Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О СУЩЕСТВОВАНИИ УДАРНЫХ ВОЛН МАЛОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

Г. Я. Любарский
(Харьков)

Из теории ударных волн в обычной и магнитной гидродинамике хорошо известно, что скачки гидродинамических величин при переходе через фронт волны должны удовлетворять определенным алгебраическим соотношениям. Известно, кроме того, что не каждому скачку, удовлетворяющему этим соотношениям, действительно отвечает ударная волна. Для приложений очень важно знать, каким скачкам отвечают ударные волны, а каким — не отвечают.

Предположим, что некоторому скачку гидродинамических величин $u_- \to u_+$ отвечает стационарная ударная волна, движущаяся со скоростью U. Это означает, что система уравнений магнитной гидродинамики, учитывающая диссипативные процессы, должна иметь решения вида $u = u\,(x - Ut)$, стремящиеся к u_- и u_+, когда $x \to \pm\infty$. Будем называть такие решения переходными.

Задачу о достаточных условиях существования переходного решения у системы нелинейных уравнений сформулировал И. М. Гельфанд [1]. Жермен [2] доказал существование быстрой ударной волны в магнитной гидродинамике в том случае, когда течение является плоским. При более частных предположениях он установил существование и медленной ударной волны. А. Г. Куликовский и Г. А. Любимов [3] и Г. А. Любимов [4] доказали существование быстрых и медленных ударных волн в предположении, что только часть диссипативных коэффициентов отлична от нуля. Новый подход к задаче о существовании переходных решений предложил С. К. Годунов [5,6]. В настоящей статье рассматриваются диссипативные системы нелинейных уравнений. Частными случаями таких систем являются уравнения магнитной и обычной гидродинамики, написанные с учетом диссипативных процессов.

1. Постановка задачи. Будем рассматривать скачки достаточно малой величины. Скорость перемещения такого скачка весьма близка к одной из фазовых скоростей V системы. Естественно различать обыкновенные фазовые скорости и особые. В магнитной гидродинамике, например, обыкновенными скоростями являются скорости медленной и быстрой магнитозвуковых волн, а альфеновская скорость является особой. Точное определение диссипативной системы и обыкновенной фазовой скорости будет дано ниже.

Для диссипативных систем доказывается следующее утверждение.

Всякому разрывному решению системы, написанной без учета диссипативных процессов, отвечает ударная волна, т. е. переходное решение точной системы, если (а) скачок разрывного решения устойчив относительно расщепления, (б) скорость U перемещения скачка достаточно близка к одной из обыкновенных фазовых скоростей и (в) скачок достаточно мал.

Отсюда непосредственно вытекает существование в магнитной гидродинамике медленных и быстрых ударных волн достаточно малой интенсивности, каковы бы ни были коэффициенты диссипации.

Доказательство опирается на следующую теорему.

Теорема 1. 1. Система

$$a_m y^{(m)} + \ldots + a_1 y' + \varepsilon\beta_0 (y - y^2) = \varepsilon \sum_{k=1}^{m-1} y^{(k)} \varphi_k (y, y', \ldots, y^{(m-1)}, \xi; \varepsilon) + \\ + \varepsilon^2 F_1 (y, y', \ldots, y^{(m-1)}, \xi; \varepsilon) \qquad (1.1)$$

$$\xi_i' - \sum_{k=2}^{m} b_{ik}\xi_k = f_i(y) + \varepsilon F_i(y, \xi; \varepsilon) \qquad (i=2, 3, \ldots, m)$$

$$\xi_i = f_i(y) + \varepsilon F_i(y, \xi; \varepsilon) \qquad (i = m+1, \ldots, n)$$

имеет переходное решение $y(x, \varepsilon)$, $\xi(x, \varepsilon) = \{\xi_i(x, \varepsilon)\}_2^n$, удовлетворяющее условиям $y(-\infty, \varepsilon) = 0$, $y(+\infty, \varepsilon) = 1 + O(\varepsilon^2)$, если все корни полинома $a_m\nu^m + a_{m-1}\nu^{m-1} + \ldots + a_1\nu$ вещественны и просты, определитель $|b_{ik}|_2^m$ не равен нулю, все функции $F_i (i = 1, \ldots, n)$, $f_i (i = 2, 3, \ldots, n)$ и $\varphi_k (k = 1, \ldots, m-1)$ аналитичны относительно своих аргументов и параметр ε достаточно мал по абсолютной величине.

