

ОБ УДАРЕ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ О ЖЕСТКУЮ ПРЕГРАДУ

Г. И. Баренблатт, А. Ю. Ишлинский

(Москва)

Нестационарные задачи движения вязко-пластических тел уже продолжительное время привлекают внимание исследователей [1-3]. Анализ имеющихся точных и приближенных решений нестационарных задач вязко-пластического течения дан А. Х. Мирзаджанзаде в монографии [4].

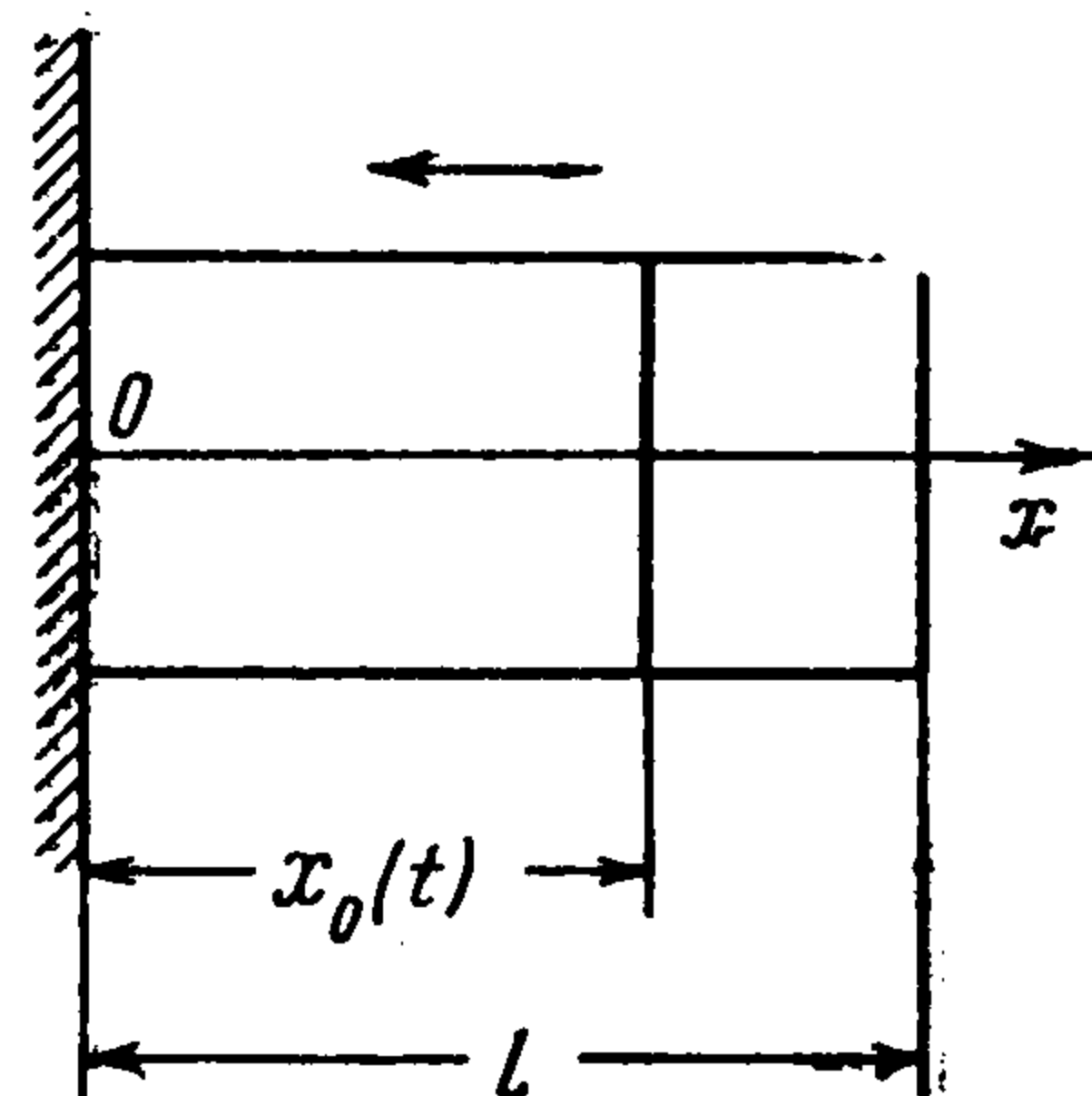
В предлагаемой работе даются постановка и эффективное приближенное решение задачи об ударе о жесткую преграду вязко-пластического стержня конечной длины. Задача об упруго-пластическом ударе стержня о жесткую преграду была рассмотрена В. С. Ленским [5].

§ 1. Постановка задачи. Стержень конечной длины из несжимаемого вязко-пластического материала, двигавшийся поступательно в направлении своей оси со скоростью $-v_0$, в начальный момент $t = 0$ ударяется о жесткую преграду (фиг. 1). Движение стержня будем предполагать квазиодномерным, т. е. напряжения, скорости и т. п. считаются осредненными по сечению стержня. Для данного случая связь среднего по сечению напряжения σ и скорости деформации $\partial v / \partial x$ в вязко-пластической среде имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\sigma + \sigma_0}{\mu} & (|\sigma| \geq \sigma_0) \\ 0 & (|\sigma| \leq \sigma_0) \end{cases} \quad (1.1)$$

где $v(x, t)$ — скорость данного сечения стержня в момент t , $\sigma_0 > 0$ — предельное напряжение, μ — коэффициент вязкости материала стержня, а продольная координата x отсчитывается от преграды вдоль оси стержня в направлении против его движения; ясно, что $\sigma \leq 0$ во всех точках.

