Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ГИПЕРЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА

М. Н. Коган

(Москва)

В работе рассматриваются близкие к свободномолекулярным гиперзвуковые течения, расчет которых может быть произведен с учетом лишь первых межмолекулярных столкновений.

Для того чтобы течение было свободномолекулярным или близким к нему, недостаточно, чтобы число Кнудсена было много больше единицы. Граница свободномолекулярных течений зависит как от формы обтекаемого тела, так и от скорости потока, характера взаимодействия молекул с поверхностью тела и между собой. В то время как в одних условиях при неограниченном увеличении скорости течение газа сколь угодно малой плотности не является свободномолекулярным, в других условиях при достаточно большой скорости течение газа сколь угодно большой плотности свободномолекулярно или близко к нему.

Установлено явление «вырывания» и «превращения» молекул, позволяющее рассчитывать течения с учетом лишь первых столкновений даже в тех случаях, когда одна из характерных длин пробега много меньше размера тела.

Показано, что в определенных условиях при больших числах Рейнольдса около пластинки, обтекаемой под нулевым или малым углом атаки, образуется тонкий молекулярный пограничный слой. В работе установлено, что сопротивление пластинки при малом угле атаки, а также тонкого конуса, с учетом первых столкновений больше, чем в свободномолекулярном потоке.

Выведены критерии существования течений близких к свободномолекулярным. Для нескольких характерных случаев дан вид поправки к сопротивлению и теплопередаче, обусловленной первыми столкновениями.

В §§ 1 и 2 введены основные понятия и дана постановка задачи. В § 3 рассмотрено обтекание пластинки, установленной перпендикулярно к гиперзвуковому потоку. В §§ 4 рассмотрена аналогичная задача для пластинки, параллельной потоку. Здесь обнаруживается явление молекулярного пограничного слоя. В § 5 исследуется обтекание наклонной пластинки и конуса.

§ **1.** Чаще всего течение считают свободномолекулярным, если длина пробега молекул газа на данной высоте (при данной температуре и плотности) много больше характерного размера тела [1]. Отношение длины пробега молекул на данной высоте λ_0 к характерному размеру L, называемое числом Кнудсена, принимается [1] для свободномолекулярных течений равным или большим 10, т. е. $K = \lambda_0 / L \gg 10$. Длина пробега λ_0 для газа с данной температурой и плотностью определяется выражением

$$\lambda_0 = c\,(n\sigma c^\circ)^{-1} \tag{1.1}$$

Здесь c — скорость молекулы в координатах, связанных с газом, c° — средняя относительная скорость молекул, n — число молекул в единице объема, σ — поперечное сечение молекулы. При максвелловском распределении скорости c и c° одного порядка и равны примерно скорости звука в газе a. Поэтому соотношение (1.1) можно записать в виде

$$\lambda_0 \sim (n\sigma)^{-1} \tag{1.2}$$

Величины c, c° и λ_0 являются характеристиками теплового движения молекул в газе. Эти величины управляют процессами переноса в газе; в частности, например, коэффициент вязкости μ связан с этими величинами соотношением

$$\mu \sim mna\lambda_0 \sim \rho a\lambda_0 \tag{1.3}$$

Здесь вместо средней скорости движения молекул написана имеющая тот же порядок скорость звука; ρ — плотность газа.

Однако, если рассматривается движение газа относительно неподвижной системы отсчета (например, течение в сопле), то наряду с величинами c и λ_0, характеризующими движение молекул относительно газа, появляются новые величины, характеризующие движение молекул газа относительно неподвижной системы отсчета. В качестве таких характерных величин могут быть взяты, например, скорость газа по отношению к системе отсчета V и путь λ, проходимый молекулами между столкновениями в этой системе координат. Очевидно, что при малых скоростях (при $V \lesssim a$) характерной длиной пробега по-прежнему будет λ_0. Однако при гиперзвуковых скоростях, как легко видеть

$$\lambda \sim M\lambda_0 \qquad (M = V / a \gg 1) \tag{1.4}$$

или, заменяя λ_0 при помощи (1.3), получим

$$\frac{\lambda}{L} \sim \frac{M^2}{R} \sim MK \qquad \left(R = \frac{VL\rho}{\mu}, \quad K = \frac{\lambda_0}{L} \sim \frac{M}{R}\right) \tag{1.5}$$

Здесь L — характерный размер течения, R — число Рейнольда, K — число Кнудсена.

