать течения разреженного ионизованного газа в сильном внешнем магнитном поле, при этом будем считать, что параметр

$$\omega\tau \gtrsim 1$$

(ω — ларморова частота электронов, τ — время между столкновениями электронов). В этих условиях уравнение, выражающее обобщенный закон Ома, имеет вид

$$\mathbf{j} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right) - \frac{\omega\tau}{H} \mathbf{j} \times \mathbf{H} + \frac{\sigma}{ne} \text{grad } p_e \quad (1.1)$$

Среды, в которых $\omega\tau \gtrsim 1$, называют средами с анизотропной проводимостью.

Для описания движения газа и законов протекания токов к уравнению (1.1) надо добавить уравнения механики и уравнения Максвелла.

Если степень ионизации невелика, так что число нейтральных частиц n_a значительно превосходит число заряженных частиц n , т. е. $n_a \gg n$, то член с градиентом электронного давления в уравнении (1.1) может быть опущен.

В ряде задач, связанных с движением проводящего газа в электромагнитном поле, магнитное число Рейнольдса R_m бывает малой величиной за счет малой проводимости среды и небольших скоростей движения. Если при этом за счет внешних источников в газе обеспечиваются сильные электрические токи, так что имеет место соотношение

$$\lambda \equiv \frac{4\pi I}{cH} \gg R_m \quad \left(R_m = \frac{4\pi\sigma VL}{c^2} \right) \quad (1.2)$$

(I — полный ток в системе), то индукционными токами можно пренебречь ($j \gg \sigma H v / c$). Такие условия могут иметь место, например, в задачах о разгоне проводящего газа в канале внешними скрещенными электриче-

ским и магнитным полями. На начальной стадии разгона, когда скорость газа еще далека от предельной скорости $u^* \sim cE / H$, электрические токи в системе обеспечиваются внешней разностью потенциалов, причем внешнее электрическое поле много больше поля индукции ($E \gg vH / c$) и имеет место соотношение (1.2) при $R_m \ll 1$.

Всюду в дальнейшем будем считать, что имеют место неравенства (1.2) и $n_a \gg n$. При этом обобщенный закон Ома принимает вид

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} - \frac{\omega \tau}{H} \mathbf{j} \times \mathbf{H} \quad (1.3)$$

Очевидно, что при принятых предположениях уравнение (1.3) и уравнения Максвелла, определяющие изменение электромагнитного поля и поля токов, не зависят от уравнений механики. Найдя из этой системы распределения полей и токов, можно вычислить силу, действующую на газ и приток энергии со стороны электромагнитного поля, после чего можно решать механическую задачу о движении газа в заданном поле сил и с заданным притоком энергии.

Отметим, что уравнение (1.3) является точным, если рассматривать задачу об определении поля токов в неподвижном проводнике, обладающем анизотропной проводимостью.

Применив операцию rot к уравнению (1.3) и воспользовавшись уравнениями Максвелла, получим следующее уравнение, описывающее изменения магнитного поля

$$\Delta \mathbf{H} - \alpha [(\mathbf{H} \nabla) \text{rot } \mathbf{H} - (\text{rot } \mathbf{H} \nabla) \mathbf{H}] = \frac{1}{v_m} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1.4)$$

При преобразованиях использовано то, что

$$\sigma = \text{const}, \quad \alpha \equiv \frac{\omega \tau}{H} = \text{const} \quad (1.5)$$

Уравнение (1.4) аналогично уравнению индукции в магнитной гидродинамике. При соответствующих граничных и начальных условиях, сформулированных для \mathbf{H} , уравнение (1.4) совместно с условием $\text{div } \mathbf{H} = 0$ определяет распределение магнитного поля. Зная решение уравнения (1.4), из уравнений Максвелла и закона Ома (1.3) можно найти распределение всех электромагнитных величин.

§ 2. Будем рассматривать стационарные с электродинамической точки зрения задачи. При этом уравнение (1.4) принимает вид

$$\Delta \mathbf{H} - \alpha [(\mathbf{H} \nabla) \text{rot } \mathbf{H} - (\text{rot } \mathbf{H} \nabla) \mathbf{H}] = 0 \quad (2.1)$$

Имея в виду приложение полученных результатов к задачам, связанным с течением газа по трубам и каналам под действием внешнего электромагнитного поля, будем искать решения уравнения (2.1), не зависящие от координаты x . При этом предполагается, что граничные условия не зависят от x . При этих предположениях из уравнения Максвелла следует, что проекции уравнения (2.1) на оси y и z равносильны соотношению $E_x = \text{const}$. Значение константы E_x связано (при независимости всех величин от x) с условиями в бесконечности или на выходе из канала.

Для получения системы уравнений, описывающей распределение магнитного поля в этом случае, можно использовать проекцию уравнения (1.3) на ось x , проекцию уравнения (2.1) на ось x и уравнение $\text{div } \mathbf{H} = 0$.

Эта система будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} + \alpha \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} H_z + H_y \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) &= E_x = \text{const} \\ \Delta H_x - \alpha [H_y \Delta H_z - H_z \Delta H_y] &= 0, \quad \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

В дальнейшем для простоты будем считать, что

$$E_x = 0 \quad (2.3)$$

т. е. что не происходит накопления электрических зарядов на бесконечности вдоль оси x . Для циркуляционных течений газа типа течений в гомополярнике условие (2.3) выполняется автоматически.

Введем функцию $\Phi(yz)$ по формулам

$$H_y = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad H_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (2.4)$$

При этом последнее уравнение (2.2) удовлетворяется тождественно, а первые два приводятся к системе

$$\begin{aligned} \Delta H_x + \alpha \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right] \Delta \Phi &= 0 \\ \Delta \Phi - \alpha \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right] H_x &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Если рассматривать течения газа по каналам, то систему (2.5) надо решать при граничных условиях, заданных в плоскости yz на контуре канала. При этом на части контура, представляющей изолятор, нормальная составляющая плотности тока должна равняться нулю, т. е.

$$j_n = \frac{c}{4\pi} \frac{\partial H_x}{\partial s} = 0, \quad \text{или} \quad H_x = \text{const} \quad \text{на изоляторах} \quad (2.6)$$

На части же контура, представляющей собой идеальный проводник (электроды), касательная составляющая электрического поля должна равняться нулю, т. е.

$$\varepsilon E_s = j_s + \alpha (H_x j_n - H_n j_x) = 0, \quad \text{или} \quad \frac{c}{4\pi} \frac{\partial H_x}{\partial n} = \alpha (H_n j_x - H_x j_n) \quad \left(\begin{array}{l} \text{на провод-} \\ \text{никах} \end{array} \right) \quad (2.7)$$

Здесь s — координата вдоль контура канала, n — внешняя нормаль к контуру. Магнитное поле в канале определяется как внешними источниками, так и токами, текущими в газе. Поэтому, вообще говоря, внешнее к каналу магнитное поле не может задаваться произвольно. В общем случае на границе канала должно выполняться условие непрерывности нормальной составляющей магнитного поля, т. е.