Физически очевидно, что картина движения при $t > 0$ имеет следующий вид. Ввиду того, что скорость распространения упругих возмущений в рассматриваемой среде бесконечно велика, так как бесконечно велик модуль Юнга этой среды, возмущение охватывает сразу весь стержень. Поэтому скорость движения при любом $t > 0$ отличается от $-v_0$ во всех точках стержня. Стержень разделяется на две части: в одной части ($0 \leq x \leq x_0(t)$), которую можно назвать *вязко-пластической областью*, напряжения превосходят по модулю σ_0 и имеет место вязко-пластическое течение; в другой части ($x_0(t) \leq x \leq l$), которую естественно назвать *жесткой областью*, напряжения по модулю меньше σ_0 , так что эта часть стержня движется как твердое тело. На подвижной границе вязко-пластической и жесткой областей $x = x_0(t)$, положение которой должно быть определено в ходе решения задачи, напряжения и скорости непрерывны.



Фиг. 1

Основное уравнение движения имеет следующий вид:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (1.2)$$

где ρ — плотность материала стержня, предполагаемая постоянной, t — время; так что в силу (1.1) в вязко-пластической области скорость удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (0 \leq x < x_0(t)) \quad (1.3)$$

а в жесткой области — уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (x_0(t) \leq x \leq l) \quad (1.4)$$

Интегрируя уравнение (1.4), получаем

$$v = -v_0(t) \quad (x_0(t) \leq x \leq l) \quad (1.5)$$

где $-v_0(t)$ — скорость движения жесткой области стержня, — пока неопределенная функция времени. Уравнение движения жесткой области

$$M \frac{dv_0(t)}{dt} \equiv \rho F_0 [l - x_0(t)] \frac{dv_0(t)}{dt} = \sigma [x_0(t) + 0, t] F_0 \quad (1.6)$$

где M — масса жесткой части стержня, F_0 — площадь сечения стержня.

Ввиду непрерывности напряжения на подвижной границе $x = x_0(t)$ соотношение (1.6) приводится к виду

$$\frac{dv_0(t)}{dt} = -\frac{\sigma_0}{\rho [l - x_0(t)]} \quad (1.7)$$

Далее, в силу непрерывности напряжений и скоростей на подвижной границе $x = x_0(t)$, имеем

$$v [x_0(t), t] = -v_0(t), \quad \frac{\partial}{\partial x} v [x_0(t), t] = 0 \quad (1.8)$$

Имеют место также граничное и начальное условия

$$v(0, t) = 0 \quad (t > 0), \quad v(x, 0) = -v_0 \quad (0 < x \leq l); \quad v_0(0) = v_0, \quad x_0(0) = 0 \quad (1.9)$$

Таким образом, задача привелась к определению функций $v(x, t)$, $v_0(t)$ и $x_0(t)$, удовлетворяющих (1.3), (1.7), (1.8) и (1.9).

§ 2. Система основных уравнений в безразмерной форме. Исследование удара вязко-пластического стержня о жесткую преграду свелось к задаче с подвижной границей для уравнения теплопроводности, не приводящейся к традиционным краевым задачам математической физики.

Для удобства перейдем к безразмерным переменным

$$u(\xi, \tau) = -\frac{v(x, t)}{v_0}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \xi_0(\tau) = \frac{x_0(t)}{l}, \quad \tau = \frac{a^2 t}{l^2}, \quad u_0(\tau) = \frac{v_0(t)}{v_0} \quad (2.1)$$

получаем из (1.3), (1.7) — (1.9) систему соотношений для определения неизвестных функций $u(\xi, \tau)$, $\xi_0(\tau)$, $u_0(\tau)$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \quad (0 \leq \xi \leq \xi_0(\tau)) \quad (2.2)$$

$$\frac{du_0(\tau)}{d\tau} = -\frac{s}{1 - \xi_0(\tau)} \quad (2.3)$$

$$u[\xi_0(\tau), \tau] = u_0(\tau), \quad \frac{\partial}{\partial \xi} u[\xi_0(\tau), \tau] = 0, \quad u(0, \tau) = 0 \quad (\tau > 0) \quad (2.4)$$

$$u(\xi, 0) = 1 \quad (0 < \xi \leq 1), \quad u_0(0) = 1, \quad \xi_0(0) = 0 \quad (2.5)$$

Здесь $s = \sigma_0 l / \mu v_0$ — параметр Сен-Венана, — безразмерная комбинация определяющих параметров, характеризующая движение.

§ 3. Приближенное решение. Для приближенного решения системы (2.2) — (2.4) воспользуемся идеей метода Кармана — Польгаузена теории пограничного слоя [6]; именно, представим функцию $u(\xi, \tau)$ приближенно в виде¹

$$u(\xi, \tau) = \begin{cases} 2u_0(\tau) \frac{\xi}{\xi_0(\tau)} - u_0(\tau) \frac{\xi^2}{\xi_0^2(\tau)} & (0 \leq \xi \leq \xi_0(\tau)) \\ u_0(\tau) & (\xi_0(\tau) \leq \xi \leq 1) \end{cases} \quad (3.1)$$

Если функции $u_0(\tau)$ и $\xi_0(\tau)$ удовлетворяют двум последним условиям (2.4), то функция (3.1) удовлетворяет всем условиям (2.4). Естественно, что функция (3.1) не удовлетворяет уравнению (2.2) точно; потребуем, чтобы она удовлетворяла этому уравнению в среднем, т. е. удовлетворяла интегральному соотношению, которое получается интегрированием уравнения (2.2) по всей вязко-пластической области ($0 \leq \xi \leq \xi_0(\tau)$). Интегрируя по частям и используя (2.4), имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi_0(\tau)} \frac{\partial u}{\partial \tau} d\xi &= \frac{d}{d\tau} \int_0^{\xi_0(\tau)} u d\xi - u[\xi_0(\tau), \tau] \frac{d\xi_0}{d\tau} = \\ &= \frac{d}{d\tau} \int_0^{\xi_0(\tau)} u(\xi, \tau) d\xi - u_0(\tau) \frac{d\xi_0}{d\tau} = \int_0^{\xi_0(\tau)} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} d\xi = - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \end{aligned}$$

