Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

К ВАРИАЦИОННЫМ МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК В СЛУЧАЕ КОНЕЧНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

И. Г. Терегулов

(Казань)

Вводится вариационный принцип возможных скоростей (принцип стационарности полной мощности) при конечных перемещениях и малых по сравнению с единицей удлинениях в предположении, что имеет место состояние установившейся ползучести. Этот принцип представляет собой обобщение соответствующего утверждения, доказанного в геометрически линейной постановке [1]. В порядке иллюстрации использования сформулированного принципа рассмотрена задача об изгибе круглой тонкой пластины в условиях установившейся ползучести.

Во всех выкладках не проводится различия между интегралами по деформированным и недеформированным объемам и поверхностям от величин, которые не зависят от ориентации этих объемов и поверхностей. Это сопряжено с погрешностью не более порядка деформации по сравнению с единицей. Аналогичным образом не будем различать метрики деформированного и недеформированного состояний при выполнении операций дифференцирования.

1. Обозначим через δN мощность внешних поверхностных нагрузок $\mathbf{P}$ и массовых сил $\mathbf{Q}$ на допустимых геометрическими связями вариациях скоростей $\delta\mathbf{v}$

$$\delta N = \iint\limits_S \mathbf{P}\cdot\delta\mathbf{v}\,dS + \iiint\limits_V \mathbf{Q}\cdot\delta\mathbf{v}\,dV \tag{1.1}$$

Здесь S — граница объема V, занятого телом. В этом объеме введем параметризацию x^i $(i = 1, 2, 3)$ с координатными векторами $\mathbf{r}_i = \partial\mathbf{r}/\partial x^i$ и с метрическим тензором $g_{ik} = \mathbf{r}_i\cdot\mathbf{r}_k$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точек тела до деформации.

Пусть $\mathbf{r}^*$ — радиус-вектор точек тела после деформации. Тогда $\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \mathbf{u}$, где $\mathbf{u}$ — вектор перемещения. Отметим, что латинские индексы тензорного характера принимают значения 1, 2, 3, а греческие — значения 1 и 2.

Обозначим мощность внутренних напряжений σ^{ik} на вариациях скоростей деформации ползучести $\delta\xi_{ik}$ через δM

$$\delta M = \iiint\limits_V \sigma^{ik}\,\delta\xi_{ik}\,dV \tag{1.2}$$

Имеет место утверждение: среди всех допустимых геометрическими связями скоростей в теле на самом деле имеют место те, которые удовлетворяют условию

$$\delta J = 0, \qquad J = M - N \tag{1.3}$$

Так как для деформаций имеем

$$2\varepsilon_{ik} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} \cdot \mathbf{r}_k + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k} \cdot \mathbf{r}_i + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k} \tag{1.4}$$

то для скоростей деформаций получим

$$2\xi_{ik} = 2\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^i} \cdot \mathbf{r}_k + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^k} \cdot \mathbf{r}_i + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^k} \tag{1.5}$$

где $\mathbf{v} = \partial \mathbf{u} / \partial t$ — вектор скорости точек тела, t — время. В силу принятого допущения геометрические связи удовлетворены и соотношения (1.4) и (1.5) имеют место. Опираясь на них, покажем, что из вариационного уравнения (1.3) вытекают уравнения равновесия (движения) и естественные статические краевые условия и, наоборот, из удовлетворения уравнениям равновесия и статическим краевым условиям при соблюдении геометрических связей следует (1.3). Из этого будет следовать справедливость нашего утверждения.