В приложении приведено доказательство этой теоремы.

2. Диссипативные и идеальные системы. Системы уравнений обычной и магнитной гидродинамики в одномерном случае могут быть записаны схематически следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} a_i(u) + \frac{\partial}{\partial x} b_i(u) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} a_i(u) + \frac{\partial}{\partial x} b_i(u) = \sigma_i\psi_i(u) \equiv c_i(u) \qquad (i = k_1 + 1, \ldots, k_2) \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} b_i(u) = \sigma_i\psi_i(u) \equiv c_i(u) \qquad (i = k_2 + 1, \ldots, n)$$

где $u = \{u_j\}_1^n$ — набор величин, описывающих состояние жидкости (давление, температура, компоненты скорости, магнитное поле и др.), $a_i(u)$, $b_i(u)$, $c_i(u)$ — некоторые аналитические функции, $\sigma_i^{-1} > 0$ — диссипативные коэффициенты (вязкость, магнитная вязкость, теплопроводность).

Система (2.1) допускает решения вида $u = u^\circ$, описывающие постоянные однородные течения. В качестве u° можно взять любой вектор, удовлетворяющий системе уравнений $\psi_i(u^\circ) = 0 \, (i = k_1 + 1, \ldots, n)$.

Систему (2.1) условимся называть диссипативной, если все такие решения асимптотически устойчивы относительно малых возмущений начального состояния.

Если система (2.1) диссипативна, то, как легко видеть, все корни $\omega_s(k) \, (-\infty < k < \infty)$ уравнения

$$D(i\omega, ik, u^\circ) \equiv \det | i\omega a_{ij}(u^\circ) - ikb_{ij}(u^\circ) - \sigma_i\psi_{ij}(u^\circ) | = 0$$

$$a_{ij}(u^\circ) = \left.\frac{\partial a_i}{\partial u_j}\right|_{u=u^\circ} \text{ и т. д.} \qquad (2.2)$$

лежат в верхней полуплоскости.

В обычных и магнитогидродинамических жидкостях все свободные колебания с течением времени затухают. Поэтому описывающие их системы дифференциальных уравнений являются диссипативными.

Если в одном из уравнений (2.1) положить $\sigma_i = \infty$ или $\sigma_i = 0$, то оно примет соответственно вид

$$\psi_i(u) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} a_i(u) + \frac{\partial}{\partial x} b_i(u) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial x} b_i(u) = 0$$

Полагая часть коэффициентов σ_i равными нулю, а остальные — бесконечности, получим идеальную систему. Таким образом с системой (2.1) связано 2^{n-k_1} различных идеальных систем. Ту идеальную систему, у которой все $\sigma_j = \infty$ ($\sigma_j = 0$), назовем наинизшей (наивысшей) системой.

Две идеальные системы назовем соседними, если они отличаются только одним уравнением.

Если положить часть коэффициентов σ_j равными нулю, а остальные — равными бесконечности, то в определителе (2.2) часть строк заменится строками $\psi_{ij}(u^\circ)$, а часть — строками $i\omega a_{ij}(u^\circ) - ikb_{ij}(u^\circ)$. Решения уравнения (2.2) будут иметь в этом случае следующую форму; $\omega_s = V_s k$, где $V_s = V_s(u^\circ)$ — фазовые скорости соответствующей идеальной системы. Фазовые скорости наинизшей системы являются корнями уравнения

$$\Delta(V) \equiv \det \begin{vmatrix} -Va_{ij}(u^\circ) + b_{ij}(u^\circ) \\ \psi_{ij}(u^\circ) \end{vmatrix} = 0 \tag{2.3}$$

Говоря о фазовых скоростях системы (2.1), будем подразумевать фазовые скорости наинизшей системы.

Фазовые скорости всех идеальных систем, связанных с диссипативной системой (2.1), вещественны [8] (см. также [9]).

3. Обыкновенные фазовые скорости. Пусть $V = V(u_-)$ — одна из фазовых скоростей системы (2.1). Назовем ее обыкновенной, если соблюдены следующие условия.