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial s} \right] = 0 \quad \text{на контуре } S \quad (2.8)$$

а также условие, связывающее разрыв касательной составляющей магнитного поля с поверхностным током, текущим в стенках канала, т. е.

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] = i_x, \quad [H_x] = i_s \quad \text{на контуре } S \quad (2.9)$$

Здесь символом $[]$ обозначена разность соответствующих величин с внутренней и внешней сторон на поверхности канала, i — плотность поверхностного тока. Отметим, что вне канала магнитное поле удовлетворяет обычной системе уравнений Максвелла.

Кроме условий (2.6) — (2.9), при решении конкретных задач могут возникать некоторые дополнительные условия, устанавливающие, например, связь между константами в (2.6), или некоторые условия симметрии течения. Эти условия, связанные со способом подвода тока к системе и условиями замыкания тока, текущего вдоль оси x в бесконечности, должны формулироваться для каждой конкретной задачи (некоторые примеры таких условий см. (4.6) и (4.15)).

Итак, для определения магнитного поля, а следовательно, и поля токов в канале, необходимо решить систему уравнений (2.5) при граничных условиях (2.6) — (2.9).

§ 3. Система (2.5) достаточно сложна. Могут представить интерес некоторые частные решения этой системы. Укажем свойства простейших частных решений системы (2.5).

Рассмотрим решения системы (2.5), обладающие тем свойством, что

$$H_x = k\Phi, \quad k = \text{const} \quad (3.1)$$

При этом условии функции Φ и H_x удовлетворяют уравнениям Лапласа

$$\Delta\Phi = 0, \quad \Delta H_x = 0$$

Из условия (2.6) — (2.7) следует, что в этом случае для функции Φ имеют место следующие граничные условия:

$$\Phi = \text{const} \quad (\text{на изоляторах}), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = -\alpha k\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial s} \quad (\text{на проводниках})$$

Рассматриваемые решения соответствуют случаю отсутствия токов и составляющей электромагнитной силы в направлении оси x

$$\frac{4\pi}{c} j_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \Delta\Phi = 0, \quad j_x = -\frac{1}{ac} j_x = 0$$

В плоскости, перпендикулярной к оси x , токи текут вдоль магнитного поля

$$j_y = \frac{c}{4\pi} \frac{\partial H_x}{\partial z} = k \frac{c}{4\pi} \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{kc}{4\pi} H_y, \quad j_z = -\frac{c}{4\pi} \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{kc}{4\pi} H_z$$

Заметим, что решение системы (2.5) сводится к решению уравнения Лапласа для всех частных решений, удовлетворяющих связи $H_x = f(\Phi)$, где f — произвольная функция.

Другим классом частных решений, для которого решения системы (2.5) удовлетворяют более простым уравнениям, являются решения, обладающие тем свойством, что

$$\Delta\Phi = kH_x, \quad k = \text{const} \quad (3.2)$$

При этом для определения H_x имеем уравнение

$$\Delta H_x + k^2 H_x = 0 \quad (3.3)$$

Уравнения (3.2) и (3.3) связаны через граничные условия (2.6) — (2.9). В некоторых частных случаях, например, при $H_n|_S = 0$ граничные условия для Φ и H_x формулируются независимо. При этом сначала нужно решать уравнение (3.3), а затем при известной функции H_x решать уравнение (3.2) для функции Φ .

Рассматриваемые решения обладают тем свойством, что плотность тока и плотность электромагнитной силы в направлении оси x пропорцио-

нальны напряженности магнитного поля в этом направлении

$$\frac{4\pi}{c} j_x = -\Delta\Phi = -kH_x, \quad j_x = \frac{k}{\alpha} H_x \quad (3.4)$$

Частные решения типа (3.1), (3.2) могут описывать решение задачи о стекании тока с электродов в условиях, когда существенна анизотропия проводимости.

Пусть, например, имеется плоский бесконечный электрод, расположенный в плоскости $y = 0$. Пусть внешнее к электроду магнитное поле направлено вдоль оси z и поверхностные токи в электроде отсутствуют. Пусть, кроме того, нормальная составляющая плотности тока на электроде постоянна. Условие (2.7) и принятые предположения приводят к следующим граничным условиям для уравнений (3.2) — (3.3):

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = -\alpha H_x \frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} = I, \quad I = \frac{4\pi}{c} j_y(0, z) \quad \text{при } y = 0 \quad (3.5)$$

$$\Phi = \text{const} \quad \text{при } y = 0 \quad (3.6)$$

Решения уравнения (3.3) при условиях (3.5) и уравнения (3.2) при условии (3.6) имеют вид

$$H_x = I \left(\cos ky - \frac{\alpha I}{k} \sin ky \right) (z + C), \quad C = \text{const} \quad (3.7)$$

$$\Phi = \frac{I}{k} \left(\frac{\alpha I}{k} \sin ky - \cos ky \right) (z + C) + \frac{I}{k} z + H_0, \quad H_0 = H(0, -C)$$

Константа C связана с выбором начала координат. Решение (3.7) соответствует тому случаю, когда внешнее магнитное поле на электроде меняется вдоль электрода по закону

$$H_z(0, z) = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\frac{\alpha I^2}{k}(z + C) + H_0 \quad (3.8)$$

Можно поставить вопрос о решении задачи о стекании тока с плоского электрода в постановке, аналогичной предыдущей, но в однородном внешнем магнитном поле, направленном вдоль оси z ($H_z = H_0$ при $y = 0$). Решение этой задачи не будет содержаться среди решений типа (3.1) или (3.2), но его можно построить в следующем виде:

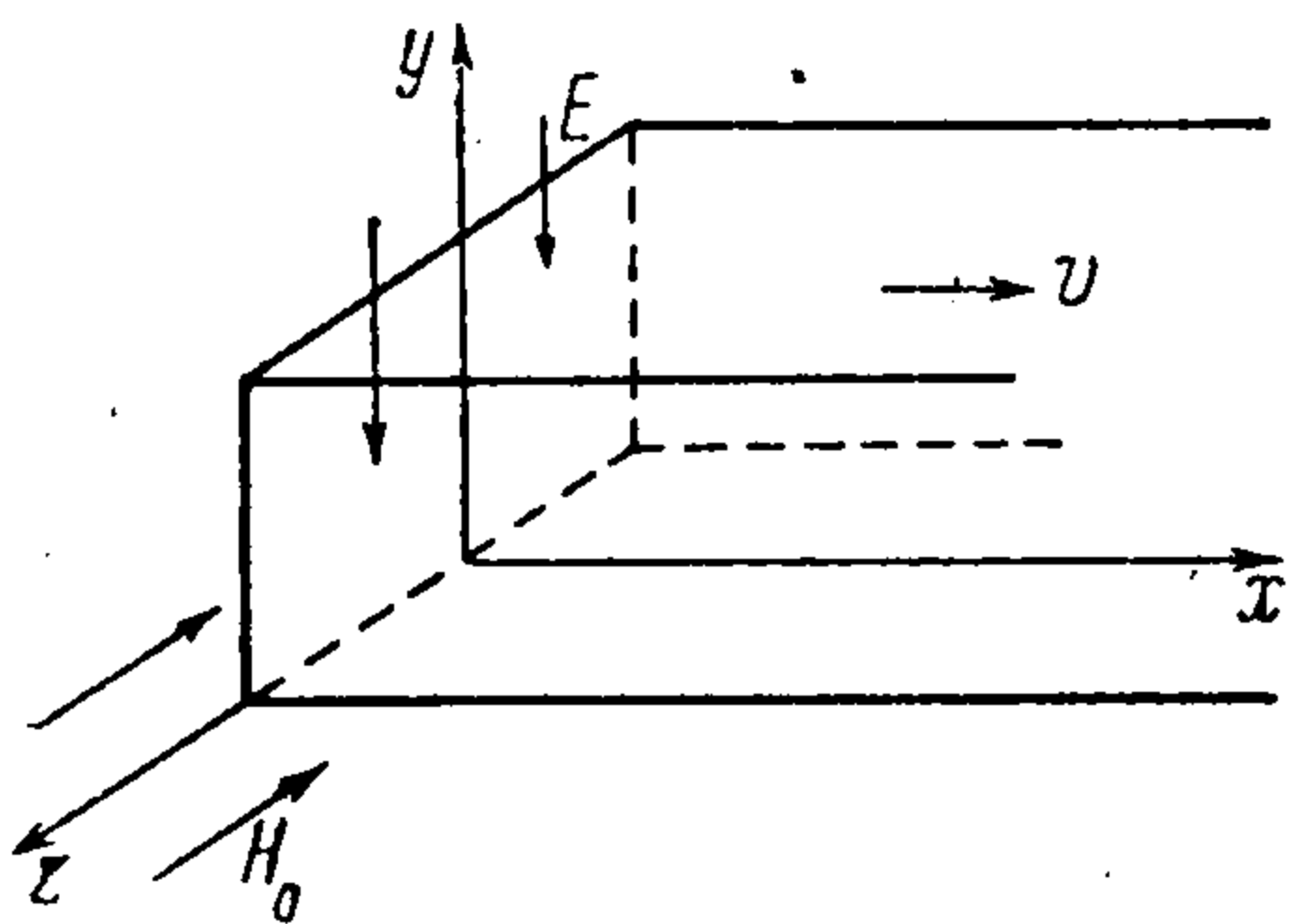
$$H_x = (1 - \alpha I y) (I z + C), \quad H_z = H_0 \exp \frac{(\alpha I y - 1)^2 - 1}{2}, \quad H_y = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{4\pi}{c} j_x = H_0 (\alpha I y - 1) \alpha I \exp \frac{(\alpha I y - 1)^2 - 1}{2}$$

$$\frac{4\pi}{c} j_y = (1 - \alpha I y) I, \quad \frac{4\pi}{c} j_z = \alpha I (I z + C), \quad C = \text{const}$$

В решениях (3.7), (3.8) и (3.9) плотность тока j_y обращается в нуль при некотором значении $y = y^*$. Поэтому эти решения можно рассматривать как решения задачи о стекании тока с плоского электрода в пространство, ограниченное плоским изолятором. Второй электрод при этом надо мыслить расположенным в бесконечности.

§ 4. Рассмотрим задачу о влиянии анизотропии проводимости на течение газа в канале (фиг. 1) прямоугольной формы, причем две стороны



Фиг. 1

прямоугольника являются электродами, к которым подается постоянная разность потенциалов, две другие стороны — диэлектрики. Внешнее магнитное поле задано в плоскости yz ($H_x^0 = 0$). Взаимодействие токов, текущих в канале за счет внешней разности потенциалов с магнитным полем, представляющим собой сумму внешнего поля с полем токов, приводит к возникновению силы, направленной вдоль канала. Ускорение газа в канале происходит за счет этой силы, а также за счет нагрева, вследствие выделения джоулева тепла при протекании токов в газе.

Чтобы определить электромагнитную силу, действующую на газ, и установить, каким образом наличие анизотропии проводимости изменяет эту силу, определим магнитное поле и поле токов в канале.

Будем предполагать все условия, сформулированные в § 1—2, выполненными. Тогда решение задачи об определении поля токов сводится к решению системы (2.5) при граничных условиях (2.6) — (2.9), заданных соответствующим образом на сторонах прямоугольника, представляющего собой сечение канала плоскостью yz . Получить решение этой задачи в общем виде не удастся, но при некоторых дополнительных предположениях такое решение можно строить приближенно.

Предположим, что токи, текущие в канале, относительно невелики, так что в первом приближении можно пренебречь изменением магнитного поля за счет этих токов и считать магнитное поле заданным. Это предположение равносильно тому, что параметр λ , введенный в (1.2), является величиной малой, т. е. имеет место соотношение

$$R_m \ll \lambda < 1 \quad (4.1)$$

Если неравенства (4.1) выполнены, то решение системы (2.5) можно искать в виде рядов, расположенных по степеням параметра λ (если (4.1) не выполняется, то можно развить для решения задачи метод последовательных приближений, причем ясно, что первые приближения в методе последовательных приближений и при разложении в ряд будут совпадать). В дальнейшем будем считать, что (4.1) имеет место. При этом очевидно, что в каждом приближении из системы (2.5) будут получаться уравнения с известными коэффициентами для определения функций H_x и $\Delta\Phi$.