После подстановки $\delta\xi_{ik}$ по (1.5) в вариационное уравнение (1.3) с учетом (1.1) и (1.2) и (к варьированию допускаются лишь скорости)

$$2\delta\xi_{ik} = \left(\mathbf{r}_i + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i}\right) \cdot \delta\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^k} + \left(\mathbf{r}_k + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k}\right) \cdot \delta\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^i} = \mathbf{r}_i^* \cdot \delta\mathbf{v}_k + \mathbf{r}_k^* \cdot \delta\mathbf{v}_i \tag{1.6}$$

получим
$$\delta J = \iiint\limits_V \sigma^{ik}\mathbf{r}_k^* \cdot \delta\mathbf{v}_i dV - \iiint\limits_V \mathbf{Q} \cdot \delta\mathbf{v} dV - \iint\limits_S \mathbf{P} \cdot \delta\mathbf{v} dS \tag{1.7}$$

Здесь $\mathbf{v}_i = \partial \mathbf{v} / \partial x^i$, σ^{ik} — контравариантные составляющие тензора напряжений. В результате применения к первому члену правой части соотношения (1.7) формулы Остроградского — Гаусса получим

$$\iiint\limits_V \sigma^{ik}\mathbf{r}^* \cdot \delta\mathbf{v}_i dV = -\iiint\limits_V (\nabla_i \sigma^{ik}\mathbf{r}_k^*) \cdot \delta\mathbf{v}\, dV - \iint\limits_S \sigma^{ik} n_i \mathbf{r}_k^* \cdot \delta\mathbf{v}\, dS \tag{1.8}$$

где $\nabla_i(\ldots)$ — знак ковариантной производной по метрике g_{ik}, n_i — ковариантные составляющие орта внутренней нормали к поверхности S. Теперь δJ примет вид

$$\delta J = -\iiint\limits_V \{\nabla_i (\sigma^{ik}\mathbf{r}_k^*) + \mathbf{Q}\} \cdot \delta\mathbf{v}\, dV - \iint\limits_S (\sigma^{ik}\mathbf{r}_k^* n_i + \mathbf{P}) \cdot \delta\mathbf{v} dS \tag{1.9}$$

Из последнего соотношения следует, что при выполнении всех статических условий без нарушения геометрических и кинематических связей имеем $\delta J = 0$. Наоборот, из $\delta J = 0$ следуют уравнения равновесия (движения) и естественные статические краевые условия.

При дополнительных ограничениях, наложенных на напряженно-деформированное состояние, естественно, более сильный результат был получен в работе [2].

Если воспользоваться степенным законом установившейся ползучести [1], то вариационное уравнение (1.3) примет вид

$$\delta\iiint\limits_V \frac{H^{\mu+1}}{(1+\mu)B^{\mu}} dV - \delta\iiint\limits_V \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}\, dV - \delta\iint\limits_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} dS = 0 \tag{1.10}$$

Здесь B — функция времени и температуры, определяемая экспериментально, μ — постоянная, H — интенсивность скоростей деформации сдвига, выражение для которой имеет вид

$$H^2 = 2\xi_{ik}\xi^{ik} \qquad (\text{предполагается } \xi_{ik}g^{ik} = 0) \tag{1.11}$$

при этом зависимость между напряжениями и скоростями деформации дается соотношениями

$$\sigma^{ik} - \sigma g^{ik} = \frac{1}{(1+\mu)\,B^{\mu}} \frac{\partial H^{\mu+1}}{\partial \xi_{ik}}, \qquad 3\sigma = \sigma^{ik}g_{ik} \tag{1.12}$$

Можно показать, что $\delta^2 J \geqslant 0$ при законе (1.12) (см. [1], стр. 109).

2. При построении вариационного уравнения для тонких пластин и оболочек (однослойных) будем исходить из обычных допущений о малости нормальной составляющей напряжения на площадках, параллельных срединной поверхности S_0, по сравнению с нормальными составляющими напряжения на площадках, перпендикулярных к срединной поверхности, и об отсутствии сдвигов ε_{13} и ε_{23}. Здесь $x^3 = z$ — координата, отсчитываемая по нормали к срединной поверхности, x^1, x^2 — криволинейные координаты на поверхности S_0.