(а) Величина V — простой корень характеристического уравнения (2.3) при $u^\circ = u_-$.

(б) У одной из соседних систем при $u^\circ = u_-$ все фазовые скорости отличны [1] от V.

(в) У наивысшей системы ни одна из фазовых скоростей не совпадает с V при $u^\circ = u_-$.

(г) Каждому значению U из некоторой окрестности числа V соответствует скачок, перемещающийся со скоростью U и стремящийся к нулю, когда $U \to V$, причем отношение $(u_+ - u_-)/(U - V)$ стремится к конечному пределу при $(U - V) \to 0$.

(д) Все корни ν уравнения $D(-\nu V, -\nu, u_-) = 0$ просты и вещественны, кроме $(k_1 + 1)$ — кратного корня $\nu = 0$.

В магнитной гидродинамике альфеновская и энтропийная волны [10] являются особыми, так как для них не выполнено условие (г) [11]. Наоборот, быстрая и медленная магнитозвуковые волны являются обыкновенными. В самом деле, наивысшая система в данном случае имеет бесконечную вязкость и теплопроводность и нулевую электропроводность. В такой системе будет

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\rho + v_x \frac{\partial}{\partial x}\rho = 0$$

---

[1] Если система (2.1) диссипативна, то свойство (а) является следствием свойства (б).

Это означает, что одна фазовая скорость равна v_x, а остальные равны бесконечности. Условие (в) выполнено. Для проверки условия (б) рассмотрим соседнюю систему, у которой коэффициент теплопроводности равен бесконечности, а магнитная вязкость и обыкновенная вязкость равны нулю. Малые колебания такой системы являются изотермическими, а фазовые скорости могут быть получены из фазовых скоростей идеальной магнитной гидродинамики заменой обычной скорости звука изотермической скоростью звука.

Сложней всего было бы проверить условие (д). Однако свойство (д) доказано в уже упоминавшейся работе Жермена [2]. Для звуковой волны в обычной гидродинамике свойство (д) доказано С. К. Годуновым [5].

4. Система, определяющая структуру ударной волны. Стационарной ударной волне, движущейся со скоростью U, соответствует решение системы (2.1) вида $u(x, t) = u(x - Ut)$, причем $u(\pm\infty) = u_\pm$, $u'(\pm\infty) = 0$. Функция $u(x)$ является, очевидно, решением системы уравнений:

$$\frac{d}{dx}\{-Ua(u) + b(u)\} = c(u) \tag{4.1}$$

Для дальнейшего необходимо произвести некоторые преобразования системы (4.1). Вводя обозначение $B(u) = b(u) - V(u_-)a(u)$, перепишем уравнение (4.1) следующим образом:

$$\frac{d}{dx}\{-\varepsilon a(u) + B(u)\} = c(u) \qquad (\varepsilon = U - V(u_-)) \tag{4.2}$$

Совокупность всех векторов, у которых первые k_1 (последние $n - k_1$ координат равны нулю, обозначим через $H_1(G_1)$. Пусть P_1 и Q_1 — операторы ортогонального проектирования на подпространства H_1 и G_1 соответственно. Операторы, задаваемые матрицами

$$a_{ik}(u_-), \qquad B_{ik}(u_-) = \left.\frac{\partial B_i}{\partial u_k}\right|_{u=u_-}, \qquad c_{ik}(u_-) = \left.\frac{\partial c_i}{\partial u_k}\right|_{u=u_-}$$

обозначим через a_1, B_1 и c_1. Отметим соотношения

$$Q_1c_1 = Q_1c_1 = 0, \qquad P_1c = c, \qquad P_1c_1 = c_1$$

Из (4.2) следует, что $Q_1\{-\varepsilon a(u) + B(u)\} = \text{const}$. Не ограничивая общности рассмотрения, положим $a(u_-) = 0$, $B(u_-) = 0$. При этом

$$-\varepsilon Q_1 a(u) + Q_1 B(u) = 0 \tag{4.3}$$

и уравнению (4.2) можно придать следующий вид:

$$\frac{d}{dx}\{-\varepsilon P_1 a(u) + P_1 B(u)\} = R(u) - \varepsilon Q_1 a(u) \quad (R = Q_1 B + c) \tag{4.4}$$

