

## О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В СИСТЕМАХ С НЕЛИНЕЙНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

К. А. Лурье

(Ленинград)

Многие колебательные устройства имеют в качестве основного конструктивного элемента так называемое волновое звено — систему, в которой возмущения распространяются с определенной скоростью, — и эта скорость задает в ряде случаев частоту происходящих колебаний. Примерами могут служить устройство, известное под названием гидравлического тарана, ламповый генератор, нагруженный на длинную линию, скрипичная струна и т. д. Системы такого рода описываются в простейших случаях уравнениями типа струны; стационарные состояния их в известных условиях могут оказаться неустойчивыми по отношению к начальным или краевым данным. Если при этом наложены нелинейные краевые условия, то в системе могут возникнуть колебания определенной амплитуды. Для примеров, указанных выше, соответствующие задачи рассматривались в работах [1-3]. Результаты этих исследований получены путем сведения задач к конечным функциональным уравнениям, разрешаемым весьма наглядно графически при помощи диаграмм Ламерея. Устойчивость получившихся периодических решений исследовалась методом Кенигса.

Уравнению струны, для которого развиты эти построения, свойственно известное даламберовское представление общего решения, и это обстоятельство существенно для применимости указанной методики. Однако, даже когда такое представление имеет место, сведение к конечным функциональным уравнениям осуществимо лишь в случае специального задания начальных и краевых условий. Если заданы условия более общего вида, то вычисления, приведенные в [1-3], оказываются непригодными.

Можно указать подход к решению этой более общей проблемы. Этот подход не связан ни с той или иной формой начальных или краевых условий, ни с требованием представимости общего решения по Даламберу. Соответствующие построения могут быть использованы в задачах, основанных на одномерном волновом уравнении. Изложению этих вопросов посвящена первая часть работы.

Во второй части анализируются колебания в системе, состоящей из трубопровода и запорного клапана, снабженного нелинейной пружиной. В линейной постановке задача рассматривалась А. И. Лурье и А. И. Чекмаревым [4]. В этом примере оказывается возможным, в силу специального характера граничных и начальных условий, применить методику работ [1-3]. При учете массы клапана и трения в пружине дело сводится к дифференциально-разностному уравнению нейтрального типа.

Здесь рассматривается лишь случай нулевой массы клапана и отсутствия трения. Определяется характер возникающих колебаний и исследуется их устойчивость.

1. Пусть дано уравнение струны

$$u_{\tau\tau} = u_{xx} \quad (\tau = at) \quad (1.1)$$

требуется определить его решение для  $\tau > 0$ ,  $x \in [0, l]$  при следующих начальных и краевых условиях:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_{\tau}(x, 0) = \psi(x) \quad (1.2)$$

$$u_x(0, \tau) = F[u(0, \tau)], \quad u(l, \tau) = 0 \quad (1.3)$$

Здесь  $\varphi$ ,  $\psi$  — известные функции,  $F$  — заданная, вообще говоря, нелинейная функция своего аргумента.

Введем функцию  $v(x, \tau)$  таким образом, чтобы уравнение (1.1) заменилось системой

$$u_\tau = v_x, \quad u_x = v_\tau \quad (1.4)$$

Решение ее представляется так:

$$u = f_1(\tau - x) + f_2(\tau + x), \quad v = -f_1(\tau - x) + f_2(\tau + x) \quad (1.5)$$

где  $f_1$  и  $f_2$  — функции, определяемые дополнительными условиями.

Граничное условие  $u(l, \tau) = 0$  позволяет написать

$$f_1(\tau - l) = -f_2(\tau + l) \quad (\tau > 0) \quad (1.6)$$

Первое условие (1.3) запишем следующим образом:

$$-f_1'(\tau) + f_2'(\tau) = F[f_1(\tau) + f_2(\tau)] \quad (\tau > 0) \quad (1.7)$$

или, имея в виду (1.6)

$$f_2'(\tau) + f_2'(\tau + 2l) = F[f_2(\tau) - f_2(\tau + 2l)] \quad (\tau > 0) \quad (1.8)$$

Получили нелинейное дифференциально-разностное уравнение нейтрального типа для определения функции  $f_2(\tau)$ . Чтобы задача была корректно поставлена, необходимо задать  $f_2(\tau)$  при  $0 \leq \tau \leq 2l$ . Начальные условия (1.2) легко приводят к соотношениям

$$f_1(-x) + f_2(x) = \varphi(x), \quad f_1'(-x) + f_2'(x) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq l) \quad (1.9)$$