Для определенности будем предполагать, что внешнее магнитное поле H^0 однородно и параллельно оси z ($H^0 = H_0 k$). Введем безразмерные переменные по формулам

$$\begin{aligned} H &= H_0 H', & y &= by', & z &= bz' \\ \Phi &= H_0 b \Phi', & \mathbf{j} &= \frac{c}{4\pi} \frac{H_0}{b} \mathbf{j}', & \mathbf{E} &= \frac{H_0 c}{4\pi \sigma b} \mathbf{E}' & \varphi &= \frac{c H_0}{4\pi \sigma} \varphi' \\ H_0 \alpha &= (\omega \tau)' & b &= 2a, & \mathbf{j} &= \frac{H_0^2}{4\pi b} \mathbf{j}', \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь φ — потенциал электрического поля ($\mathbf{E} = \text{grad } \varphi$), b — длина стороны прямоугольника, являющейся электродом, \mathbf{j} — электромагнитная сила. Опуская в дальнейшем штрихи при безразмерных величинах, перепишем систему (2.5) в безразмерных переменных

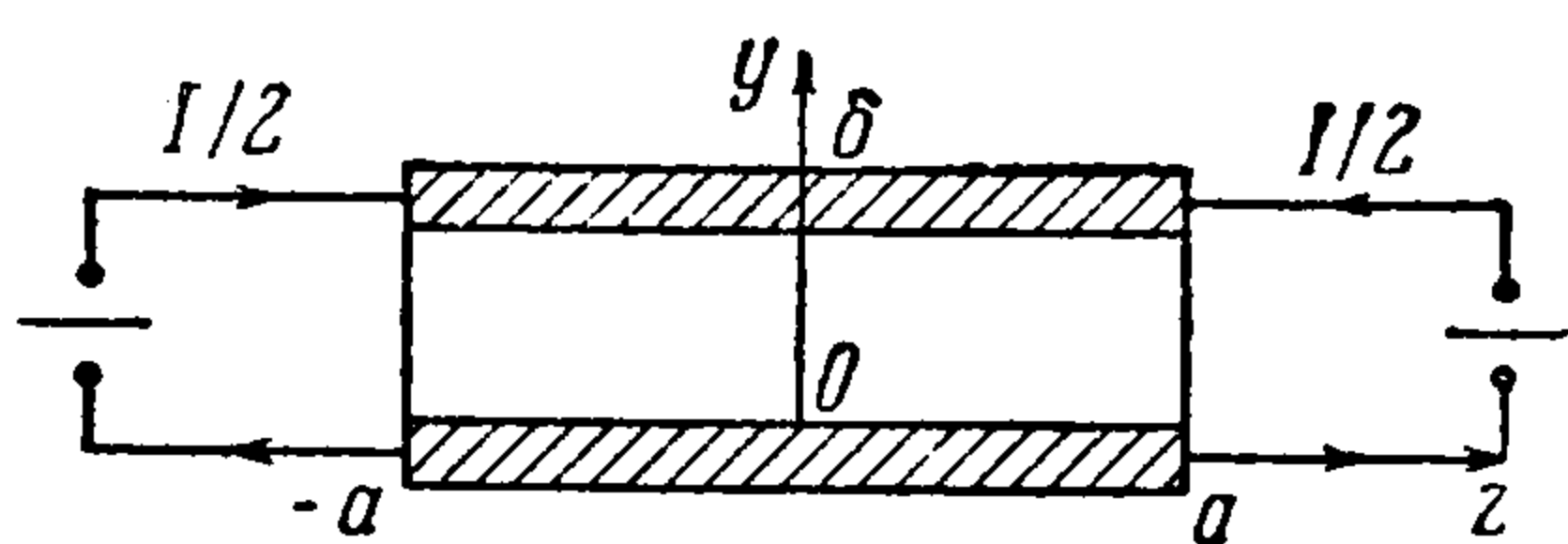
$$\begin{aligned} \Delta H_x + \omega \tau \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right] \Delta \Phi &= 0 \\ \Delta \Phi - \omega \tau \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \right] H_x &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Граничные условия (2.6) и (2.7) для данной задачи в безразмерных переменных (4.2) примут вид

$$H_x = \text{const} \quad \text{при } z = \pm \frac{1}{2}, \quad 0 \leq y \leq \frac{\delta}{b} \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = -\omega\tau \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Delta \Phi + H_x \frac{\partial H_x}{\partial z} \right] \quad \text{при } y = 0 \text{ и } y = \frac{\delta}{b}, \quad -\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2} \quad (4.5)$$

Константы в (4.4) определяются полным током, протекающим через систему. Если подвод тока к системе осуществляется по схеме, изображенной на фиг. 2, то вместо (4.4) нужно пользоваться соотношениями



Фиг. 2

$$H_x(y, -\frac{1}{2}) = -H_x(y, \frac{1}{2})$$

$$H_x(y, -\frac{1}{2}) - H_x(y, \frac{1}{2}) = -I \quad (4.6)$$

Здесь I — полный ток, протекающий через систему ($I > 0$, если ток течет в положительном направлении оси y , и $I < 0$, если ток течет в обратном направлении). Если поверхностные токи вдоль оси x в электродах отсутствуют, то условия (2.8) и (2.9) сводятся к условиям непрерывности магнитного поля на диэлектриках и непрерывности y - и z -составляющих магнитного поля на электродах, т. е.

$$[H] = 0 \quad \text{при } z = \pm \frac{1}{2}, \quad 0 \leq y \leq \frac{\delta}{b}$$

$$[H_y] = [H_z] = 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ и } y = \frac{\delta}{b}, \quad -\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2} \quad (4.7)$$

Будем искать решение системы (4.3) при граничных условиях (4.5) — (4.6) в виде следующих рядов, расположенных по степеням параметра λ :

$$H_x = \lambda H_{x1} + \dots, \quad \Phi = -y + \lambda \Phi_1 + \dots \quad (4.8)$$

При этом для определяемых величин получаются ряды вида

$$H_z = 1 + \lambda H_{z1} + \dots, \quad H_y = \lambda H_{y1} + \dots, \quad j_x = \lambda j_{x1} + \dots \text{ и т. д.} \quad (4.9)$$