Таким образом, в гиперзвуковом потоке молекулы между столкновениями проходят вдоль потока путь в M раз большем, чем поперек потока. Другими словами, эту анизотропию гиперзвукового потока можно охарактеризовать следующим образом: гиперзвуковое течение является более разреженным в направлении потока, чем перпендикулярно к нему.

В силу этой анизотропии уравнения сплошной среды (уравнения Навье — Стокса) при гиперзвуковых скоростях справедливы лишь при малых продольных градиентах, допуская в то же время значительные поперечные градиенты (например, в пограничном слое).

Согласно (1.5) длина пробега растет пропорционально M^2, что создает трудности при создании гиперзвуковых аэродинамических труб.

§ 2. При обтекании тела потоком, близким к свободномолекулярному, явление зависит от ряда характерных длин пробега: длины пробега набегающего потока в поле молекул, отраженных от тела λ_{12}, длины пробега λ_{21} отраженных молекул в набегающем потоке и длины пробега отраженных молекул в поле отраженных молекул, а также от $\lambda_{11} = \lambda$ и λ_0. Эти длины пробега зависят от взаимодействия молекул между собой.

Вообще говоря, эффективное сечение столкновения молекул σ уменьшается с увеличением относительной скорости молекул. Некоторое представление о характере зависимости σ от относительной скорости можно получить из формулы (1.3).

Из (1.3) видно, что $\mu \sim \rho \sqrt{T}\lambda_0 \sim \sqrt{T} / \sigma$, т. е.

$$\sigma \sim AT^{1/2}\mu^{-1} \tag{2.1}$$

Здесь и далее A — некоторые константы. Если принять закон Сезерленда изменения вязкости от температуры, получим

$$\sigma = A(1 + S/T) \tag{2.2}$$

Постоянная Сезерленда S для таких газов, как азот, кислород, гелий и водород лежит в диапазоне $80 \div 140$.

Обозначим через σ_∞ сечение столкновений в равновесном газе при температуре набегающего потока T_∞, соответствующей относительной скорости молекул порядка a_∞.

Пусть σ — сечение столкновений при относительной скорости V; тогда

$$\frac{\sigma}{\sigma_\infty} = \frac{T_\infty}{T}\,\frac{T+S}{T_\infty + S} \quad \text{при } \frac{T}{T_\infty} \sim \frac{V^2}{a_\infty{}^2} \sim M^2 \tag{2.3}$$

Отсюда, например, для движения в атмосфере земли получим, что при изменении относительной скорости от $5 \cdot 10^4$ *см/сек* (т. е. $T = 300°$ С) до 10^6 *см/сек* и выше сечение изменится лишь на одну треть, т. е. сечение столкновения можно считать почти постоянным.

Более существенные изменечия σ можно ожидать в аэродинамических трубах. Так, в гелиевой трубе T_∞ может равняться 5—10° K, в то время как $T \geqslant 300°\,K$. В этом случае сечение уменьшается на порядок и больше.

Ниже для иллюстрации влияния изменения сечения столкновения в зависимости от относительной скорости будут рассмотрены два характерных случая; $\sigma = \text{const}$ и σ обратно пропорциональна относительной скорости.

Будем предполагать, что отражение молекул от пластинки диффузное с максвелловским распределением скоростей. Средняя скорость отраженных молекул определяется температурой стенки T_w и коэффициентом аккомодации α.

§ 3. Рассмотрим обтекание пластины с характерным размером L гиперзвуковым потоком разреженного газа, вектор скорости которого $\mathbf{V}_\infty$ перпендикулярен плоскости пластины. Число Маха $M \gg 1$ и длина пробега набегающего потока равна λ_0.

По существу наличие тепловых скоростей у молекул набегающего потока в данном случае несущественно и им можно пренебречь и считать, что на пластину налетает пучок параллельно летящих молекул со скоростью V_∞. Длина пробега $\lambda_0 \sim (n_\infty \sigma)^{-1}$ в этом случае характеризует лишь плотность молекул набегающего потока.

Определяющим безразмерным параметром течения в данном случае является отношение $M_2 = V_\infty / V_2$ скорости набегающего потока V_∞ к средней скорости V_2 отраженных молекул, так как это отношение определяет плотность отраженных молекул

$$n_2 \sim n_\infty V_\infty / V_2 \sim n_\infty M_2 \tag{3.1}$$

а следовательно, и длины пробега λ_{12}, λ_{21} и λ_{22}.

Рассмотрим случаи $M_2 \gg 1$ и $M_2 \sim 1$.