Штрих обозначает производную по всему аргументу. Отсюда

$$f_2'(x) = \frac{1}{2}[\varphi'(x) + \psi(x)] \quad (0 \leq x \leq l) \quad (1.10)$$

Определим теперь  $f_2'(x)$  при  $x \in [l, 2l]$ . Из начальных условий вытекает формула

$$f_1'(-x) = \frac{1}{2}[\psi(x) - \varphi'(x)] \quad (0 \leq x \leq l) \quad (1.11)$$

Заменив в ней  $x$  на  $l - \tau$ , получим

$$f_1'(\tau - l) = \frac{1}{2}[\psi(l - \tau) + \varphi'(l - \tau)] \quad (0 \leq \tau \leq l) \quad (1.12)$$

Здесь и ниже штрих обозначает производную по  $\tau$ .

Дифференцируя (1.6) по  $\tau$ , выразим  $f_1'(\tau - l)$  через  $f_2'(\tau + l)$ ; уравнение (1.12) после этого напишем так:

$$f_2'(\tau + l) = -\frac{1}{2}[\psi(l - \tau) + \varphi'(l - \tau)]$$

или, наконец

$$f_2'(\tau) = -\frac{1}{2}[\varphi'(2l - \tau) + \psi(2l - \tau)] \quad (l \leq \tau \leq 2l) \quad (1.13)$$

Формулы (1.10) и (1.13) определяют  $f_2'(\tau)$  при  $\tau \in [0, 2l]$ . Интегрирование определяет  $f_2(\tau)$  с точностью до постоянной. Здесь возникает основная трудность: эту постоянную нельзя определить, не рассматривая одновременно задачу о нахождении функции  $f_1(\tau)$ . Единственное конечное соотношение, содержащее только  $f_2$ , которое можно вывести из условия (1.6) и первого условия (1.9)

$$f_2(x) - f_2(2l - x) = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq l) \quad (1.14)$$

не определяет постоянной интегрирования. В рассматриваемом примере эта трудность вызвана тем, что условия (1.2), (1.3) не содержат доста-

точного числа конечных соотношений между функциями  $u$  и  $v$ . Если бы такое соотношение имелось, скажем, вместо второго условия (1.2), то не было бы нужды в определении постоянной интегрирования, так как функцию  $f_2(\tau)$  при  $\tau \in [0, 2l]$  можно было бы задать непосредственно.

Вопрос может быть решен иным способом. Рассмотрим вспомогательную задачу, отличающуюся от сформулированной тем, что значение  $u(x, \tau)$  при  $x = 0$  предполагается известной функцией времени; обозначим ее через  $v(\tau)$ . Решение такой задачи хорошо известно: оно образуется слагаемыми, зависящими порознь от начальных и краевых данных. Начальные данные порождают в решении слагаемые вида

$$u^{(1)}(x, \tau) = \frac{\Phi(x - \tau) + \Phi(x + \tau)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-\tau}^{x+\tau} \Psi(\xi) d\xi \quad (1.15)$$

Здесь  $\Phi$  и  $\Psi$  — функции, полученные нечетным продолжением соответственно функций  $\varphi$  и  $\psi$  относительно точек  $x = 0$  и  $x = l$ . Вклад членов, зависящих от краевых условий, описывается выражением

$$u^{(2)}(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \{v[\tau - (2nl + x)] - v[\tau - 2(n+1)l + x]\} \quad (1.16)$$

Обозначение  $v(x)$  имеет следующий смысл:

$$v(x) = \begin{cases} V(x) & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (1.17)$$

Ряды в (1.16) содержат поэтому при всяком конечном  $\tau$  конечное число членов. Общее решение представляется суммой (1.16) и (1.17)

$$u(x, \tau) = u^{(1)}(x, \tau) + u^{(2)}(x, \tau) \quad (1.18)$$

Дифференцируя (1.18) по  $x$  и полагая затем  $x = 0$ , получим

$$u_x(0, \tau) = -V'(\tau) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} v'(\tau - 2nl) + \Phi'(\tau) + \Psi(\tau) \quad (1.19)$$

Вспоминая граничное условие (1.3), приходим к нелинейному дифференциально-разностному уравнению

$$V'(\tau) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} v'(\tau - 2nl) + F[V(\tau)] = \Phi'(\tau) + \Psi(\tau) \quad (1.20)$$

которое интегрируется при начальном условии  $V(0) = \varphi(0)$ .