Окончательно получаем искомое интегральное соотношение в виде

$$\frac{d}{d\tau} \int_0^{\xi_0(\tau)} u(\xi, \tau) d\xi - u_0(\tau) \frac{d\xi_0}{d\tau} = - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \quad (3.2)$$

В силу (3.1) имеем

$$\int_0^{\xi_0(\tau)} u(\xi, \tau) d\xi = \frac{2}{3} u_0(\tau) \xi_0(\tau), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} = \frac{2u_0(\tau)}{\xi_0(\tau)} \quad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в (3.2) и используя (2.3), получаем

$$\frac{d\xi_0}{d\tau} = \frac{6}{\xi_0(\tau)} - \frac{2s\xi_0(\tau)}{[1 - \xi_0(\tau)]u_0(\tau)} \quad (3.4)$$

Из системы уравнений (3.4) и (2.3), используя условия (2.5), можно определить функции $u_0(\tau)$ и $\xi_0(\tau)$ и получить приближенное решение рассматриваемой задачи. Удобно ввести новые зависимые переменные

$$p = \frac{u_0(\tau)}{s}, \quad q = \xi_0^2(\tau) \quad (3.5)$$

Тогда система (3.4), (2.3) примет вид

$$\frac{dq}{d\tau} = 12 - \frac{4q}{p(1 - \sqrt{q})}, \quad \frac{dp}{d\tau} = - \frac{1}{1 - \sqrt{q}} \quad (3.6)$$

Эта система не содержит параметра Сен-Венана s . Начальные условия соответственно будут

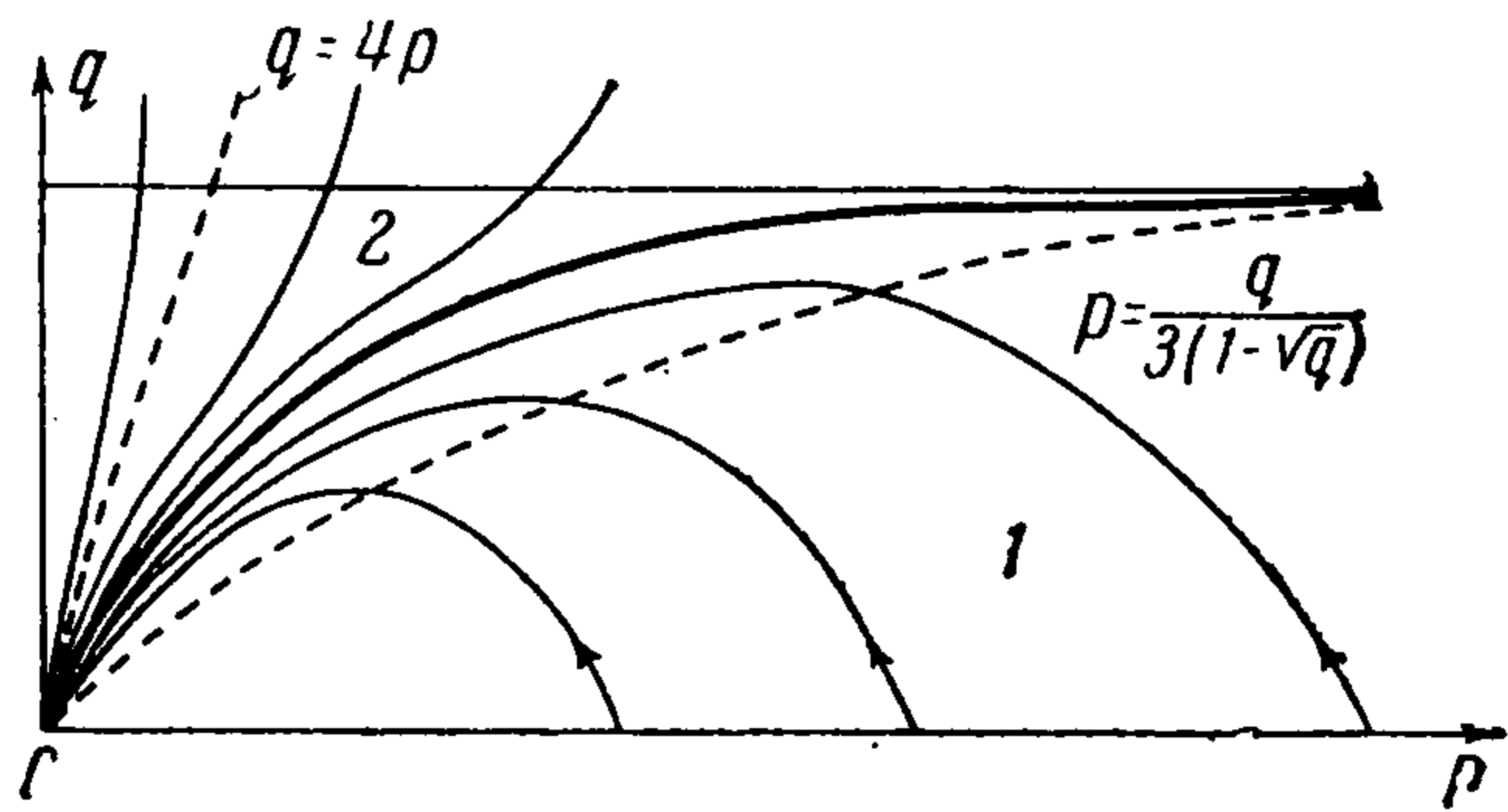
$$p(0) = \frac{1}{s}, \quad q(0) = 0 \quad (3.7)$$

Из первого уравнения (3.6) делением на второе получаем

$$\frac{dq}{dp} = -12(1 - \sqrt{q}) + \frac{4q}{p} \quad (3.8)$$

¹ Это приближенное представление совпадает с тем, которое получается при применении метода осреднения Слезкина — Тарга [7].