3.1.1. Пусть $M_2 \gg 1$ и $\sigma = \sigma_\infty = \text{const}$. Этот случай может реализоваться, например, при диффузном отражении с коэффициентом аккомодации $\alpha \sim 1$ и $T_w \sim T_\infty$, при этом $M_2 \sim M$, так как $V_2 \sim a_\infty$.

Характерные длины пробега в этом случае равны

$$\lambda_{12} \sim V_\infty (n_2\sigma_\infty V_\infty)^{-1} = \lambda_0 M_2^{-1}, \qquad \lambda_{21} \sim V_2 (n_\infty \sigma_\infty V_\infty)^{-1} \sim \lambda_0 M_2^{-1}$$
$$\lambda_{22} \sim V_1 (n_2 \sigma_\infty V_2)^{-1} \sim \lambda_0 M_2^{-1} \tag{3.2}$$

так как относительные скорости $V_{12} \sim V_{21} \sim V_\infty$.

Для того чтобы течение было свободномолекулярным или близким к нему, молекулы должны испытывать мало столкновений на расстояниях порядка L от пластины, т. е. необходимо, чтобы [2, 3]

$$\lambda_{12} / L = \lambda_{21} / L = \lambda_{22} / L = K / M_2 \gg 1 \tag{3.3}$$

Если это условие выполнено, то для получения первой поправки к свободномолекулярному течению достаточно учесть лишь первые столкновения молекул.

Обозначим через $N_0 = n_\infty V_\infty L^2$, $P_0 \sim N_0 m V_\infty$, $Q_0 \sim N_0 m V_\infty^2$ соответственно число молекул, падающих в единицу времени на пластинку в свободномолекулярном потоке, приносимый ими импульс и энергию. Обозначим далее через N_-, P_- и Q_- уменьшение в результате столкновений числа частиц и приносимых ими импульса и энергии. Каждая частица набегающего потока испытывает $n_2 \sigma L$ столкновений. Поэтому

$$N_- \sim N_0 n_2 \sigma L \sim N_0 M_2 K^{-1}, \qquad P_- \sim N_- m V_\infty, \qquad Q_- \sim N_- m V_\infty^2 \tag{3.4}$$

Легко проверить, что увеличение этих величин (N_+, P_+, Q) из-за молекул, дополнительно попадающих иа пластинку в результате столкновений, имеет тот же порядок.

Изменение приносимых на пластинку энергии и импульса вследствие столкновения отраженных молекул между собой пренебрежимо мало из-за малой их скорости и малой вероятности возвращения их на пластинку после столкновения. Поэтому

$$C_x = 2\frac{P_0 - P_- + P_+}{\rho_\infty V_\infty^2 L^2} \sim C_{x0} + \frac{AM_2}{K} + O(M^2 K^{-1}, K^{-1})$$
$$q = 2\frac{Q_0 - Q_- + Q_+}{\rho_\infty V_\infty^3 L^2} \sim q_0 + \frac{AM_2}{K} + O(M^2 K^{-2}, K^{-1}) \tag{3.5}$$

где C_x — коэффициент сопротивления, q — поток тепла, индекс 0 относится к свободномолекулярному потоку и A — некоторая константа.

Из геометрии течения видно, что бо́льшая часть столкновений происходит вблизи тела и бо́льшая часть из них после столкновения попадает на пластинку, принося тот же импульс и энергию, что и без столкновений. Поэтому для пластинки, перпендикулярной потоку, константа A должна быть малой. Расчеты [4] показывают, что величина A отрицательна.

3.1.2. Пусть теперь опять $M_2 \gg 1$, σ изменяется обратно пропорционально относительной скорости молекул и $T_w \sim T_\infty$. Тогда

$$\sigma_2 = \sigma_\infty M_2^{-1}, \qquad \lambda_{12} \sim \lambda_0, \qquad \lambda_{21} \sim \lambda_0, \qquad \lambda_{22} \sim \lambda_0 M_2^{-1}$$

Если $\lambda_{22} \gg L$, т. е. $KM_2^{-1} \gg 1$, то вблизи тела происходит мало столкновений молекул набегающего потока с отраженными, а также отраженных между собой, и подобно 3.1.1 имеем

$$C_x = C_{x0} + AK^{-1} + O(M_2^{-2}K^{-1}) \qquad (K \gg M_2) \tag{3.6}$$

Для потока тепла получается аналогичное выражение.