Очевидно, этот способ не основан на представимости по Даламберу общего решения исходного уравнения. Так, для одномерного волнового уравнения

$$u_{xx} - u_{\tau\tau} + c^2 u = 0 \quad (1.21)$$

при условиях (1.2), (1.3) вместо уравнения (1.20) приходим к интегро-дифференциальному уравнению вида

$$V'(\tau) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} v'(\tau - 2nl) - c \int_0^{\tau} V(\tau - \theta) \frac{I_1(c\theta)}{\theta} d\theta - \\ - 2c \sum_{n=1}^{\infty} \int_{2nl}^{\tau} v(\tau - \theta) \frac{I_1(c\sqrt{\theta^2 - 4n^2l^2})}{\sqrt{\theta^2 - 4n^2l^2}} d\theta + F[V(\tau)] = \Phi'(\tau) + \Psi(\tau) \quad (1.22)$$

2. Рассмотрим колебания в системе, состоящей из плоского канала длины  $l$  с запорным клапаном на конце  $x = l$ . Массу клапана обозначим через  $M$ ; пусть клапан удерживается пружиной с нелинейной характеристикой  $F = -Cy + Dy^3 - Fy^5$ . Пружина помещена в среду с сопротивлением, пропорциональным первой степени скорости. В стационарном состоянии вдоль канала протекает жидкость под давлением  $p_0$ , приложенным на конце  $x = 0$ . Гидродинамические величины, относящиеся к стационарному состоянию, будем снабжать индексом 0.

Предполагается, что жидкость слабо сжимаема, а скорость течения ее мала по сравнению со скоростью звука. Рассматриваются малые отклонения от стационарного состояния, вызванные внезапным изменением давления на конце  $x = 0$  канала. Для этих отклонений приняты обозначения  $v$ ,  $p$ ,  $\rho$  (скорость, давление, плотность).

Если ввести безразмерные переменные

$$u = \frac{v - v_0}{v_0}, \quad q = \frac{p - p_0}{p_0} \quad (2.1)$$

то нетрудно получить уравнения

$$u_\tau = -\lambda q_\xi, \quad u_\xi = -\lambda q_\tau \quad (2.2)$$

являющиеся следствием гидродинамических уравнений при условии, что возмущения всех величин малы по сравнению с их стационарными значениями, и в пренебрежении произведениями малых величин по сравнению с линейными по ним слагаемыми; при этом вводятся обозначения

$$\tau = \frac{ct}{l}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \lambda = \frac{p_0}{\rho_0 c v_0} \quad (2.3)$$

$c$  — скорость звука в невозмущенном движении жидкости).

Граничные условия зададим в форме [4]

$$q(0, \tau) = -\frac{1}{\lambda} \psi(\tau) \quad (2.4)$$

Здесь  $\psi$  — заданная функция. При  $x = l$  граничное условие определяется движением клапана. Если  $y$  обозначает смещение клапана (пружины) от положения, в котором пружина свободна, то уравнение движения клапана имеет вид

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} + k \frac{dy}{dt} + Cy - Dy^3 + Fy^5 = \Omega p(l, t) \quad (2.5)$$

Здесь  $\Omega$  — площадь поперечного сечения клапана,  $k$  — коэффициент демпфирования.

Воспользуемся условием равновесия клапана в стационарном состоянии

$$\Omega p_0 = Cy_0 - Dy_0^3 + Fy_0^5$$

и введем безразмерную переменную  $\eta$  и параметры

$$\begin{aligned} \eta = \frac{y - y_0}{y_0}, \quad \sigma^2 = \frac{Mc^2}{l^2} \frac{y_0}{\Omega p_0}, \quad n = k \frac{c}{l} \frac{y_0}{\Omega p_0}, \quad \Omega p_0 \delta_1 = Cy_0 - 3Dy_0^3 + 5Fy_0^5 \\ - \Omega p_0 \delta_2 = 3Dy_0^3 - 10Fy_0^5, \quad - \Omega p_0 \delta_3 = Dy_0^3 - 10Fy_0^5 \\ \Omega p_0 \delta_4 = 5Fy_0^5, \quad \Omega p_0 \delta_5 = Fy_0^5 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Запишем (2.5) в следующем виде (точка обозначает производную по  $\tau$ ):

$$\sigma^2 \ddot{\eta} + n \dot{\eta} + \delta_1 \eta + \delta_2 \eta^2 + \delta_3 \eta^3 + \delta_4 \eta^4 + \delta_5 \eta^5 = q \quad (2.7)$$