Подставляя ряды (4.8) в систему (4.3) и граничные условия (4.5) — (4.6) и удерживая только члены первого порядка по λ , получим систему для определения первого приближения

$$\Delta H_{x1} + \omega\tau \frac{\partial \Delta \Phi_1}{\partial z} = 0, \quad \Delta \Phi_1 = \omega\tau \frac{\partial H_{x1}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial H_{x1}}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad y = \delta, \quad -\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2}$$

$$H_{x1}(y, -\frac{1}{2}) = -H_{x1}(y, \frac{1}{2}), \quad H_{x1}(y, -\frac{1}{2}) - H_{x1}(y, \frac{1}{2}) = -I_1 = \int_{-1/2}^{1/2} j_{y1} dz$$

Легко убедиться в том, что функция

$$H_{x1} = I_1 z \quad (4.10)$$

удовлетворяет этой системе уравнений и граничным условиям. При этом в первом приближении плотность тока, параллельная оси x , постоянна по сечению канала

$$j_{x1} = -\omega\tau \frac{\partial H_x}{\partial z} = -I_1 \omega\tau \quad (4.11)$$

Плотность тока вдоль осей y, z и плотность силы в направлении x в этом приближении соответственно равны

$$j_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} = I_1; \quad j_z = -\frac{\partial H_x}{\partial y} = 0, \quad f_x = I_1 \quad (4.12)$$

Для определения функции Φ_1 во всем пространстве получаем

$$\Delta \Phi_1 = A, \quad A = \begin{cases} \omega\tau I_1 & \text{внутри канала} \\ 0 & \text{вне канала} \end{cases} \quad (4.13)$$

причем граничные условия (4.7) сводятся к условию непрерывности Φ_1 на границе канала. Уравнение (4.13) является уравнением Пуассона и его решение легко выписать. Отметим, что распределение магнитного поля (H_{y1}, H_{z1}) в данном случае можно получить, не решая уравнения (4.13) по формуле Био-Савара по заданному распределению плотности тока j_{x1} . Если канал представляет собой сильно вытянутый прямоугольник, то токи в направлении оси x в канале можно рассматривать как токовый слой. В этих случаях выражения для Φ_1 и компонент магнитного поля принимают простой вид

$$\Phi_1 = \frac{\omega\tau}{2} I_1 \left(y - \frac{\delta}{2b} \right)^2, \quad H_{z1} = -\omega\tau I_1 \left(y - \frac{\delta}{2b} \right), \quad H_{y1} = 0 \quad \text{при } \delta \ll b \quad (4.14)$$

При получении выражений (4.14) использовано условие симметрии замыкания токов j_x в бесконечности, т. е. предполагается, что в бесконечности осуществляется схема замыкания этих токов, аналогичная схеме фиг. 1 для подводимых токов. Эти условия можно сформулировать следующим образом:

$$H_{z1}(0, z) = -H_{z1}(\delta/b, z) \\ H_{z1}(0, z) = -H_{z1}(\delta/b, z) = -\frac{\delta}{b} j_x = \frac{\delta}{b} \omega\tau I_1 \quad \text{при } \delta \ll b \quad (4.15)$$

Воспользовавшись (4.10), (4.13) и (4.14), получим из (4.3), (4.5), (4.6) для определения второго приближения в случае $\delta \ll b$ следующую систему уравнений и граничных условий:

$$\frac{\partial^2 H_{x2}}{\partial y^2} + [1 + (\omega\tau)^2] \frac{\partial^2 H_{x2}}{\partial z^2} = 0, \quad \Delta \Phi_2 = \omega\tau \left[\frac{\partial H_{x2}}{\partial z} - \omega\tau I_1^2 \left(y - \frac{\delta}{b} \right) \right] \\ \frac{\partial H_{x2}}{\partial y} = -\omega\tau I_1^2 z \quad \text{при } y = 0 \text{ и } y = \frac{\delta}{b}, \quad -\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2}$$

$$H_{x2}\left(y, -\frac{1}{2}\right) = -H_{x2}\left(y, \frac{1}{2}\right)$$

$$H_{x2}\left(y, -\frac{1}{2}\right) - H_{x2}\left(y, \frac{1}{2}\right) = -I_2 = -\int_{-1/2}^{1/2} j_{y2} dz \quad (4.16)$$

Итак, для второго приближения при вычислении H_x получается смешанная задача для уравнения Лапласа, а функция Φ_2 снова определяется из уравнения Пуассона. Решения системы (4.16) дают поправку к распределению токов (4.11), (4.12) по сечению канала. Очевидно, что при учете второго приближения $j_z \neq 0$ и $j_y \neq \text{const}$, т. е. учет второго приближения показывает, что плотность силы в направлении оси x неравномерно распределена по сечению канала.

Легко убедиться в том, что функция $H_{xz}(y, z)$, удовлетворяющая (4.16), имеет вид

$$H_{xz}(yz) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2I_2(-1)^{n-1}}{\pi(2n-1)} \operatorname{csch} \frac{n\pi b}{\delta \sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \times \right. \\ \times \left[\operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1)b}{\delta \sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \left(z + \frac{1}{2} \right) - \operatorname{sh} \frac{\pi(2n-1)b}{\delta \sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \left(\frac{1}{2} - z \right) \right] \times \\ \times \cos \frac{\pi(2n-1)b}{\delta} y + \frac{2\omega\tau I_1^2}{(2n)^2 \pi^2 \sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \operatorname{csch} \frac{2n\pi\delta \sqrt{1+(\omega\tau)^2}}{b} \times \\ \times \left[\operatorname{ch} 2n\pi \sqrt{1+(\omega\tau)^2} y - \operatorname{ch} 2n\pi \sqrt{1+(\omega\tau)^2} \left(\frac{\delta}{b} - y \right) \right] \sin 2n\pi \left(z + \frac{1}{2} \right) \left. \right\}$$

Оставляя в стороне исследование второго приближения, рассмотрим зависимость суммарного тока, протекающего в поперечном сечении канала от приложенной к электродам разности потенциалов. Воспользуемся проекцией уравнения (1.3) на ось y (в безразмерных переменных (4.2))

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \omega\tau \left[H_x \frac{\partial H_x}{\partial y} + H_z j_x \right] \quad (4.17)$$