В другом предельном случае, т. е. при $\lambda_{22} \ll L$ или $1 \ll K \ll M_2$, отраженные молекулы испытывают на малом расстоянии от пластинки большое число столкновений между собой, почти не испытывая столкновений с молекулами набегающего потока. На расстоянии нескольких длин пробега λ_{22} от пластинки поток отраженных молекул можно рассматривать как истечение в вакуум газа, из которого набегающий поток «вырывает» молекулы, «превращая» их как бы в молекулы другого сорта с длиной пробега порядка $\lambda_0 \sim \lambda_{22}M$ (т. к. при столкновении скорость, а следовательно, и длина пробега отраженных молекул в среднем возрастает в M раз), и создавая тем самым малые возмущения в этом газе. Таким образом, течение сплошной среды отраженных молекул взаимодействует как бы с молекулами другого сорта набегающего потока обладающими большой длиной пробега в отраженном потоке. Основную трудность в исследовании этого взаимодействия представляет изучение характера истечения газа отраженных молекул. Эта задача представляет самостоятельный интерес и в настоящей работе рассматриваться не будет.

3.2.1. Пусть теперь $M_2 \sim 1$ и $\sigma = \text{const}$. Этот случай может иметь место при коэффициенте аккомодации $a \ll 1$ (практически $\leqslant 0{,}5$), если $T_w / T_\infty \sim 1$, или при сильно нагретой стенке, когда температура стенки порядка температуры торможения. Последний случай часто встречается при исследованиях в аэродинамических трубах.

Очевидно, что в этих условиях $n_2 \sim n_\infty$ и

$$\lambda_{12} \sim V_\infty (n_\infty \sigma V_\infty)^{-1} \sim \lambda_0, \qquad \lambda_{21} = V_\infty (n_\infty \sigma V_\infty)^{-1} \sim \lambda_0$$
$$\lambda_{22} \sim V_\infty (n_\infty \sigma V_\infty)^{-1} \sim \lambda_0 \tag{3.7}$$

Критерием подобия будет число K. При $K \gg 1$ имеем

$$C_x = C_{x0} + AK^{-1} + O(K^{-2})$$

3.2.2. Если $M_2 \sim 1$ и σ меняется обратно пропорционально относительной скорости (см. 3.1.2), то $\sigma_2 \sim \sigma_\infty M^{-1}$ и, следовательно,

$$\lambda_{21} \sim \lambda_{12} \sim \lambda_{22} \sim M\lambda_0 \tag{3.8}$$

т. е. критерием подобия будет MK. При $MK \gg 1$

$$C_x = C_{x0} + A(KM_2)^{-1} + O(K^{-1}M^{-2}, K^{-2}M^{-2})$$

Отметим, что это течение при достаточно больших числах Маха может реализоваться при $K \ll 1$, т. е. в плотной среде. При $MK \gg 1$ характер обтекания пластинки будет близким к свободномолекулярному, даже если набегающий поток рассматривать как сплошную среду.

Здесь, как и в 3.1.2, отраженные молекулы и молекулы, столкнувшиеся с отраженными, будут как бы молекулами нового сорта, обладающими в M раз большей длиной пробега, чем молекулы в набегающем потоке. Отраженные молекулы, сталкиваясь с молекулами набегающего потока, как бы «выхватывают» из этого потока молекулы, которые становятся молекулами нового сорта. Выбывание из набегающего потока молекул вызывает возмущения, распространяющиеся в набегающем потоке со скоростью звука a_∞. Однако эти возмущения за время пролета газом расстояния порядка L проходят путь $L / M \ll \lambda_0$. Поэтому газодинамической перестройкой набегающего потока можно пренебречь. Это особенно ясно, если представить набегающий поток в виде достаточно плотного пучка параллельно летящих молекул.

Интересно, что в зависимости от условий критерий подобия меняется от K / M в случае 3.1.1 до MK в случае 3.2.2, т. е. в M^2 раз.

Если в первом случае при любой плотности набегающего потока неограниченно увеличивать его скорость, характер течения стремится в сторону сплошной среды; во втором случае течение стремится к свободномолекулярному.

В соответствии с этими критериями смещается и граница свободномолекулярных течений. Очевидно, что в случае 3.1.1 свободномолекулярное течение реализуется при том же числе Маха на гораздо большей высоте, чем в случае 3.2.2.