Докажем, что при известных условиях система (4.4) имеет переходное решение. Из (4.4) следует, что величины $u_- = u(-\infty)$ и $u_+ = u(+\infty)$ удовлетворяют соотношению

$$R(u_-) - \varepsilon Q_1 a(u_-) = R(u_+) - \varepsilon Q_1 a(u_+) = 0 \tag{4.5}$$

5. Скачки, перемещающиеся со скоростью, близкой к обыкновенной фазовой скорости. Рассмотрим более подробно уравнение (4.5). Положим $u_+ = u_- + \varepsilon v_+$ и разложим вектор-функции $R(u_+)$ и $a(u_+)$ в ряд Тейлора. Получим

$$R_1 v_+ + \varepsilon R_2(v_+) + \ldots = \varepsilon Q_1 a_1 v_+ + \varepsilon^2 Q_1 a_1(v_+) + \ldots \tag{5.1}$$

Оператор R_1 является особенным. Это непосредственно вытекает из (2.3). Поэтому существует такой вектор v°, что $R_1 v^\circ = 0$. Введем в рассмотрение также вектор v^*, удовлетворяющий соотношению $R_1{}^* v^* = 0$, где $R_1{}^*$ — оператор, сопряженный оператору R_1. Отметим, что

$$c_1 v^\circ = P_1 c_1 v^\circ = P_1 R_1 v^\circ = 0$$

Согласно свойству (г) обыкновенной фазовой скорости вектор v_+ стремится к определенному пределу, когда $\varepsilon \to 0$. Из (5.1) следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} v_+ = \mu v^\circ, \quad \text{или} \quad u_+ = u_- + \varepsilon\mu v^\circ + O(\varepsilon^2) \tag{5.2}$$

Число μ легко найти, умножая равенство (5.1) на v^* и переходя затем к пределу $\varepsilon \to 0$; в результате получим

$$\mu (v^*, R_2(v^\circ)) = (v^*, Q_1 a_1 v^\circ)$$

Докажем, что $(v^*, Q_1 a_1 v^\circ) \neq 0$. Согласно свойству (а) обыкновенной фазовой скорости число $V_- = V(u_-)$ является простым нулем функции $\Delta(V) = \det |R_1 - (V - V_-) Q_1 a_1|$. Поэтому $\Delta'(V_-) \neq 0$. С другой стороны

$$\Delta'(V_-) = -\sum_{i,k=1}^{h} (Q_1 a_1)_{ik} \Gamma_{ik} \tag{5.3}$$

где Γ_{ik} — алгебраические дополнения определителя $\det |R_1|$.

Так как согласно (5.3) не все Γ_{ik} равны нулю, а оператор R_1 — особенный, то числа Γ_{ik} можно представить в виде $\Gamma_{ik} = v_i{}^* v_k{}^\circ$, если векторы v° и v^* должным образом нормированы. Подставляя это выражение Γ_{ik} в (5.3), найдем

$$\Delta'(V_-) = -(v^*, Q_1 a_1 v^\circ) \neq 0$$

Следовательно

$$(v^*, R_2(v^\circ)) \neq 0. \qquad \mu = (v^*, Q_1 a_1 v^\circ) / (v^*, R_2(v^\circ))$$

6. Приведение системы (4.3) — (4.4) к каноническому виду. Заметим, что $dB(u)/dx = \dot{B}(u)\, du/dx$. Согласно свойству (в) обыкновенной фазовой скорости оператор $\dot{B}(u_-) = B_1$ имеет обратный. Поэтому при достаточно малых $|\varepsilon|$ и $|u - u_-|$ уравнение (4.2) можно переписать в виде

$$\frac{du}{dx} = [\dot{B}(u) - \varepsilon \dot{a}(u)]^{-1} c(u) \tag{6.1}$$

Вводя обозначения $H_2 = B_1{}^{-1} H_1$ и $G_2 = B_1{}^{-1} G_1$, определим оператор P_2, положив

$$P_2 \varphi = \varphi \quad (\varphi \in H_2), \qquad P_2 \varphi = 0 \quad (\varphi \in G_2)$$