Качественное исследование этого уравнения проводится элементарно. Для области ($p \geq 0, 0 \leq q \leq 1$), представляющей интерес для рассматриваемой задачи, интегральные кривые представлены на фиг. 2: в начале координат имеется особая точка типа узла; интегральные кривые вы-

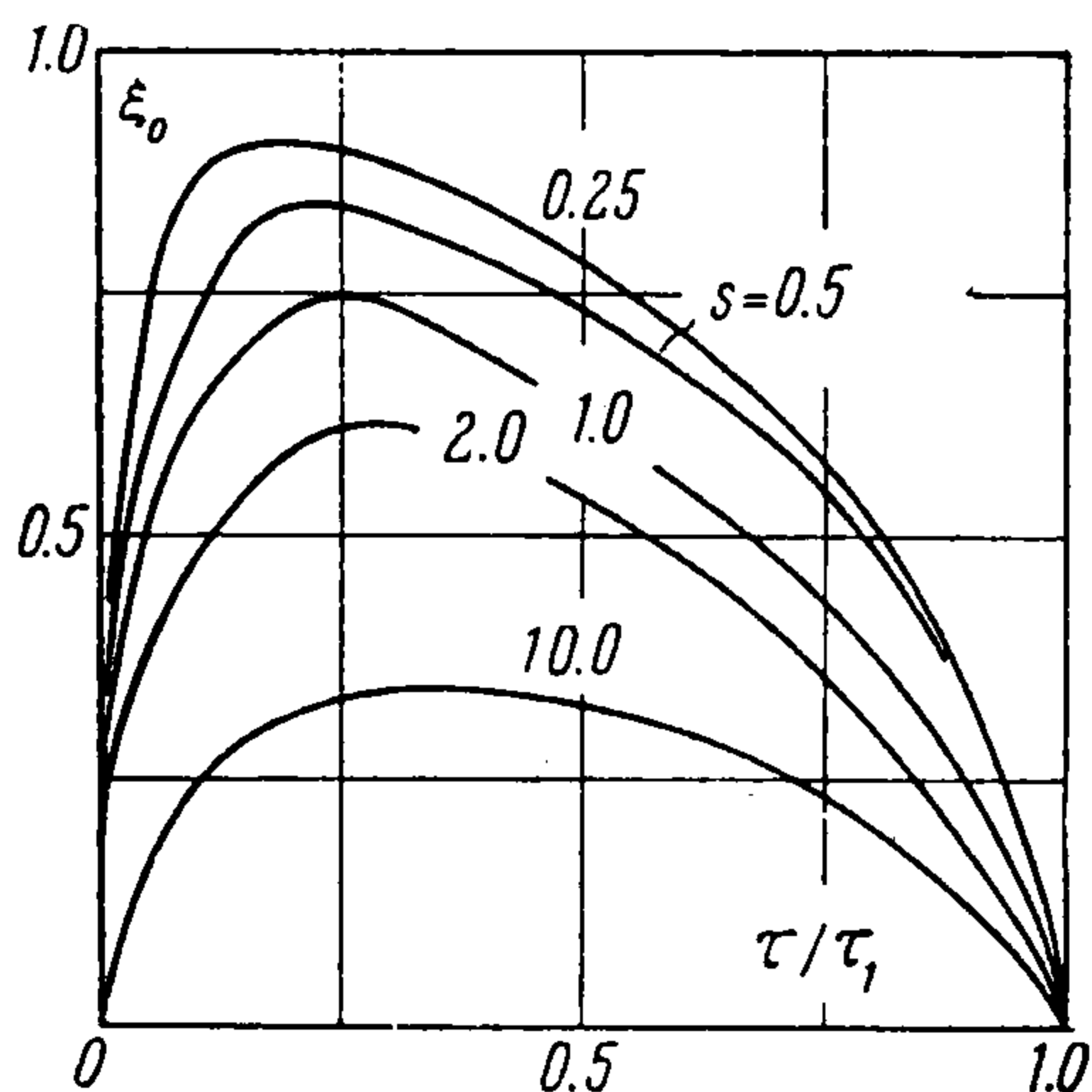


Фиг. 2

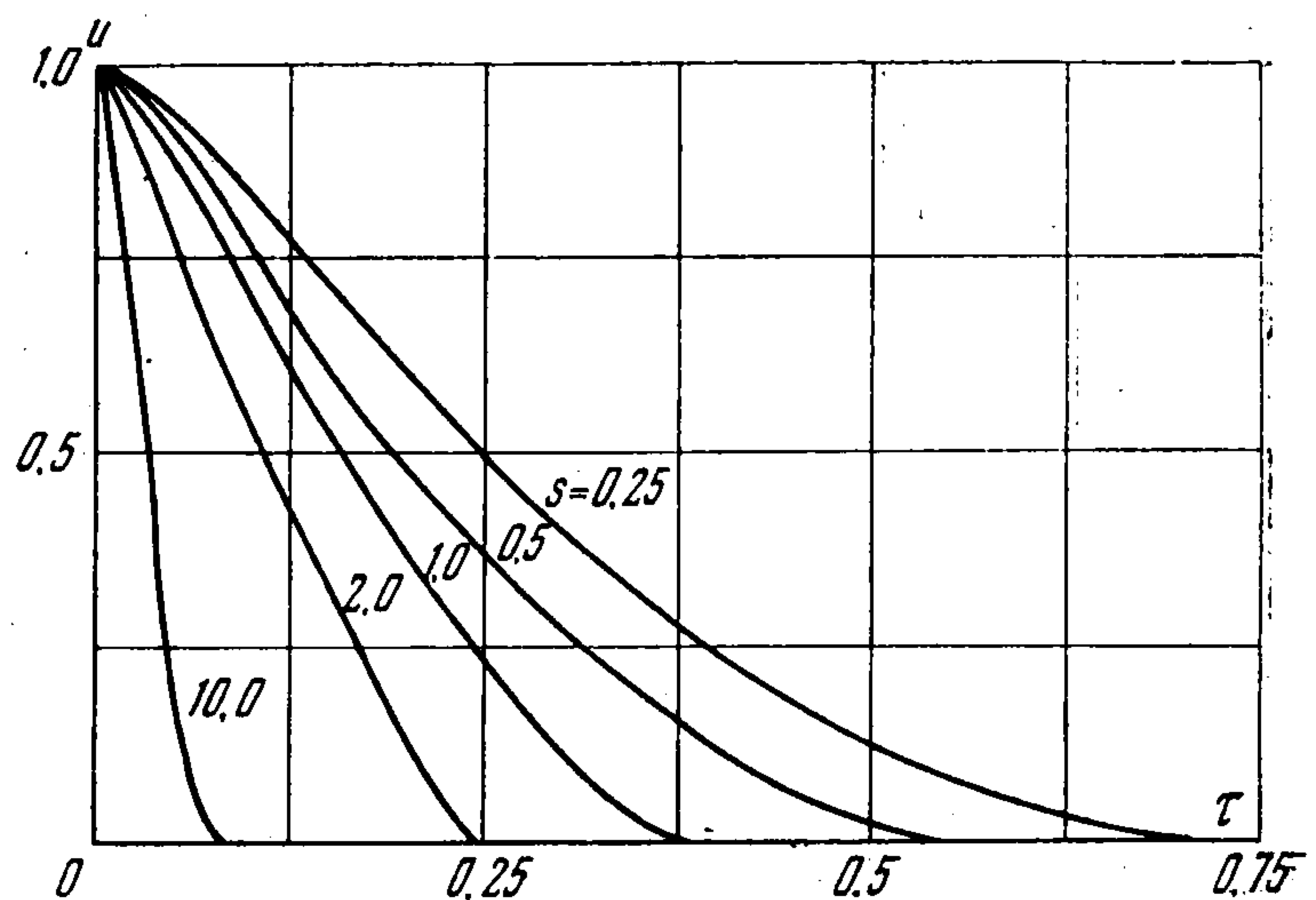
ходят из начала, касаясь прямой $q = 4p$; вблизи начала координат интегральные кривые удовлетворяют соотношению

$$q = 4p + O(p^4) \quad (3.9)$$

Сепаратриса разделяет интегральные кривые, выходящие из начала, на два класса. Кривые класса 1 характеризуются возрастанием ординаты q до некоторого максимума, меньшего единицы, располагающегося на кривой $p = q / 3(1 - \sqrt{q})$, далее они поворачивают к оси абсцисс и пересекают ее в некоторой конечной точке под одинаковым углом. У интегральных кривых класса 2 ордината непрерывно возрастает, так что кривые этого класса пересекают линию $q = 1$ и в область ($p > 0, 0 \leq q \leq 1$) не возвращаются. Таким образом, кривые этого класса не пересекают оси p в точках с конечной положительной абсциссой. В силу начальных условий (3.7) рассматриваемой задаче соответствуют интегральные кривые класса 1; направление движения изображающей точки по интегральной кривой при возрастании времени показано на фиг. 2 стрелками.