Свяжем  $\eta$  с переменными  $u(1, \tau)$  и  $q(1, \tau)$ . Уравнение расхода жидкости через окна клапана таково:

$$\Omega v = \alpha \beta y \sqrt{\frac{2p}{\rho}} \quad (2.8)$$

Здесь  $\alpha$  — коэффициент расхода,  $\beta$  — ширина окон. Уравнение (2.8) перепишем в виде

$$\Omega v_0 (1 + u) = \alpha \beta y_0 (1 + \eta) \sqrt{\frac{2p_0}{\rho_0} \frac{\rho_0}{\rho_0 + \rho} (1 + q)}$$

или, используя стационарную форму уравнения (2.8), а также малость величин  $u$  и  $q$

$$\eta = u(1, \tau) - \mu q(1, \tau) \quad \left( \mu = \frac{1-E}{2}, \quad E = \frac{p_0}{c^2 \rho_0} \right) \quad (2.9)$$

Отметим, что  $\mu > 0$ , так как уравнение состояния имеет вид

$$p_0 = \text{const } \rho_0^\kappa \quad (\kappa > 1) \quad (2.10)$$

Начальные условия зададим для простоты в форме:

для жидкости

$$u(\xi, 0) = 0, \quad q(\xi, 0) = 0 \quad (2.11)$$

для клапана

$$\eta(0) = 0, \quad \dot{\eta}(0) = 0 \quad (2.12)$$

Система уравнений (2.2) удовлетворяется выражениями

$$u = -F(\tau - \xi) + f(\tau + \xi), \quad -\lambda q = F(\tau - \xi) + f(\tau + \xi) \quad (2.13)$$

при произвольных функциях  $F$  и  $f$ ; вид этих функций определяется дополнительными условиями. Как показывает условие (2.4)

$$F(\tau) + f(\tau) = \psi(\tau), \quad \tau > 0 \quad (2.14)$$

Пользуясь этим соотношением, запишем уравнения (2.13) в виде

$$u = -F(\tau - \xi) - F(\tau + \xi) + \psi(\tau + \xi) \quad (2.15)$$

$$-\lambda q = F(\tau - \xi) - F(\tau + \xi) + \psi(\tau + \xi) \quad (2.16)$$

Переменная  $\eta(\tau)$  выразится согласно этим формулам и (2.9) так:

$$\begin{aligned} \eta &= (v-1)F(\tau-1) - (v+1)F(\tau+1) + (v+1)\psi(\tau+1) \equiv \\ &\equiv -\lambda v q(1, \tau) + u(1, \tau) \end{aligned} \quad (2.17)$$

где

$$v = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{1-E}{2\lambda} \quad (2.18)$$

Начальные условия (2.11) вместе с (2.14) позволяют определить функцию  $F(\tau)$  при  $-1 \leq \tau \leq 1$ . Получаем

$$F(\tau) = \begin{cases} 0 & (-1 \leq \tau < 0) \\ \psi(\tau) & (0 < \tau \leq 1) \end{cases} \quad (2.19)$$

Подставляя (2.17) в (2.7), приходим к дифференциально-разностному уравнению второго порядка нейтрального типа относительно функции  $F(\tau)$ . То обстоятельство, что из граничного условия (2.4) и начальных условий (2.11) оказалось возможным определить  $F(\tau)$  на начальном интервале значений  $\tau$ , является решающим для возможности применения используемой здесь методики работ [1-3].

Ограничимся для простоты случаем  $M = 0$ ,  $k = 0$ . Тогда граничное условие на клапане (2.7) примет вид

$$\delta_1 \eta + \delta_2 \eta^2 + \delta_3 \eta^3 + \delta_4 \eta^4 + \delta_5 \eta^5 = q(1, \tau) \quad (2.20)$$

начальные условия (2.12) при этом отбрасываются.

Подставляя выражение (2.17) для  $\eta$  в (2.20) и пользуясь (2.16) для определения функции  $F(\tau)$ , получим функциональное уравнение

$$q = \sum_{s=1}^5 \delta_s [-\lambda v q + u]^s \quad (2.21)$$

Для краткости здесь и ниже пишем  $q$  вместо  $q(1, \tau)$  и аналогично для  $u$ . Введем переменные  $\theta, \xi$  посредством соотношений

$$\theta = -\lambda q \cos \varphi + u \sin \varphi, \quad \xi = -\lambda q \sin \varphi - u \cos \varphi \quad (\text{ctg } \varphi = v) \quad (2.22)$$