Для упрощения дальнейших выкладок положим, не ограничивая общности, $u_- = 0$. Разложим искомую функцию $u(x)$ на два слагаемых

$$u = z + w \qquad (z \in H_2,\ w \in G_2)$$

и подставим в (4.3)

$$Q_1 B_1 z + Q_1 B_1 w = \varepsilon Q_1 a(u) + Q_1 [B_1 u - B(u)]$$

Так как $z \in H_2$, то $B_1 z \in H_1$ и $Q_1 B_1 z = 0$. Далее, $w \in G_2$, $B_1 w \in G_1$ и $Q_1 B_1 w = B_1 w$. Поэтому

$$w = B_1{}^{-1} Q_1 \{\varepsilon a(u) + B_1 u - B(u)\} \tag{6.2}$$

Подействуем оператором P_2 на обе части (6.1)

$$\frac{dz}{dx} = P_2 B_1{}^{-1} c_1 u + P_2 \{[\dot{B}(u) - \varepsilon \dot{a}(u)]^{-1} c(u) - B_1{}^{-1} c_1 u\}$$

Заметим, что $c_1u \in H_1$, $B_1^{-1}c_1u \in H_2$. Поэтому $P_2B_1^{-1}c_1u = B_1^{-}c_1u$ и

$$\frac{dz}{dx} = B_1^{-1}c_1u + F(u), \qquad F(u) = P_2\{[\dot{B}(u) - \varepsilon\dot{a}(u)]^{-1}c(u) - B_1^{-1}c_1u\} \tag{6.3}$$

Система (6.2) — (6.3) эквивалентна исходной системе (4.1).

Прежде чем идти дальше, докажем, что $v^\circ \in H_2$. Исходя из равенства $R_1v^\circ = 0$, получим

$$0 = Q_1R_1v^\circ = Q_1(Q_1B + c_1)v^\circ = Q_1Bv^\circ \tag{6.4}$$

Отсюда следует, что $B_1v^\circ \in H_1$ и $v^\circ \in B_1^{-1}H_1 = H_2$.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_m$ $(m = n - k_1)$ — какой-либо базис в H_2, причем $e_1 = v^\circ$. Дополним его каким-либо базисом $e_{m+1}, \ldots, e_n$ в G_2. Положим

$$z = \varepsilon\mu y e_1 + \sum_{i=2}^{m} \varepsilon^2\xi_i e_i, \qquad w = \sum_{i=m+1}^{n} \varepsilon^2\xi_i e_i \tag{6.5}$$

Если в уравнениях (6.2), (6.3) перейти к координатам, то получится система вида

$$\begin{gathered}
y' = \varepsilon\sum_{j=2}^{m} \beta_{1j}\xi_j + \varepsilon(\alpha y + by)^2 + \varepsilon^2\varphi(y, \xi_2, \ldots, \xi_n; \varepsilon) \\
\xi_i' - \sum_{j=2}^{m} \beta_{ij}\xi_j = \alpha_i y + b_i y^2 + \varepsilon F_i(y, \xi_2, \ldots, \xi_n; \varepsilon) \qquad (i = 2, 3, \ldots, m)
\end{gathered} \tag{6.6}$$

$$\xi_i = \alpha_i y + b_i y^2 + \varepsilon F_i(y, \xi_2, \ldots, \xi_n; \varepsilon) \qquad (i = m+1, \ldots, n)$$

Обозначим через

$$D_1(\nu, \varepsilon, u_-) = \det|\nu(-\varepsilon P_1a_1 + P_1B_1) - R_1 + \varepsilon Q_1a_1|$$

характеристический многочлен системы (4.4) в точке $u = u_-$. Система (6.6) эквивалентна системе (4.4). Поэтому ее характеристический многочлен совпадает с точностью до множителя с $D_1(\nu, \varepsilon, u_-)$. В частности, получаем

$$D_1(\nu, 0, u_-) = \mathrm{const}\,\nu\det|\beta_{ij} - \nu\delta_{ij}|_2^m \tag{6.7}$$

Положим

$$D_1(\nu, 0, u_-) = a_m\nu^m + a_{m-1}\nu^{m-1} + \ldots + a_1\nu \equiv \nu\Delta_1(\nu)$$