Используя решение (4.10) — (4.12) в первом приближении, получим, что

$$\varphi_1(yz) = \varphi_1(y) = \varphi(0) + [1 + (\omega\tau)^2] I_1 y \quad (4.18)$$

или, что суммарный ток, протекающий в поперечном сечении канала, связан с разностью потенциалов, приложенной к электродам, соотношением

$$I_1 = \frac{\varphi(\delta/b) - \varphi(0)}{[1 + (\omega\tau)^2] \delta/b} \quad (4.19)$$

В размерах переменных соотношение (4.19) принимает вид

$$j_{y1} = \frac{\varphi(\delta) - \varphi(0)}{\delta} \frac{\sigma}{1 + (\omega\tau)^2} \quad (4.20)$$

Отметим, что при выражении j_{y1} через разность потенциалов использована полная разность потенциалов, т. е. при вычислении первого приближения для потенциала в качестве граничных условий использовались истинные значения потенциалов на электродах. Такой подход позволяет в любом приближении получить связь плотности тока на электродах и, следовательно, полного тока с приложенной разностью потенциалов. Естественно, что при вычислении следующих приближений для потенциала ($\varphi_2, \varphi_3, \dots$) граничные значения для этих функций должны считаться равными нулю ($\varphi_2(0, z) = 0, \varphi_2(\delta/b, z) = 0$ и т. д.).

Выражение (4.20) показывает, что в первом приближении при вычислении плотности тока в данной задаче можно пользоваться обычным законом Ома, но с измененным значением проводимости

$$\sigma \rightarrow \frac{\sigma}{1 + (\omega\tau)^2}$$

Оказывается, что возможно установить, каким образом изменится полный ток в системе при заданной разности потенциалов на электродах, если учесть второе приближение. На этот вопрос можно ответить, не ре-

шая системы (4.16). Действительно, во втором приближении уравнение (4.17) дает

$$\frac{\partial H_{x2}}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \omega\tau [j_{x2} + H_{z1}j_{x1}] \quad (4.21)$$

Подставляя в это уравнение j_{x1} из (4.11), H_{z1} из (4.14) и $j_{x2} = -\Delta\Phi_2$ из (4.16), получим

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = [1 + (\omega\tau)^2] \frac{\partial H_{x2}}{\partial z} - 2(\omega\tau)^3 I_1^2 \left(y - \frac{\delta}{2b}\right) \quad (4.22)$$

Интегрируя это уравнение по y от 0 до δ/b и воспользовавшись граничными условиями для Φ_2 ($\Phi_2(0, z) = \Phi_2(\delta/b, z) = 0$) получим, что

$$\int_0^{\delta/b} \frac{\partial H_{x2}}{\partial z} dy = 0$$

Следовательно

$$\int_0^{\delta/b} I_2 dy = I_2 \frac{\delta}{b} = \int_0^{\delta/b} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial H_{x2}}{\partial z} dy dz = 0 \quad I_2 = 0 \quad (4.23)$$

Таким образом, при принятых предположениях (см. (4.15)) связь суммарного тока, протекающего в поперечном сечении канала с приложенной разностью потенциалов, с учетом двух приближений дается (4.19).

Подчеркнем, что полученный результат относительно плотности тока существенным образом связан с предположением (4.15) о симметричном замыкании токов, текущих в направлении оси x . Проиллюстрируем, каким образом изменится решение, если вместо (4.15) принять другие условия. Пусть вместо (4.15) имеют место следующие условия:

$$H_{z1}(0, z) = 0, \quad H_{z1}\left(\frac{\delta}{b}, z\right) = \frac{\delta}{b} \omega\tau I_1 \quad \text{при } \delta \ll b \quad (4.24)$$

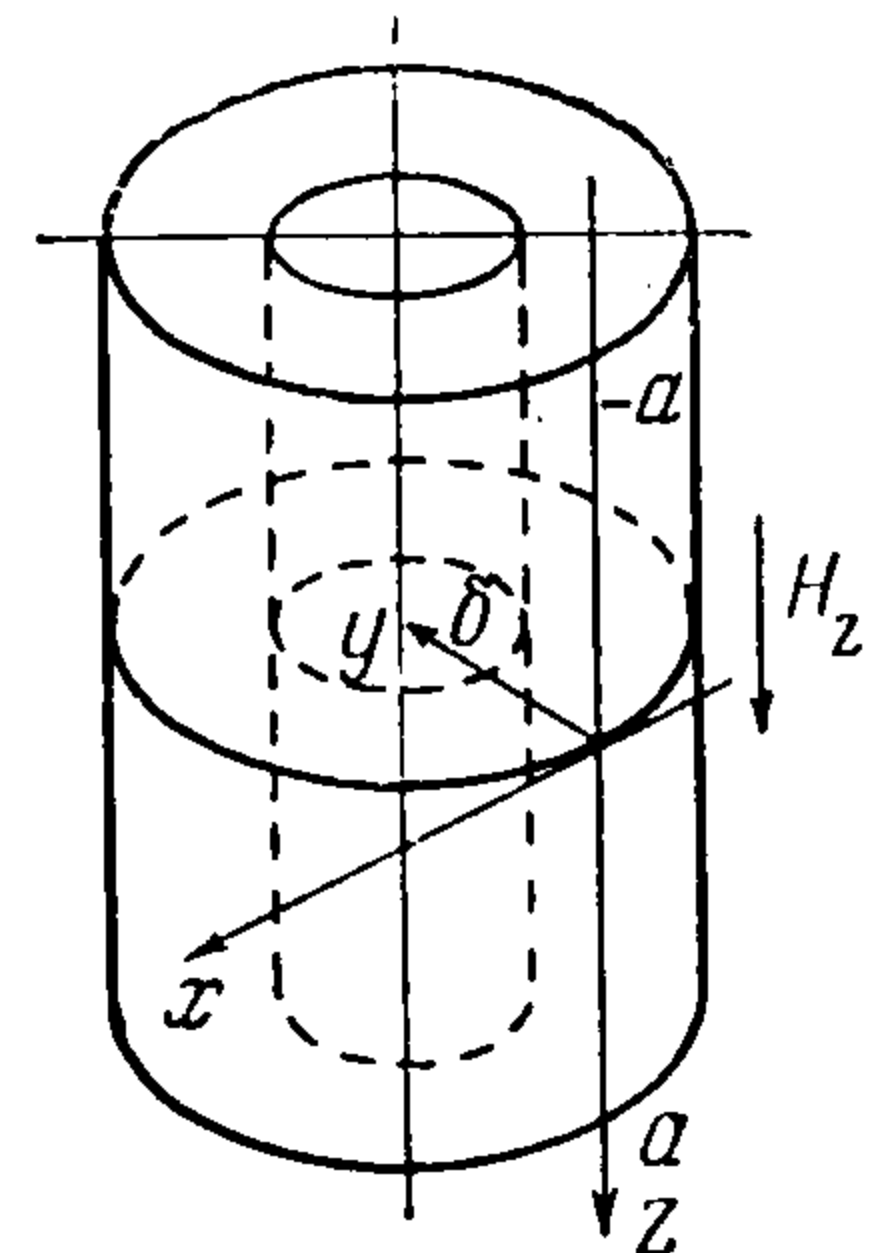
Такие условия имеют место, если рассматривать задачу о течении газа между двумя цилиндрами, к которым приложена разность потенциалов (гомополярник, фиг. 3). Если радиусы цилиндров достаточно велики и мало отличаются между собой, то течение в зазоре (пренебрегая центробежными эффектами) можно рассматривать как течение в канале. Для системы двух цилиндров естественно считать магнитное поле вне наружного цилиндра заданным H_{z0} . Поэтому для соответствующего течения в канале надо принять условия (4.24). Течение в канале при этом не будет симметричным относительно плоскости $y = \delta/2$. Вместо (4.14) для этого случая получим