Тогда уравнение (2.21) легко привести к виду

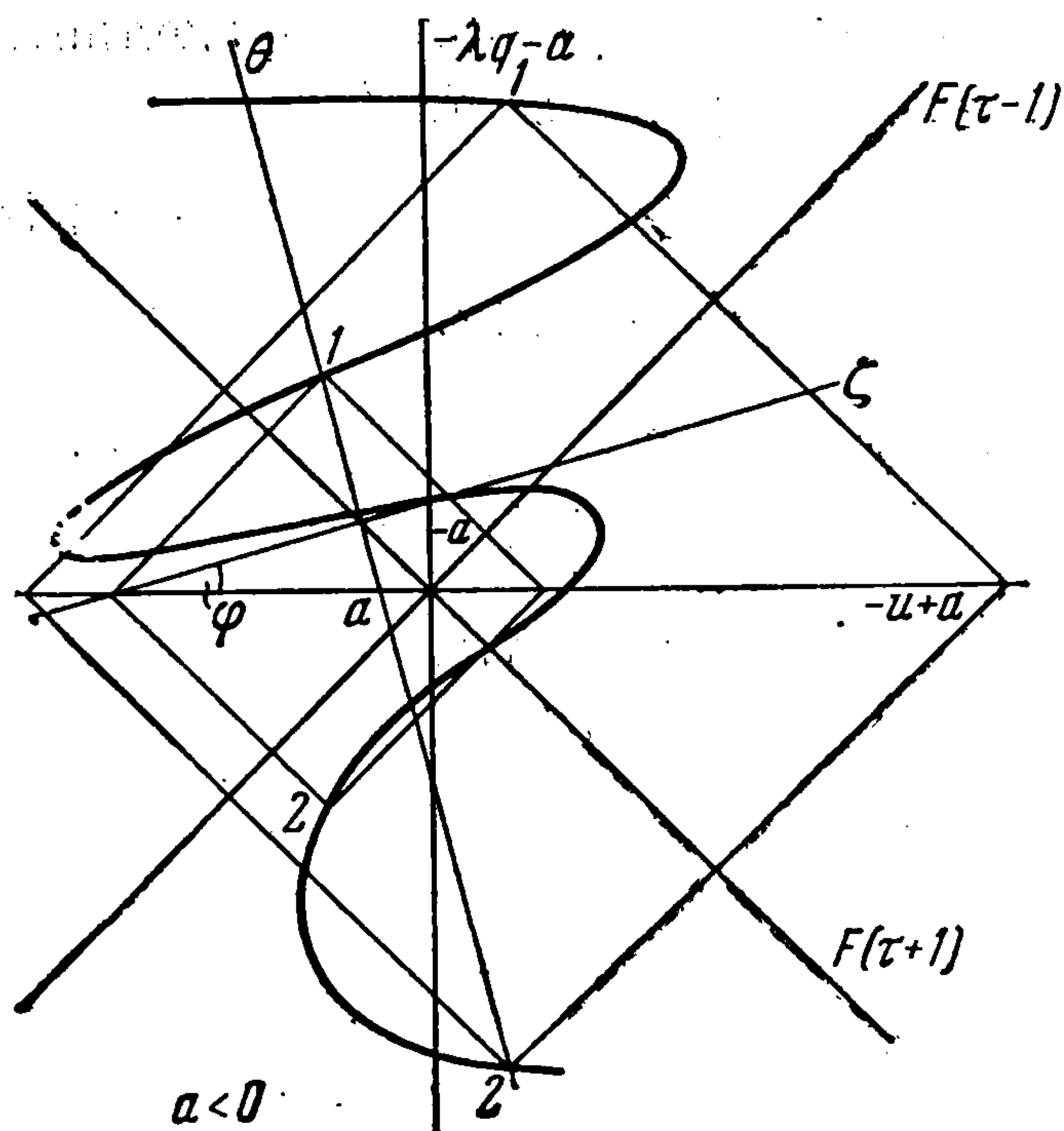
$$\xi = \sum_{s=1}^5 \varepsilon_s \theta^s, \quad \varepsilon_1 = -\lambda v_1^2 \delta_1 - v, \quad \varepsilon_s = -\lambda v_1^{1+s} \delta_s \quad (2.23)$$

$$(v_1 = \sqrt{1 + v^2}, s = 2, 3, 4, 5)$$

Будем считать, что

$$\psi(\tau) = \begin{cases} 0 & (\tau < 0) \\ a = \text{const} & (\tau > 0) \end{cases}$$

Удобно изобразить на одном чертеже координатные оси  $-\lambda q$ ,  $-u$ ,  $F(\tau - 1)$ ,  $F(\tau + 1)$  (фиг. 1). На этой же фигуре изобразим оси  $\xi$  и  $\theta$ .