§ 4. Рассмотрим другой крайний случай пластинки под нулевым углом атаки. В этом случае в свободномолекулярном потоке молекулы попадают на пластинку только при наличии тепловых скоростей. Число молекул, падающих на пластинку, $N_0 \sim L^2 n_\infty a_\infty$.

4.1.1. Пусть $M \sim M_2 \gg 1$ и $\sigma = \text{const}$. Тогда $n_2 \sim n_\infty, V_2 \sim a_\infty$ и

$$\lambda_{12} \sim \lambda_0, \qquad \lambda_{21} \sim \lambda_0 M^{-1}, \qquad \lambda_{22} \sim \lambda_0 \tag{4.1}$$

Если $\lambda_{21} \sim \lambda_0 M^{-1} \gg L$, т. е. $K \gg M$, то каждая молекула набегающего потока испытывает около тела $n_\infty \sigma L$ столкновений. Всего около тела происходит $N_+ \sim n_\infty^2 V_\infty \sigma L^3$ столкновений, из них $N_- \sim N_0 n_\infty \sigma L \sim$ $\sim n_\infty^2 a_\infty \sigma L^3$ столкновений испытывают молекулы, падавшие на тело в свободномолекулярном потоке. Следовательно, в этом случае $N_- \sim N_+ M^{-1} \ll N_+$. Поэтому в результате столкновений на пластинку приносятся дополнительный импульс и энергия.

Для сопротивления в этом случае имеем

$$C_x = C_{x0} + AK^{-1} + O\,(M^{-1}K^{-1}), \qquad C_{x0} = O(M^{-1}) \tag{4.2}$$

где первый член обусловлен импульсом, приносимым молекулами в свободномолекулярном потоке, а величина A положительна.

Таким образом, здесь сопротивление, а также поток тепла при наличии столкновений больше, чем в свободномолекулярном потоке.

Пусть теперь $\lambda_{21} \ll L$ или $1 \ll K \ll M$. В этом случае все отраженные молекулы испытывают столкновения с молекулами набегающего потока на расстояниях порядка $\lambda_0 / M \ll L$ от пластинки.

При столкновении молекул набегающего потока с отраженными молекулами последние в среднем приобретают скорость порядка V_∞. Длина пробега их увеличивается в M раз, так что они испытывают лишь по одному столкновению внутри пограничного слоя толщиной порядка $\lambda_0 M^{-1}$.

Обозначим через N_w число молекул, покидающих в единицу времени пластинку. Все эти молекулы испытывают внутри слоя столкновения с N_w молекулами набегающего потока. Так как скорость отраженных молекул $a_\infty \ll V_\infty$, то примерно половина участвующих в столкновениях молекул после столкновения идет к верхней границе слоя и половина к стенке. Таким образом, на стенку возвращается почти N_w молекул. Утечка из слоя может происходить только через его концы. С другой стороны, в слой в единицу времени попадает $N_0 - N_-$ молекул невозмущенного потока. Поэтому плотность молекул в слое возрастает до тех пор, пока утечка на концах слоя не компенсирует приток молекул. Пусть доля молекул, покидающих слой на его концах, равна εN_w. Грубо можно считать, что величина ε пропорциональна отношению площади торцов слоя к площади пластинки, т. е. $\varepsilon \sim KM^{-1}$. Тогда имеем

$$N_0 - N_- \sim N_w \varepsilon \tag{4.3}$$

Плотность отраженных молекул в слое $n_2^* \sim N_w a^{-1} L^{-2}$. Соответственно длины пробега в слое равны

$$\lambda_{12}^* \sim (n_2^* \sigma)^{-1} \sim aL^2 (N_w \sigma)^{-1}, \qquad \lambda_{21}^* \sim \lambda_0 M^{-1}$$
$$\lambda_{22}^* \sim (n_2^* \sigma)^{-1} \sim aL^2 (N_w \sigma)^{-1} \tag{4.4}$$

При вычислении длины пробега λ_{21}^* и равной ей по порядку величины толщины слоя предполагается, что плотность молекул набегающего потока во всем слое порядка n_∞. Это условие выполняется, если $\lambda_{12}^* \gg L$, или согласно (4.4), если

$$aL (N_w \sigma)^{-1} \gg 1 \tag{4.5}$$

При $\lambda_{12}^* \gg L$ очевидно $N_- \ll N_0$ и согласно (4.3)

$$N_w \sim N_0 \varepsilon^{-1} \sim N_0 MK^{-1}$$

Подставляя это выражение в (4.5), получим $K^2 \gg M$.