$$\Phi_1 = -\frac{\omega\tau}{2} I_1 y^2, \quad H_{z1} = \omega\tau I_1 y, \quad H_{y1} = 0 \quad (4.25)$$

Аналогично (4.23) получим

$$I_2 = -\frac{(\omega\tau)^3}{1 + (\omega\tau)^2} I_1^2 \frac{\delta}{b} \quad (4.26)$$

Таким образом, в данном случае учет второго приближения показывает, что суммарный ток, текущий в поперечном сечении канала, оказывается меньшим, чем значение, даваемое формулой (4.19). Очевидно, что средняя электромагнитная сила, действующая на газ, тоже оказывается меньшей, чем ее значение, вычисленное по первому приближению.



Фиг. 3

§ 5. Рассмотрим задачу о течении газа в цилиндрическом канале произвольной формы в плоскости, перпендикулярной к оси x , причем внешнее магнитное поле будем считать однородным и заданным в плоскости yz ($H_x^0 = 0$). Если ограничиться при решении задачи первым приближением, то решение сведется к последовательному решению следующих уравнений, вытекающих из системы (4.3):

$$\begin{aligned} \Delta H_{x1} + (\omega\tau)^2 \left[H_y^2 \frac{\partial^2 H_{x1}}{\partial y^2} + 2H_y H_z \frac{\partial^2 H_{x1}}{\partial y \partial z} + H_z^2 \frac{\partial^2 H_{x1}}{\partial z^2} \right] &= 0 \\ \Delta \Phi_1 &= \omega\tau \left[H_y \frac{\partial H_{x1}}{\partial y} + H_z \frac{\partial H_{x1}}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (5.1)$$

Выбрав систему координат так, чтобы ось z была направлена вдоль магнитного поля и приняв величину напряженности магнитного поля за характерную величину в (4.2), приведем (5.1) к виду

$$\Delta H_{x1} + (\omega\tau)^2 \frac{\partial^2 H_{x1}}{\partial z^2} = 0, \quad \Delta \Phi_1 = \omega\tau \frac{\partial H_{x1}}{\partial z} \quad (5.2)$$

Преобразование координат по формулам

$$z' = \frac{z}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}, \quad y' = y \quad (5.3)$$

приводит первое уравнение (5.2) к уравнению Лапласа

$$\Delta' H_{x1} = 0 \quad (5.4)$$

Граничные условия (2.6) — (2.7) для первого уравнения (5.2) в переменных (4.2) имеют вид ($H_n = \cos(nz)$, $H_s = \cos(ny)$)

$$\begin{aligned} [1 + (\omega\tau)^2 H_n^2] \frac{\partial H_{x1}}{\partial n} &= -(\omega\tau)^2 H_n H_s \frac{\partial H_{x1}}{\partial s} \quad \text{на электродах} \\ H_{x1} &= \text{const} \quad \text{на изоляторах} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Итак, решение задачи сводится к решению уравнения Лапласа (5.4) при граничных условиях (5.5), записанных в переменных y' , z' на контуре, в который переходит контур канала на плоскости y' , z' .

Проекция уравнения, представляющего собой закон Ома (1.3) на оси координат в первом приближении в системе координат, в которой $H_y = 0$, будут иметь вид

$$j_{x1} = -\omega\tau \frac{\partial H_{x1}}{\partial z}, \quad j_{y1} = \frac{\partial H_{x1}}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \omega\tau j_{x1}, \quad j_{z1} = -\frac{\partial H_{x1}}{\partial y} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \quad (5.6)$$

Отсюда следует, что для потенциала электрического поля в первом приближении имеет место уравнение

$$\Delta \Phi_1 = (\omega\tau)^2 \frac{\partial^2 H_{x1}}{\partial y \partial z} \quad (5.7)$$

Таким образом, плотность объемного заряда при таких течениях определяется в первом приближении соотношением

$$\rho_{e1} = \frac{(\omega\tau)^2}{4\pi} \frac{\partial^2 H_{x1}}{\partial y \partial z} \quad (5.8)$$

Отметим, что в случае прямоугольного канала, рассмотренном в § 4, плотность объемного заряда в первом приближении равна нулю.

Для того чтобы получить выражение для потенциала, удовлетворяющее граничным условиям, не обязательно интегрировать уравнение (5.7), а можно воспользоваться непосредственно уравнениями (5.6).