Подействуем теперь оператором $\Delta(d/dx)$ на первое из уравнений (6.6). Вспоминая известную теорему Гамильтона — Кэли [12], получим

$$\begin{gathered}
D_1\left(\frac{d}{dx}, 0, u_-\right)y + \varepsilon\sum_{k=0}^{m-1}\beta_k y^{(k)} = \varepsilon\sum_{i,k=0}^{m-1}\gamma_{ik}y^{(i)}y^{(k)} + \\
+ \varepsilon^2F_1(y, y', \ldots, y^{(m-1)}, \xi_2, \ldots, \xi_n; \varepsilon)
\end{gathered} \tag{6.8}$$

Обозначим через (А) систему, которая получится, если в системе (6.6) заменить первое уравнение уравнением (6.8). Системы (6.6) и (А) эквивалентны в том смысле, что каждое переходное решение одной из них является переходным решением другой. Это вытекает из того, что среди решений уравнения $\Delta_1(d/dx)\varphi = 0$ только тривиальное решение $\varphi \equiv 0$ является ограниченным на всей оси x.

7. Существование ударных волн. Покажем, что система (А) является частным случаем системы (1.1) и удовлетворяет всем условиям теоремы 1.1.

Условие (а) теоремы 1.1 выполняется при достаточно малых по абсолютной величине значениях ε в силу свойства (д) обыкновенной фазовой скорости, так как

$$D_1(\nu, 0, u_-) = (-\nu)^{-k_1} D(-\nu V_-, -\nu, u_-)$$

Для проверки условия (б) воспользуемся следующим свойством диссипативных систем. Пусть $\nu = \nu_0(U)$ — тот корень уравнения $(-\nu)^{-k_1} D(-\nu U, -\nu, u_-) = 0$, который обращается в нуль при $U = V_-$. Если скорость V_- обладает свойством (б) обыкновенной фазовой скорости [1], то $\nu_0'(V_-) < 0$.

Легко видеть, что характеристический многочлен системы (А) имеет при малых ε корень $\nu(\varepsilon) = -\varepsilon\beta_0 / a_1 + O(\varepsilon^2)$. Поэтому $\beta_0 / a_1 > 0$.

Согласно условию устойчивости скачка относительно расщепления должно выполняться неравенство

$$V(u_+) < U < V(u_-)$$

т. е. должно быть $\varepsilon < 0$. Итак, $\varepsilon\beta_0 a_1 < 0$ и условие (б) выполнено. Одновременно доказано, что выполнено и условие (в), так как в силу (6.7)

$$a_1 = \mathrm{const} \det |\beta_{ik}|_2^m$$

Остается проверить, что $\gamma_{00} = \beta_0$. Для этого заметим, что координаты вектора u_+ согласно (5.2) равны

$$y_+ = 1 + O(\varepsilon), \qquad \xi_i = O(\varepsilon) \qquad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

С другой стороны, постоянный вектор $u = u_+$ является решением системы (А). Подставляя его в уравнение (6.8), получим

$$\varepsilon\beta_0 = \varepsilon\gamma_{00} + O(\varepsilon^2)$$

Отсюда и заключаем, что $\gamma_{00} = \beta_0$.

Таким образом, сформулированное в п. 1 утверждение доказано. В частности, доказано наличие структуры у медленной и быстрой ударных магнитогидродинамических волн достаточно малой интенсивности.

8. *Приложение.* **Вспомогательное уравнение.** Доказательство теоремы (1.1) начнем с рассмотрения вспомогательного уравнения

$$P\left(\frac{d}{dx}\right) y + \varepsilon f(y) + \varepsilon\psi(x) = 0 \qquad (0 < \varepsilon \leqslant 1) \tag{8.1}$$

Обозначим через $a_- > 0$ и $a_+ < 0$ какие-либо два числа таких, что полиномы $P(\nu) + a_\pm$ имеют лишь вещественные и притом простые нули. Относительно функции $f(y)$ и $\psi(x)$ предположим следующее.

(1). Функция $f(y)$ определена, непрерывна и дифференцируема на некотором замкнутом интервале $p_1 \leqslant y \leqslant p_2$, причем $p_1 a_- = p_2 a_+$.