Фиг. 1

Их ориентация относительно предыдущих осей, очевидно, определяется значением параметра  $v$ . Изобразим график функции (2.23) на фиг. 1. С точки зрения координатной системы  $F(\tau - 1)$ ,  $F(\tau + 1)$  этот график является характеристической кривой функционального уравнения (2.21). Решение этого уравнения можно произвести графическим методом Ламерея [1-3]. Будем отыскивать периодическое решение периода 2. Соответствующая замкнутая ломаная представляет собой квадрат, опирающийся двумя противоположными вершинами на характеристическую кривую, а двумя другими вершинами — на прямую  $F(\tau - 1) = F(\tau + 1)$ .

Для координат вершин квадрата 1 и 2, лежащих на характеристической кривой, должны выполняться соотношения

$$(\theta_1 + \theta_2) \cos \varphi + (\xi_1 + \xi_2) \sin \varphi = a, \quad (\theta_1 - \theta_2) \sin \varphi - (\xi_1 - \xi_2) \cos \varphi = 0 \quad (2.24)$$

Сюда присоединим уравнение (2.23) для точек  $(\xi_1, \theta_1)$  и  $(\xi_2, \theta_2)$

$$\xi_i = \sum_{s=1}^5 \varepsilon_s \theta_i^s \quad (i = 1, 2) \quad (2.25)$$

Уравнения (2.24) — (2.25) образуют систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных  $\zeta_1, \theta_1, \zeta_2, \theta_2$ . Эти уравнения легко решить при малых  $\varphi$ , когда в первом приближении ( $\varphi = 0$ ) имеем

$$\theta_1 = -\theta_2 + a, \quad \zeta_1 = \zeta_2 \quad \text{или} \quad \sum_{s=1}^5 \varepsilon_s \theta_1^s = \sum_{s=1}^5 \varepsilon_s (a - \theta_1)^s \quad (2.26)$$

Отметим сразу корень  $\theta_1 = 1/2 a$ . Он отбрасывается, так как соответствует равенству  $\theta_1 = \theta_2 = 1/2 a$ , т. е. совпадению вершин 1 и 2. Оставшиеся четыре корня, как легко проверить, определяются биквадратным уравнением

$$\varepsilon_5 \theta^4 - \gamma_1 \theta^2 - \gamma_2 = 0 \quad (2.27)$$

Здесь

$$\gamma_1 = -10 \frac{a^2}{2^2} \varepsilon_5 - 2a\varepsilon_4 - \varepsilon_3, \quad \gamma_2 = -5 \frac{a^4}{2^4} \varepsilon_5 - 4 \frac{a^3}{2^3} \varepsilon_4 - 3 \frac{a^2}{2^2} \varepsilon_3 - a\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \quad (2.28)$$

Из (2.27) получаем

$$(\theta^2)_{1,2} = \frac{\gamma_1 \pm \sqrt{\gamma_1^2 + 4\varepsilon_5 \gamma_2}}{2\varepsilon_5}$$

Будем считать для простоты, что порядок малости  $\varepsilon_s$  по сравнению с единицей равен  $s - 1$ ;  $\varepsilon_1$  пусть будет порядка единицы. Тогда для  $\theta^2$  получаем приближенно два значения

$$(\theta^2)_1 = \frac{\gamma_1}{\varepsilon_5} + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \quad (\theta^2)_2 = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$$

Предположение относительно порядков малости постоянных  $\varepsilon_s$  позволяет считать  $\gamma_1 < 0, \gamma_2 > 0$ . Поэтому

$$\theta_{11} = \sqrt{\frac{\gamma_1}{\varepsilon_5} + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}}, \quad \theta_{21} = -\sqrt{\frac{\gamma_1}{\varepsilon_5} + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}} \quad (2.29)$$

$$\theta_{12} = \sqrt{-\frac{\gamma_2}{\gamma_1}}, \quad \theta_{22} = -\sqrt{-\frac{\gamma_2}{\gamma_1}} \quad (2.30)$$

Получим, таким образом, два предельных цикла. Они изображены на фиг. 1. Малость  $\varphi$  связана с большим значением параметра  $\nu$ .