Фиг. 3



Фиг. 4

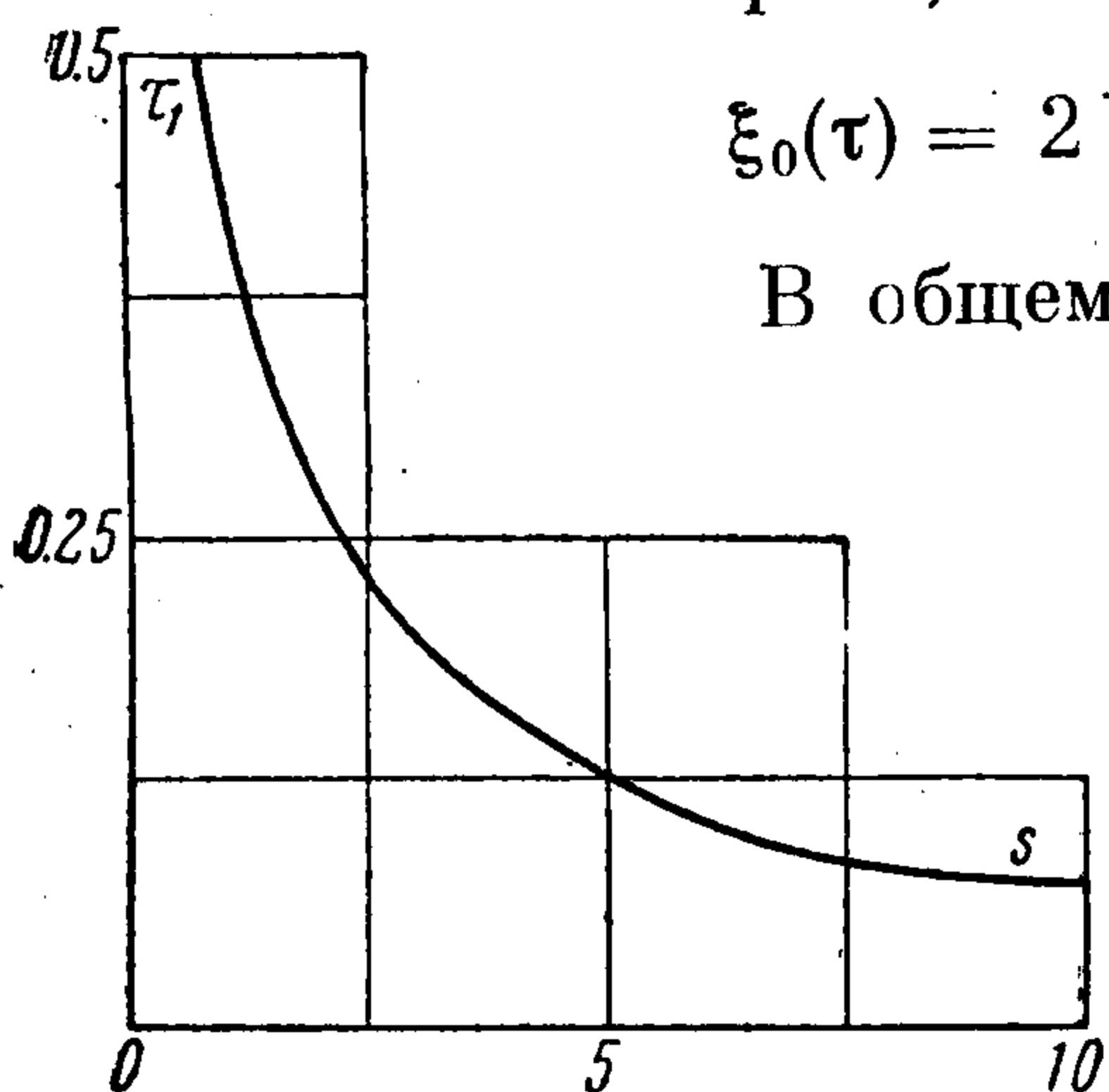
§ 4. Приближенное представление решения для больших значений параметра Сен-Венана. Форма стержня после удара. Проведенное исследование позволяет сделать следующие качественные выводы. Вязко-пластическая область в начале движения расширяется, ее размер $\xi_0(\tau) = \sqrt{q(\tau)}$ возрастает до достижения некоторого максимума при $\tau = \tau_0(s)$ (фиг. 3), после чего начинает убывать. В некоторый момент $\tau = \tau_1(s)$ вязко-пластическая область исчезает; этот же момент соответствует обращению в нуль скорости $u_0(\tau)$ жесткой области стержня (фиг. 4), так что движение стержня полностью прекращается. Таким образом, во всех случаях определенная часть стержня, примыкающая к свободной границе, остается недеформированной.

При малых τ асимптотические представления основных характеристик движения имеют вид

$$\xi_0(\tau) = \sqrt{12\tau} + o(\sqrt{\tau}), \quad u_0(\tau) = 1 - s\tau \quad (4.1)$$

При τ , близких к τ_1 , характеристики движения

$$\xi_0(\tau) = 2\sqrt{\tau_1 - \tau} + o(\sqrt{\tau_1 - \tau}), \quad u_0(\tau) = s(\tau_1 - \tau) \quad (4.2)$$