(2). Пусть

$$0 \leqslant f'(y) < a_- \quad (p_1 \leqslant y \leqslant 0) \qquad 0 \geqslant f'(y) > a_+ \quad (0 \leqslant y \leqslant p_2)$$

(3). Каков бы ни был интервал (α, β) $(p_1 < \alpha < 0 < \beta < p_2)$, существует такое число $d(\alpha, \beta) > 0$, что

$$|f'(y)| > d(\alpha, \beta) |a(y)| \quad (y \in (\alpha, \beta)), \qquad a(y) = \begin{cases} a_- & (y < 0) \\ a_+ & (y > 0) \end{cases}$$

---

[1] Это утверждение доказано в [9] для систем более частного вида, чем система (2.1). Однако приведенное доказательство распространяется и на системы вида (2.1).

(4). Функция $\psi(x)$ определена на всей оси $-\infty<x<\infty$ и стремится к некоторым пределам $\psi(-\infty)$, $\psi(+\infty)$, когда $x\to\pm\infty$.

(5). Справедливы неравенства

$$-\frac{1}{2f}(0)\leqslant\psi(x)\leqslant-f(p_1)\qquad(-\infty<x\leqslant 0)$$

$$-\frac{1}{2f}(0)\leqslant\psi(x)\leqslant-f(p_2)\qquad(0\leqslant x<\infty)$$

Обозначим через S совокупность всех непрерывных на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$ функций $\omega(x)$, которые удовлетворяют неравенствам

$$p_1\leqslant\omega(x)\leqslant 0\qquad(x<0),\qquad\qquad 0\leqslant\omega(x)\leqslant p_2\qquad(x>0)$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 8.1. Если условия (1) — (5) выполнены, то уравнение (8.1) имеет в S переходное решение и притом единственное [7].

Обозначим через Ψ_f совокупность всех функций $\psi(x)$, удовлетворяющих условиям (4), (5). Теорема 8.1 показывает, что существует оператор T_ε, переводящий функции $\psi\in\Psi_f$ в решения $y(x)\in S$ уравнения (8.1)

$$y=T_\varepsilon\psi$$

Можно доказать следующую теорему.

Теорема 8.2. Существует такое число $\varepsilon_1>0$, что для всех ε из интервала $0<\varepsilon<\varepsilon_1$ и всех $\psi_1, \psi_2\in\Psi_f$ справедлива оценка

$$\| a(x)\,[T_\varepsilon\psi_2-T_\varepsilon\psi_1]\|<\frac{4}{d(f)}\|\psi_2-\psi_1\|$$

$$d(f)\equiv d\left(-\frac{f(0)}{4a_-},\ \frac{f(0)}{4a_+}\right),\qquad \|\psi\|=\sup_x|\psi(x)|$$

Из теоремы 8.2 вытекает следствие.

Следствие 8.1. Если выполнены все условия теоремы 8.2 и $0<\varepsilon<\varepsilon_1$, то

$$\| y_2^{(k)}-y_1^{(k)}\|<\varepsilon M_k\left(1+\frac{4}{d(f)}\right)\|\psi_2-\psi_1\|\qquad(k=1, 2, \ldots, m-1)$$

где

$$\psi_i\in\Psi_f,\quad y_i=T_\varepsilon\psi_i\quad(i=1, 2),\qquad M_k=\int_{-\infty}^{\infty}|Y_0^{(k-1)}(x)|\,dx,\ Y_0(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{ze^{zx}}{P(z)}dz$$

Доказательство теоремы 1.1. По условию теоремы определитель $|b_{ik}|_2^m$ не равен нулю. Поэтому система уравнений

$$\xi_i'-\sum_{k=2}^{m}b_{ik}\,\xi_k=\psi_i(x)\qquad(\|\psi_i\|<K, i=2, 3, \ldots, m)$$

имеет ограниченное на всей оси решение $\xi_i(x)$. Существует постоянная B такая, что

$$\|\xi_i\|<BK\qquad(i=2, 3, \ldots, m)$$

Положим

$$\max|f_i(y)|=\mu_i\quad(-1\leqslant y\leqslant 1)\qquad(i=2, 3, \ldots, n)$$

и обозначим через D область в $(n+m-1)$-мерном пространстве переменных y, y', y'', ..., $y^{(m-1)}$; ξ_2, ξ_3, ..., ξ_n, определенную неравенствами

$$-1<y<1,\qquad|y^{(k)}|<\varepsilon M_k,\ |\xi_i|<(B+1)\mu_i\quad(i=2, \ldots, n;\quad k=1, \ldots, m-1)$$