В другом предельном случае малых  $\nu$  ( $\varphi$  близок к  $\pi/2$ ) получаем в первом приближении ( $\varphi = 1/2 \pi$ )

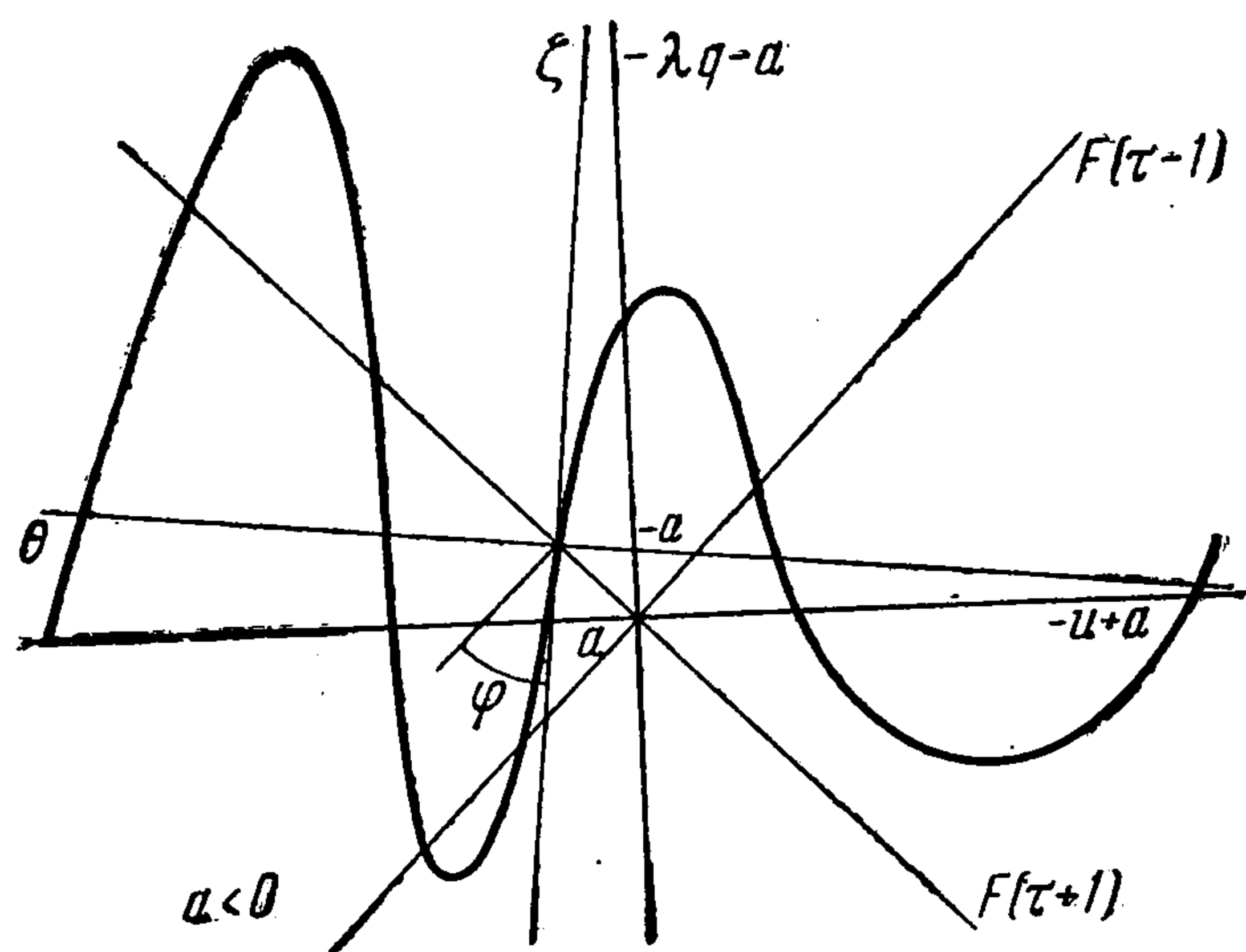
$$\zeta_1 = a - \zeta_2, \quad \theta_1 = \theta_2$$

Уравнения (2.25) показывают, что написанным требованиям удовлетворить нельзя, т. е. при  $\varphi \approx \pi/2$  не существует периодического решения с периодом 2. Это утверждение иллюстрируется фиг. 2, где показана форма характеристической кривой при  $\varphi \approx \pi/2$ .

Параметр  $\nu$  выражается через величины, характеризующие стационарное состояние системы, следующим образом:

$$\nu = \frac{1 - E}{2\lambda} = \frac{1 - \kappa^{-1}}{2c} \kappa v_0 = \frac{\kappa - 1}{2} \frac{v_0}{c} \quad (2.31)$$

Предполагается, что  $v_0 < c$ , поэтому большим значениям  $\nu$  соответствуют достаточно большие значения  $\kappa = c_p / c_s$ .