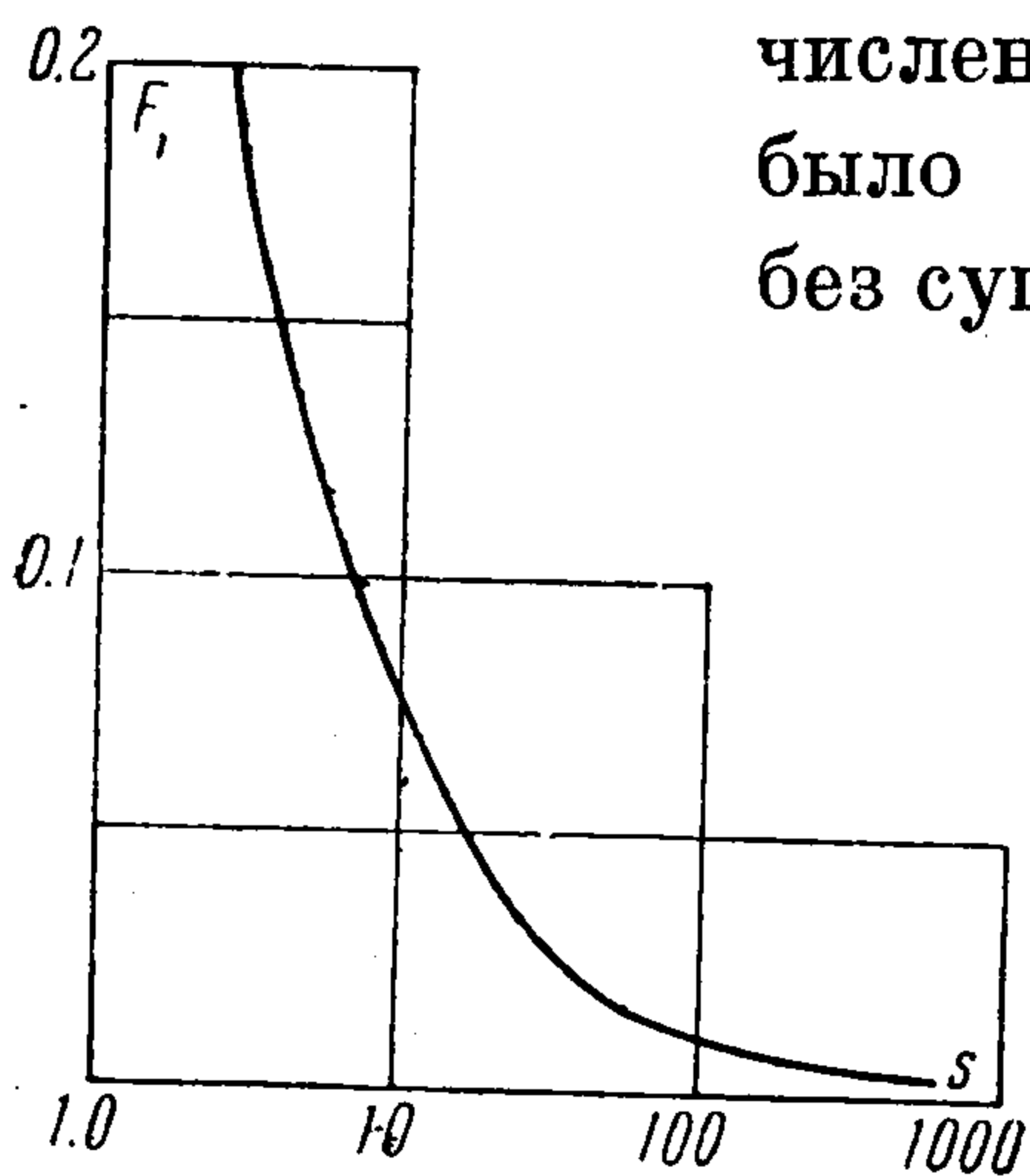
Фиг. 5

В общем случае система (3.6) требует для своего решения численного интегрирования; результаты интегрирования для нескольких значений параметра Сен-Венана представлены на фиг. 3—5. Для случая очень больших s решение можно выписать в явном виде. В самом деле, в этом случае во все время движения q мало, так что можно пренебречь \sqrt{q} сравнительно с единицей в правых частях уравнений

системы (3.6). После этого решение системы (3.6), удовлетворяющее условиям (3.7), немедленно получается в явном виде

$$q = 4 \left\{ \left(\frac{1}{s} - \tau \right) - s^3 \left(\frac{1}{s} - \tau \right)^4 \right\}, \quad p = \frac{1}{s} - \tau, \quad \tau_1 = \frac{1}{s} \quad (4.3)$$

Для того, чтобы решение (4.3) было применимо, надо чтобы $1 - \sqrt{q}$ отличалось от единицы не более чем, например, на 0.1. Простое вы-



Фиг. 6

числение показывает, что для этого нужно, чтобы s было более 200. Этот способ расчета можно уточнить без существенного усложнения. Заменим в правых частях уравнений (3.6) множитель $(1 - \sqrt{q})^{-1}$ на α и будем считать α пока неопределенной постоянной. Легко видеть, что при этом решение уравнений (3.6), удовлетворяющее условиям (3.7), запишется в виде

$$q = 4 \left\{ (\beta - \tau) - \frac{1}{\beta^3} (\beta - \tau)^4 \right\}, \quad p = \beta - \tau$$

$$\tau_1 = \beta, \quad \beta = \frac{1}{\alpha s} \quad (4.4)$$

Теперь необходимо установить связь α с параметром s , или, что то же самое, установить зависимость $\beta = F(s)$. Если функция $F(s)$ известна, то формулы (4.4) определяют приближенное решение, причем наиболее интересные параметры — максимальная величина вязко-пластической области ξ_0^* и полное время движения τ_1 — определяются так:

$$\xi_0^* = \frac{1.37}{\sqrt{\alpha s}} = 1.37 \sqrt{F(s)}, \quad \tau_1 = \frac{1}{\alpha s} = F(s) \quad (4.5)$$

Можно взять α равной среднему значению $(1 - \sqrt{q})^{-1}$ на всем интервале движения. При этом функция $\beta = F_1(s)$ определяется неявно