Представим вектор перемещения точек оболочки в виде

$$\mathbf{u} = (u_\alpha - z\nabla_\alpha w)\,\boldsymbol{\rho}^\alpha + w\mathbf{m} \tag{2.1}$$

где $\boldsymbol{\rho}_\alpha$ — координатные векторы на поверхности S_0 в параметризации x^α $(\alpha = 1, 2)$, $\mathbf{m}$ — орт нормали к поверхности S_0, определяемый из соотношения

$$\mathbf{m}c_{\alpha\beta} = \boldsymbol{\rho}_\alpha \times \boldsymbol{\rho}_\beta \tag{2.2}$$

$$c_{12} = -c_{21} = \sqrt{a}, \qquad c_{11} = c_{22} = 0, \;\; a = \det(a_{\alpha\beta}),\; a_{\alpha\beta} = \boldsymbol{\rho}_\alpha \cdot \boldsymbol{\rho}_\beta$$

Смысл величин u_α и w ясен из формы записи вектора перемещения (2.1). Исходя из формул (1.5), получим

$$\xi_{\alpha\beta} \approx \xi_{\alpha\beta}{}^0 - z(\nabla_\alpha\dot{\omega}_\beta + \nabla_\beta\dot{\omega}_\alpha), \qquad 2\overset{0}{\xi}_{\alpha\beta} \approx \nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha - 2b_{\alpha\beta}v + \dot{\omega}_\alpha\omega_\beta + \omega_\alpha\dot{\omega}_\beta \tag{2.3}$$

$$\dot{\omega}_\alpha = \frac{\partial\omega_\alpha}{\partial t}, \quad v^\beta = \frac{\partial u_\beta}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad b_{\alpha\beta} = -\boldsymbol{\rho}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x^\beta}, \quad \omega_\alpha = \nabla_\alpha w + b_\alpha^\beta v_\beta$$

Здесь выражения для $\xi_{\alpha\beta}$ упрощены с погрешностью не более порядка деформации и не более h/R по сравнению с единицей, где $2h$ — толщина пластины или оболочки, R — меньший из радиусов кривизны срединной поверхности, $\nabla_\alpha(\ldots)$ — знак ковариантной производной по метрике $a_{\alpha\beta}$.

На основе допущения $\sigma^{33} \ll \sigma^{\alpha\alpha}\sqrt{\alpha_{\alpha\alpha}}\sqrt{\alpha_{\alpha\alpha}}$ из физических соотношений (1.12) получим

$$\sigma^{\alpha\beta} - \sigma_* a^{\alpha\beta} = \frac{2}{B^\mu} H^{\mu-1}\xi^{\alpha\beta}, \quad 3\sigma_* = \sigma^{\alpha\beta}a_{\alpha\beta}, \quad \sigma^{\alpha\beta} = \frac{2}{B^\mu} H^{\mu-1}(\xi^{\alpha\beta} + a^{\beta\alpha}\xi_{\rho\gamma}a^{\rho\gamma}) \tag{2.4}$$

соотношение

$$\sigma^{33} - g^{33}\sigma = \frac{2}{B^\mu} H^{\mu-1}\xi_{33}$$

в пределах принятой точности удовлетворяется тождественно на основе условия $\xi_{ik}g^{ik} = 0$. Последнее условие выражает собой несжимаемость материала в состоянии ползучести и имеет место с большой точностью.

Опираясь на условие $\xi_{ik}g^{ik} = 0$, для интенсивности скоростей деформаций сдвига с учетом $\xi_{13} = \xi_{23} = 0$ получим

$$H_*^2 = 2\left(\xi_{\alpha\beta}\xi^{\alpha\beta} + a_{\rho\gamma}\xi^{\rho\gamma}a_{\alpha\beta}\xi^{\alpha\beta}\right) \qquad \sigma^{\alpha\beta} = \frac{1}{(1+\mu)B^{\mu}}\frac{\partial H_*^{\mu+1}}{\partial \xi_{\alpha\beta}} \tag{2.5}$$

Таким образом, для тонких оболочек получим вариационное уравнение принципа стационарности полной мощности при установившейся ползучести в форме

$$\delta\iint_{S_0}\int_{-h}^{h}\frac{H_*^{\mu+1}}{(1+\mu)B^{\mu}}dzdS_0 - \delta\iint_{S_+}\mathbf{P}_+\{(v_\alpha - h\nabla_\alpha v)\rho^\alpha + v\mathbf{m}\}\,dS \tag{2.6}$$

$$\delta\iint_{S_-}\mathbf{P}_-\{(v_\alpha + h\nabla_\alpha v)\rho^\alpha + v\mathbf{m}\}\,dS_0 - \delta\int_C\int_{-h}^{h}\mathbf{P}_c\{(v_\alpha - z\nabla_\alpha v)\rho^\alpha + v\mathbf{m}\}\,dz\,dC = 0$$