Таким образом, для реализации предложенной схемы течения в слое необходимо, чтобы $K^2 \gg M \gg K \gg 1$. Очевидно, что эти условия могут быть выполнены лишь при очень больших числах Кнудсена и Маха.

К рассмотренному явлению можно подойти несколько иначе.

Рассмотрим обтекание пластины потоком параллельно летящих частиц со скоростью V_∞ и плотностью n_∞. Пусть этот поток падает на пластинку под малым углом θ. Пусть, кроме того, скорость отраженных молекул $V_2 \ll V_\infty$, т. е. $M_2 \ll 1$. В этом случае толщина слоя равна $KM_2^{-1}L$, $\lambda_{12}^* \sim \lambda_0 K (\theta M_2^2)^{-1}$ и условия существования слоя $K \ll M$ и $K^2 \gg \theta M_2^2$.

Эти условия могут встретиться в различного рода разгонных установках типа молекулярных лучей и им подобных.

Если указанные условия выполнены, то даже при числах Кнудсена, много больших единицы, течение существенно отличается от свободномолекулярного, и сопротивление и поток тепла, как будет показано ниже, могут на порядки превосходить соответствующие свободномолекулярные значения.

В приведенных рассуждениях не принимались во внимание столкновения, происходящие вне молекулярного слоя. Как отмечалось выше, через верхнюю грань слоя выходит N_w молекул со средней скоростью V_∞ и через торцы слоя $N_w \varepsilon$ молекул со средней скоростью a_∞. Соответственно плотность этих потоков равна $n_2 = N_w (V_\infty L^2)^{-1} \sim n_\infty K^{-1}$ и n_2^*.

Молекулы, вышедшие через верхнюю границу, с набегающим потоком имеют $n_\infty V_\infty n_2 \sigma L^3 \sim N_0 MK^{-2} \ll N_0$, столкновений. Молекулы, вышедшие через торцы, испытывают $N_0 KM^{-1}$ столкновений. Следовательно, вклад этих столкновений имеет более высокий порядок малости.

Таким образом, в результате описанных выше явлений, разыгрывающихся в слое, на пластинку падает в единицу времени $N_w \sim N_0 MK^{-1}$

молекул, в то время как в свободномолекулярном течении на пластинку падает всего лишь N_0 молекул. После столкновения N_w молекул набегающего потока, несущих импульс $N_w mV_\infty$ и энергию $^1/_2 N_w mV_\infty$, с N_w отраженными молекулами, импульсом и энергией которых можно пренебречь, половина импульса и энергии уносится молекулами, уходящими через верхнюю границу слоя, а половина падает на пластинку. Поэтому

$$C_x \sim A_0 M^{-1} + {}^1/_2 A_1 K^{-1} \tag{4.6}$$

Таким образом, при числах Рейнольдса $R = MK^{-1}$ в интервале $K \gg R \gg 1$ сопротивление и поток тепла, определяемые членом порядка K^{-1}, в R раз больше, чем в свободномолекулярном потоке.

Практически условие (4.5) можно ослабить и требовать лишь $L \leqslant \lambda_{12}^*$, т. е. $K^2 \geqslant M$, так как при этом ослабление набегающего потока происходит всего в e раз. Однако эти оценки даны без строгого учета порядков.

В промежуточной области, т. е. при $K \sim M$, все отраженные молекулы испытывают столкновения на расстояниях порядка L от пластинки. Рассуждения, аналогичные приведенным, дают

$$C_x \sim A_0 M^{-1} + A_1 K^{-1} \tag{4.7}$$

Таким образом, расчет гиперзвукового обтекания пластинки в диапазоне чисел Кнудсена от $K \gg M$ до $K^2 \gg M \gg K$ (от $R \ll 1$ до $\sqrt{M} \gg R \gg 1$) может быть выполнен с учетом лишь первого столкновения молекул, несмотря на то, что одна из характерных длин пробега λ_{21} сравнима или даже много меньше характерного размера тела. При еще больших числах R необходимо учитывать вторые и т. д. столкновения.

4.1.2. Пусть опять $M \sim M_2 \gg 1$, а σ обратно пропорциональна относительной скорости молекул. Тогда $\sigma_2 \sim \sigma_\infty M^{-1}$, $V_2 \sim a_\infty$, $n_2 \sim n_\infty$

$$\lambda_{12} \sim M\lambda_0, \qquad \lambda_{21} \sim \lambda_0, \qquad \lambda_{22} \sim \lambda_0 \tag{4.8}$$

Рассмотрим три случая: $\lambda_0 \gg L$, $\lambda_0 \sim L$ и $\lambda_0 \ll L$ при $MK \gg 1$.