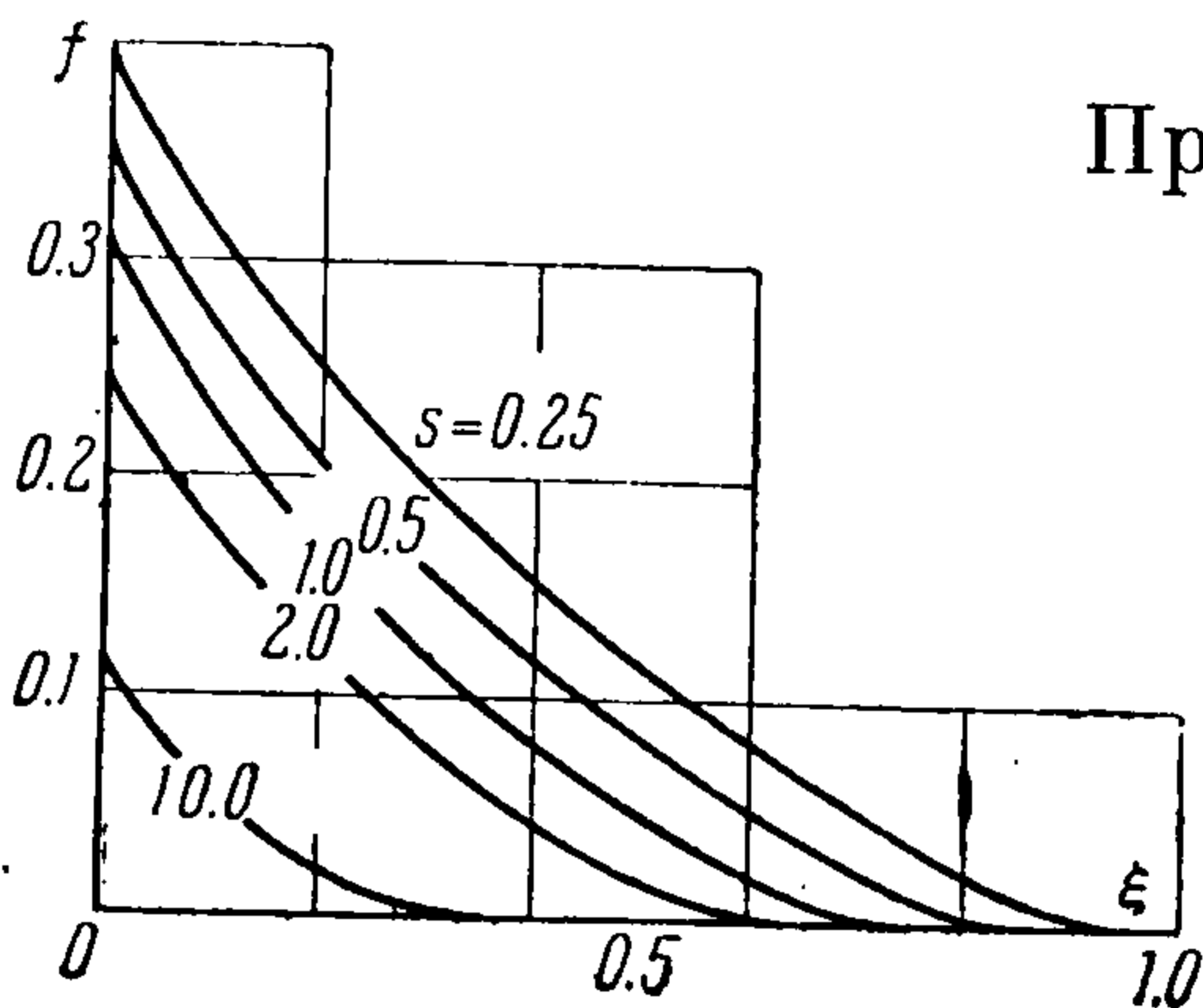
$$\alpha = \frac{1}{\beta s} = \int_0^1 \frac{dy}{1 - \sqrt{4\beta(y - y^4)}}, \quad \frac{1}{s} = \beta \int_0^1 \frac{dy}{1 - \sqrt{4\beta(y - y^4)}} \quad (4.6)$$

График зависимости $\beta = F_1(s)$ представлен на фиг. 6. Для получения явного аналитического представления решения с достаточной точностью можно взять константу α равной $[1 - (\overline{Vq})]^{-1}$, где (\overline{Vq}) означает среднее значение $V\bar{q}$ за все время движения. В силу (4.4) имеем

$$\begin{aligned} 1 - (\overline{Vq}) &= 1 - \frac{2}{\beta} \int_0^{\beta} \sqrt{(\beta - \tau) - \beta^{-3}(\beta - \tau)^4} d\tau = \\ &= 1 - \frac{2\Gamma(3/2)\Gamma(1/2)}{3\Gamma(2)} V\bar{\beta} \approx 1 - 1.05 V\bar{\beta} = \frac{1}{\alpha} = s\beta \end{aligned}$$

Отсюда функция $\beta = F_2(s)$ определяется в конечном виде

$$\beta = F_2(s) = \frac{[\sqrt{4s + 1.05^2} - 1.05]^2}{4s^2} \quad (4.7)$$



Фиг. 7

Приближенные формулы дают удовлетворительную точность уже при $s > 2$.

Определим теперь форму стержня после удара. Из условия несжимаемости материала стержня имеем

$$F = F_0 \left(1 + \frac{\partial U}{\partial x}\right)^{-1} \quad (4.8)$$

где $F = F(x)$ — площадь сечения деформированного стержня, U — мгновенное

продольное смещение, F_0 — площадь сечения недеформированного стержня. В момент окончания удара $t = t_1$ имеем для произвольного сечения x

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \int_0^{t_1} \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} dt = \int_{t_*(x)}^{t_{**}(x)} \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} dt = -r \int_{\tau_*(\xi)}^{\tau_{**}(\xi)} \frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \xi} d\tau \quad (4.9)$$

$(t_{**}(x) \geq t_*(x))$

Здесь $t_*(x)$ и $t_{**}(x)$ — корни уравнения $x = x_0(t)$, а $\tau_*(\xi)$ и $\tau_{**}(\xi)$ — соответствующие безразмерные величины, $r = \rho v_0 l / \mu$ — параметр Рейнольдса. В силу (3.1) и (4.9) находим

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -2r \int_{\tau_*(\xi)}^{\tau_{**}(\xi)} \frac{u_0(\tau) [\xi_0(\tau) - \xi] d\tau}{\xi_0^2(\tau)} = -\frac{F - F_0}{F} = -2rf(\xi) \quad (4.10)$$

На фиг. 7 построен для различных значений параметра Сен-Венана s график $f(\xi)$, характеризующий изменение формы стержня после удара.

Поступила 15 II 1962

Институт механики
Московского государственного университета

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Одномерные нестационарные движения вязко-пластической среды. ПММ, 1949, т. XIII, вып. 6.
2. Зверев И. Н. Распространение возмущений в вязко-упругом и вязко-пластическом стержне. ПММ, 1950, т. XIV, вып. 3.
3. Кочетков А. М. Приближенное решение некоторых задач нестационарного движения вязко-пластической среды. ПММ, 1950, т. XIV, вып. 4.
4. Мирзаянзаде А. Х. Вопросы гидродинамики вязко-пластических и вязких жидкостей в нефтедобыче. Баку, Азнефтеиздат, 1959.
5. Ленский В. С. Об упруго-пластическом ударе стержня о жесткую преграду. ПММ, 1949, т. XIII, вып. 2.
6. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, Т. II, ГИТТЛ, М.—Л., 1948.
7. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. ГИТТЛ, М.—Л., 1955.