Будем говорить, что вектор-функция $\{y(x), \xi(x)\}$ принадлежит совокупности $S(D)$, если:

1) Функции $y(x)$ и $\xi_i(x)$ $(i=2, 3, \ldots, n)$ непрерывны на всей оси x и стремятся к некоторым пределам при $x\to\pm\infty$;

2) функция $y(x)$ имеет непрерывные производные, включая производную $(m-1)$ порядка, все они стремятся к нулю при $x\to\pm\infty$;

3) при каждом значении $x\,(-\infty < x < \infty)$ вектор $y(x), y'(x), \ldots, y^{(m-1)}(x)$, $\xi_2(x), \ldots, \xi_n(x)$ принадлежит области D;

4) функция $xy(x)$ неотрицательна.

Сопоставим каждой вектор-функции $\{y, \xi\}$ из $S(D)$ вектор-функцию $A\{y, \xi\} = \{y^\times, \xi^\times\}$, удовлетворяющую следущим соотношениям:

$$P\left(\frac{d}{dx}\right) y^\times + \varepsilon\beta_0 (y^\times - y^{\times 2}) + \varepsilon\psi(x) = 0$$

$$\xi_i^{\times\prime} - \sum_{j=2}^{m} b_{ij}\, \xi_j^\times = \psi_i(x) \qquad (i = 2, 3, \ldots, m)$$

$$\xi_i^\times = \psi_i(x) \qquad (i = m+1, \ldots, n)$$

где

$$\psi(x) = -\sum_{k=1}^{m-1} y^{(k)} \varphi_k (y, y', \ldots, y^{(m-1)}, \xi_2, \ldots, \xi_n; \varepsilon) - $$
$$-\varepsilon F_0 (y, y', \ldots, \ldots, y^{(m-1)}, \xi_2, \ldots, \xi_n; \varepsilon)$$
$$\psi_i(x) = f_i(y^\times) + \varepsilon F_i(y, \xi_2, \ldots, \xi_n; \varepsilon) \qquad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

Из теоремы 8.1 следует, что эти соотношения, действительно, определяют оператор A. Теорема 8.2 и следствие 8.1 позволяют показать, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ оператор A не выводит вектор-функции из области $S(D)$ и является сжимающим относительно нормы

$$\| y, \xi \| = \sup_x \left\{ | y(x) | + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{m-1} | y^{(k)}(x) | + \sum_{i=2}^{n} | \xi_i(x) | \right\}$$

с коэффициентом сжатия $\rho < 1$.

Отсюда следует, что существует вектор-функция $\{y(x), \xi(x)\}$ такая, что $A\{y, \xi\} = \{y, \xi\}$. Это функция и будет переходным решением системы (1.1). Теорема 1.1 доказана.

Поступила 12 II 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. УМН, 1959, т. XIV, вып. 2 (36).
2. Germain P. Contribution a la théorie des ondes de choc en magnetodynamique des fluides. O. N. E. R. A. 1959, publ. 97.
3. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. О структуре наклонной магнитогидродинамической ударной волны. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 1.
4. Любимов Г. А. Структура магнитогидродинамической ударной волны в газе с анизотропной проводимостью. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 2.
5. Годунов С. К. Интересный класс квазилинейных систем. ДАН СССР, 1961, т. 139, № 3.
6. Годунов С. К. О неединственности размазывания разрыва в решении квазилинейной системы. ДАН СССР, 1961, т. 136, № 2.
7. Любарский Г. Я. Построение переходных решений нелинейнных уравнений. ДАН СССР, 1961, т. 140, № 6.
8. Whilham G. B. Some comments on wave propagation and shock wave structure with application to magnetohydrodynamics. Comm. Pure Appl. Math., 1959, vol. 12, № 1.
9. Любарский Г. Я. О структуре ударных волн. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 6.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
11. Половин Р. В. Ударные волны в магнитной гидродинамике. УФН, 1960, т. 72, вып. 1.
12. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., Гостехиздат, 1954, стр. 74.