Если $\lambda_0 \gg L$, то вблизи пластинки происходит $n_\infty^2 V_\infty \sigma_\infty M^{-1} L^3$ столкновений молекул набегающего потока с отраженными и

$$C_x \sim A_0 M^{-1} + A_1 (KM)^{-1} \tag{4.9}$$

Поправка, обусловленная столкновением отраженных молекул между собой и потерей импульса набегающими молекулами на отраженных молекулах, имеет порядок $(KM^2)^{-1}$. Здесь сопротивление опять больше, чем в свободномолекулярном потоке. Если $K \geqslant M$, то следует учитывать импульс, уносимый отраженными молекулами порядка M^{-2}.

При $\lambda_0 \sim L$ все отраженные молекулы испытывают столкновения между собой и с молекулами набегающего потока на расстояниях порядка L. Столкновения отраженных молекул между собой не меняют порядка плотности и скорости отраженных молекул. Столкновение же отраженной молекулы с молекулой набегающего потока «превращает» отраженную молекулу как бы в молекулу другого сорта с длиной пробега равной $\lambda_0 M$. По аналогии с 4.1.1 имеем

$$C_x = A_0 M^{-1} + A_1 (KM)^{-1} \sim A_0 M^{-1} + A_2 M^{-1} \tag{4.10}$$

так как здесь $K \sim 1$ и $MK \gg 1$.

В предельном случае $\lambda_0 \ll L$ все отраженные молекулы сталкиваются с молекулами набегающего потока в тонком слое, толщиной λ_0 около пластины. Из рассуждений, подобных приведенным для молекулярного пограничного слоя в 4.1.3, получим $N_w \sim N_0 K^{-1}$, $n_2{}^* \sim n_\infty K^{-1}$ и

$$\lambda_{12}{}^* \sim \lambda_0 KM, \qquad \lambda_{21}{}^* \sim \lambda_0, \qquad \lambda_{22}{}^* \sim \lambda_0 K \tag{4.11}$$

Из условия $\lambda_{12}{}^* \gg L$ имеем требование $MK^2 \gg 1$, где $K \ll 1$. Для сопротивления получаем

$$C_x \sim A_0 M^{-1} + A_1 (KM)^{-1} \tag{4.12}$$

Здесь опять сопротивление много больше, чем в свободномолекулярном потоке. Однако расчет этого течения не может быть произведен в рамках теории первых столкновений, так как $\lambda_{22}{}^* \ll \lambda_0$ и в слое происходит много столкновений отраженных молекул между собой.

В этом случае, как и в 3.2.2, течение имеет характер, близкий к свободномолекулярному при движении в плотной среде ($K \ll 1$).

Процесс «превращения» отраженных молекул в молекулы с большей длиной пробега в рассматриваемом случае подобен случаю 4.1.1. Однако случай 4.1.1 более благоприятен для расчета, так как отраженные молекулы в слое не успевают столкнуться между собой. Поэтому при расчете достаточно учесть ослабление потока отраженных молекул за счет превращений, происходящих при столкновениях с набегающими молекулами. В случае же 4.1.2 параллельно с превращениями происходят столкновения отраженных молекул между собой, изменяющие сложным образом функцию распределения.

В рассмотренных случаях вновь обнаруживается, что кривая изменения сопротивления и теплопередачи по числу Кнудсена имеет максимум.

4.2.1. Рассмотрим случай высокоскоростных отраженных молекул $M_2 \sim 1$, т. е. $V_2 \sim V_\infty$ и $\sigma = \text{const}$. В этом случае $n_2 = n_\infty M^{-1}$ и

$$\lambda_{12} = M\lambda_0, \qquad \lambda_{21} \sim \lambda_0, \qquad \lambda_{22} = M\lambda_0 \tag{4.13}$$

Этот случай подобен 4.1.1 в том отношении, что наименьшей длиной пробега является λ_{21}. Однако здесь все молекулы имеют одинаковый порядок скорости V_∞, и поэтому не происходит превращения молекул.