Интегрируя второе уравнение (5.6) по y , получим

$$\varphi_1 = [1 + (\omega\tau)^2] \int \frac{\partial H_{x1}}{\partial z} dy + f(z)$$

Для определения $f(z)$ подставим это выражение в третье уравнение (5.6) и используем первое уравнение (5.2)

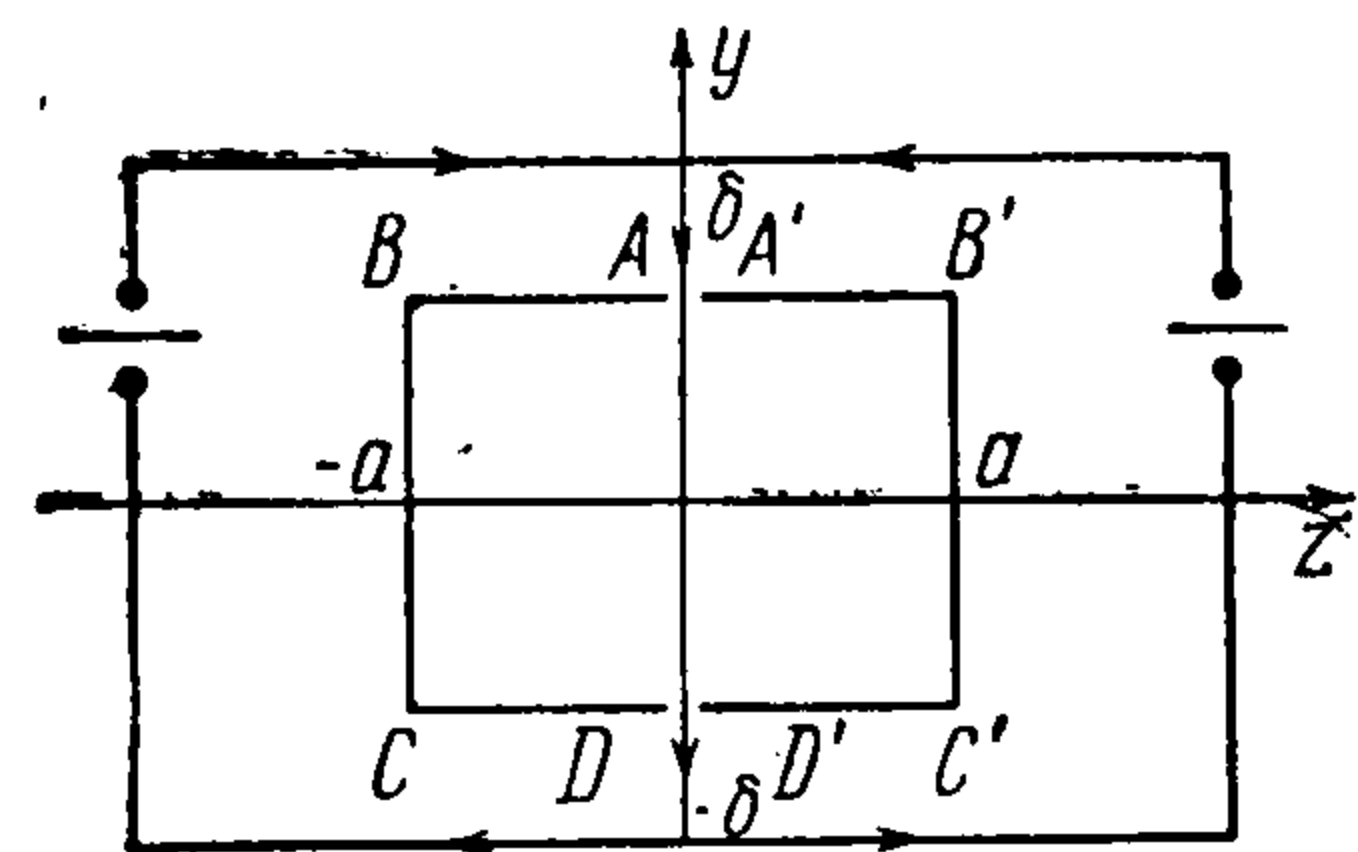
$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} &= [1 + (\omega\tau)^2] \int \frac{\partial^2 H_{x1}}{\partial z^2} dy + f'(z) = - \int \frac{\partial^2 H_{x1}}{\partial y^2} dy + f'(z) = \\ &= - \frac{\partial H_{x1}}{\partial y} + C_1 + f'(z) = - \frac{\partial H_{x1}}{\partial y} \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $f(z) = C_1 z + C_2$. Таким образом для потенциала имеем выражение

$$\varphi_1 = [1 + (\omega\tau)^2] \int \frac{\partial H_{x1}}{\partial z} dy + C_1 z + C_2 = - \int \frac{\partial H_{x1}}{\partial y} dz + C_3 y + C_4$$

Приведенные соображения позволяют довольно просто получить решение в первом приближении для течений в каналах произвольной формы.

§ 6. В качестве примера более сложного, чем в § 4, течения в канале рассмотрим задачу о течении в канале прямоугольного сечения, когда ток подается в систему через «точечные» электроды (фиг. 4), расположенные в точках $z = 0, y = \pm \delta$. Внешнее магнитное поле считаем однородным и параллельным оси z . Задача в этом случае сводится к первому уравнению (5.2) для функции H_{x1} . Если считать подвод тока симметричным, то условия (5.5) сводятся к условию постоянства H_{x1} на каждой из половин прямоугольника, разделенных электродами, причем



Фиг. 4

$$H_{x1}(ABCD) = -H_{x1}(A'B'C'D'), \quad H_{x1}(ABCD) - H_{x1}(A'B'C'D') = -I_1$$

Решение первого уравнения (5.2) при этих условиях имеет вид

$$H_{x1}(yz) = I_1 \left\{ z + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{ch}[n\pi y \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}]}{\text{ch}[(n\pi\delta/a) \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}]} \frac{\sin n\pi z}{n} \right\} \quad (6.1)$$

(Здесь в качестве характерного линейного размера (см. (4.2)) принято a .) Дифференцируя выражение (6.1) и используя формулы

$$j_{x1} = -\omega\tau \frac{\partial H_{x1}}{\partial z}, \quad j_{y1} = \frac{\partial H_{x1}}{\partial z}, \quad j_{z1} = -\frac{\partial H_{x1}}{\partial y}, \quad f_{x1} = \frac{\partial H_{x1}}{\partial z}$$

можно получить картину распределения токов и плотности силы по сечению канала. Распределение потенциала дается формулой

$$\varphi_1 = [1 + (\omega\tau)^2] I_1 \left\{ y + \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sh} n\pi y \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}{\text{ch}(n\pi\delta \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}/a)} \frac{\cos n\pi z}{n} \right\} \quad (6.2)$$

Отметим, что в данном случае в канале возникает пространственный заряд, отличный от нуля уже при вычислении первого приближения. Распределение пространственного заряда по сечению легко получить, воспользовавшись формулами (5.8) и (6.1).