Фиг. 2

Перейдем к исследованию устойчивости полученных периодических решений. Для этого вычислим отношение  $|dF(\tau-1)/dF(\tau+3)|$  для предельного движения; если окажется, что это отношение больше единицы, то имеет место устойчивость, в противном случае — неустойчивость.

Продифференцируем (2.21) по  $F(\tau+3)$ ; пользуясь формулами (2.15) и (2.16) при  $\xi = 1$ , получаем

$$\left[ \frac{dF(\tau-1)}{dF(\tau+3)} - \frac{dF(\tau+1)}{dF(\tau+3)} \right]_{\text{lim}} = - \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial q} \right)_{\text{lim}} \left[ \frac{dF(\tau-1)}{dF(\tau+3)} - \frac{dF(\tau+1)}{dF(\tau+3)} \right]_{\text{lim}} - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right)_{\text{lim}} \left[ \frac{dF(\tau-1)}{dF(\tau+3)} + \frac{dF(\tau+1)}{dF(\tau+3)} \right]_{\text{lim}} \quad (2.32)$$

Через  $\Phi$  обозначена правая часть (2.21), умноженная на  $(-\lambda)$ , все входящие в (2.32) члены берутся для предельного периодического движения. Производную

$$\left[ \frac{dF(\tau+1)}{dF(\tau+3)} \right]_{\text{lim}}$$

можно исключить из (2.32) при помощи уравнения

$$\left\{ \left[ \frac{dF(\tau+1)}{dF(\tau+3)} \right]_{\text{lim}} - 1 \right\} = - \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial q} \right)_{\text{lim}} \left\{ \left[ \frac{dF(\tau+1)}{dF(\tau+3)} \right]_{\text{lim}} - 1 \right\} - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right)_{\text{lim}} \left\{ \left[ \frac{dF(\tau+1)}{dF(\tau+3)} \right]_{\text{lim}} + 1 \right\} \quad (2.33)$$

вытекающего также из (2.21). Из (2.32) и (2.33) следует

$$\left| \frac{dF(\tau-1)}{dF(\tau+3)} \right|_{\text{lim}} = \frac{(1 + \lambda^{-1} \partial \Phi / \partial q - \partial \Phi / \partial u)_{\text{lim}}^2}{(1 + \lambda^{-1} \partial \Phi / \partial q + \partial \Phi / \partial u)_{\text{lim}}^2} \quad (2.34)$$

Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \Big|_{\text{lim}} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \Big|_{\text{lim}} \frac{\partial \theta}{\partial u} = \sin \varphi \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)_{\text{lim}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial q} \Big|_{\text{lim}} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \Big|_{\text{lim}} \frac{\partial \theta}{\partial q} = -\lambda \cos \varphi \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)_{\text{lim}} \end{aligned}$$

Отсюда

$$\left| \frac{dF(\tau-1)}{dF(\tau+3)} \right|_{\text{lim}} = \frac{[1 - (\partial \Phi / \partial \theta)_{\text{lim}} (\cos \varphi + \sin \varphi)]^2}{[1 - (\partial \Phi / \partial \theta)_{\text{lim}} (\cos \varphi - \sin \varphi)]^2}$$

Для случая малых  $\varphi > 0$  устойчивость по Кенигсу, очевидно, имеет место при  $[\partial \Phi / \partial \theta]_{\text{lim}} < 0$  или

$$\sum_{s=1}^5 s \delta_s v_1^s \theta^{s-1} > 0$$

Полученное условие относительно порядка величины  $\delta_s$  позволяет утверждать, что последнему неравенству можно удовлетворить значениями  $\theta_{11}$  и  $\theta_{21}$  (см. (2.29)). Корни  $\theta_{12}$  и  $\theta_{22}$  дают неравенство обратного смысла. Таким образом, при этих условиях «внешний» (фиг. 1) предельный цикл устойчив, а внутренний неустойчив.

Поступила 13 XII 1961

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А., Ароневич Г. В. К теории гидравлического тарана. Инж. сб., 1954, т. XX.
2. Бовшеверов В. М. О некоторых колебательных задачах, приводящих к функциональным уравнениям. Журн. техн. физ., 1936, т. VI, вып. 9.
3. Витт А. А. К теории скрипичной струны. Журн. техн. физ., 1936, т. VI, вып. 9; 1937, т. VII, вып. 5.
4. Лурье А. И. Операционное исчисление. Гостехиздат, 1950.