В этом случае течение будет близким к свободномолекулярному только в том случае, если все длины пробега много больше L. Следовательно, должны быть $K \gg 1$ и

$$C_x \sim C_{x0} + A_1 (KM^2)^{-1} \tag{4.14}$$

4.2.2. Если $M_2 \sim 1$ и σ обратно пропорциональна относительно скорости, то

$$\lambda_{12} \sim M^2\lambda_0, \qquad \lambda_{21} \sim M\lambda_0, \qquad \lambda_{22} \sim M^2\lambda_0 \tag{4.15}$$

Как и в 4.2.1, условием существования течения, близкого к свободномолекулярному, будет $KM \gg 1$ и

$$C_x = C_{x0} + A_1 (KM^2)^{-1} \tag{4.16}$$

Течение является близким к свободномолекулярному и указанную поправку можно найти, учитывая лишь первые столкновения при $K \ll 1$, если $MK \gg 1$. В случае 4.2.1 и 4.2.2 сопротивление вновь больше сопротивления в свободномолекулярном потоке.

Заметим, что при $M_2 \sim 1$ вероятность попадания после столкновения молекул на стенку меньше, чем при $M_2 \gg 1$. Поэтому численное значение коэффициентов A_1 соответственно меньше.

§ 5. Для пластинки при произвольных углах атаки ϑ, так же как и в теории гиперзвуковых течений сплошной среды, необходимо различать случаи $M \sin \vartheta \gg 1$ и $M \sin \vartheta \ll 1$.

В первом случае (при $M \sin \vartheta \gg 1$) характер течения в основном подобен течению при $\vartheta = {}^1/_2\, \pi$, так как при определении числа частиц и приносимых ими импульса и энергии наличие тепловых скоростей несущественно. Число молекул, падающих на пластину, равно $N_0 = V_\infty n_\infty L^2 \sin \vartheta$.

В §§ 3 и 4 было показано, что сопротивление (теплопередача) при $\vartheta = {}^1/_2\, \pi$ меньше, а при $\vartheta = 0$ соответственно больше, чем в свободномолекулярном потоке. В рассматриваемом случае $n_2 \sim M_2 n_\infty \sin \vartheta$ и

$$\lambda_{12} \sim \lambda_0 (M_2 \sin \vartheta)^{-1}, \qquad \lambda_{21} \sim \lambda_0 M_2^{-1}, \qquad \lambda_{22} \sim \lambda_0 (M_2 \sin \vartheta)^{-1} \tag{5.1}$$

При $\lambda_{21} \gg L$ или $K \gg M_2$, как легко видеть

$$N_- \sim n_\infty^2 V_\infty M_2 \sigma_\infty L^3 \sin^2 \vartheta, \qquad N_+ \sim n_\infty^2 V_\infty M_2 \sigma_\infty L^3 \sin \vartheta$$

$$C_x \sim A_0 \sin \vartheta - A_1 M_2 K^{-1} \sin^2 \vartheta + A_2 M_2 K^{-1} \sin \vartheta \tag{5.2}$$

При $\vartheta \to {}^1/_2\, \pi$ второй отрицательный член больше третьего и сопротивление меньше, чем в свободномолекулярном потоке. При $\vartheta = 0$ картина обратная.

Если ϑ мало и $K \leqslant M_2$, то все отраженные молекулы испытывают столкновения на расстояниях $LKM_2^{-1} \ll 1$ от пластинки. Сопротивление описывается той же формулой (5.2). В пределе при $KM_2^{-1} \ll 1$ приходим к пограничному слою описанного в § 4 типа.

При $M_2 \vartheta \ll 1$ течение подобно течению при $\vartheta = 0$.

Подобным же образом можно рассмотреть течение у конуса. Так же, как для пластинки, легко показать, что отнесенное к миделю конуса сопротивление равно

$$C_x \sim C_{x0} - A_1 M K^{-1} \vartheta + A_2 M K^{-1}$$

где ϑ — полуугол раствора конуса. Следовательно, при достаточно малом угле раствора сопротивление конуса с учетом первых столкновений больше, чем в свободномолекулярном потоке.

Автор благодарит М. Д. Ладыженского, В. А. Перепухова и Г. И. Таганова за обсуждение работы.

Поступила 26 II 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Тзян Х. Ш. Аэродинамика разреженных газов. Сб. пер. Газовая динамика, ИИЛ, 1950.
2. Коган М. Н. О границе свободномолекулярных течений. Тр. ЦАГИ, 1959, вып. № 764.
3. Hayes W. D. and Probstain R. F. Hypersonic flow Theory. Academic Press, N. Y., 1959.
4. Перепухов В. А. О сопротивлении плоской пластинки в потоке сильно разреженного газа. Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 4.