Здесь $2h = \mathrm{const}$ — толщина оболочки, S_+ и S_- — поверхности $z = h$ и $z = -h$ соответственно, $\mathbf{P}_+$ и $\mathbf{P}_-$ — нагрузки на поверхностях S_+ и S_-; граница поверхности S_0 обозначена через C, а через $\mathbf{P}_c$ обозначен вектор внешних нагрузок, приложенных к граничному срезу оболочки $C\,(-h \leqslant z \leqslant h)$. Массовыми силами пренебрегли.

3. Пусть круглая пластина радиуса r испытывает действие поперечной нагрузки интенсивности q и деформируется симметрично. В рассматриваемом случае

$$a_{11} = r^2, \qquad a_{22} = r^2\eta^2 \qquad (0 \leqslant \eta \leqslant 1)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\eta, \qquad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{\eta}, \qquad b_{\alpha\beta} = 0, \quad \xi_{12} = 0 \tag{3.1}$$

$$a^{11}\xi_{11} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_1}{\partial\eta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\eta}\frac{\partial w}{\partial\eta} - z\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}, \qquad a^{22}\xi_{22} = \frac{1}{r}\frac{v_1}{\eta} - z\frac{1}{r^2}\frac{1}{\eta}\frac{\partial v}{\partial\eta}$$

Здесь $\Gamma_{\alpha\beta}^{\omega}$ — символы Кристоффеля на базе метрики $a_{\alpha\beta}$. Будем считать, что пластина жестко заделана по своему контуру (вырезов нет) и по линии $\eta = 1$ имеют место условия $w = 0$, $u_1 = 0$, $\partial w/\partial\eta = 0$.

В качестве функций, аппроксимирующих искомое решение, выберем функции перемещений, являющиеся решением соответствующей геометрически нелинейной задачи теории упругости (см., например, [3])

$$w = w_0(1-\eta^2)^2, \qquad v = \frac{w_0^2}{r}\left(\frac{7}{12}\eta - \frac{5}{2}\eta^3 + 3\eta^5 - \frac{13}{12}\eta^7\right) \tag{3.2}$$

Для ξ_{11} и ξ_{22} по формулам (3.1) получим

$$\begin{aligned}\xi_{11}a^{11} &= \frac{w_0\dot{w}_0}{r^2}\left\{\frac{7}{6} + \eta^2 - 2\eta^4 + \frac{5}{6}\eta^6\right\} + \frac{z\dot{w}_0}{r^2}4(1-3\eta^2)\\ \xi_{22}a^{22} &= \frac{w_0\dot{w}_0}{r^2}\left\{\frac{7}{6} - 5\eta^2 + 6\eta^4 - \frac{13}{6}\eta^6\right\} + \frac{z\dot{w}_0}{r^2}4(1-\eta^2)\end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь и далее точка сверху означает производную по времени. Вариационное уравнение (2.6) в рассматриваемом случае примет вид

$$\delta\iint_{S_0}\int_{-h}^{h}\frac{B^{-\mu}}{\mu+1}H_*^{\mu+1}dzdS_0 - \delta\iint_{S_0}q\dot{w}dS_0 = 0 \tag{3.4}$$

где

$$H_*^2 = 4\{(a_{11}\xi^{11})^2 + (a_{22}\xi^{22})^2 + a_{11}a_{22}\xi^{11}\xi^{22}\}$$

Для определения величины $\dot{w}_0$ получим уравнение

$$\frac{\dot{\alpha}}{q_*^{\ m}} = \left\{\int_0^1 \eta d\eta \int_{-1}^{1} [\zeta_{11}^2 + \zeta_{22}^2 + \zeta_{11}\zeta_{22}]^{\frac{m+1}{2m}}\right\}^{-m} \tag{3.5}$$

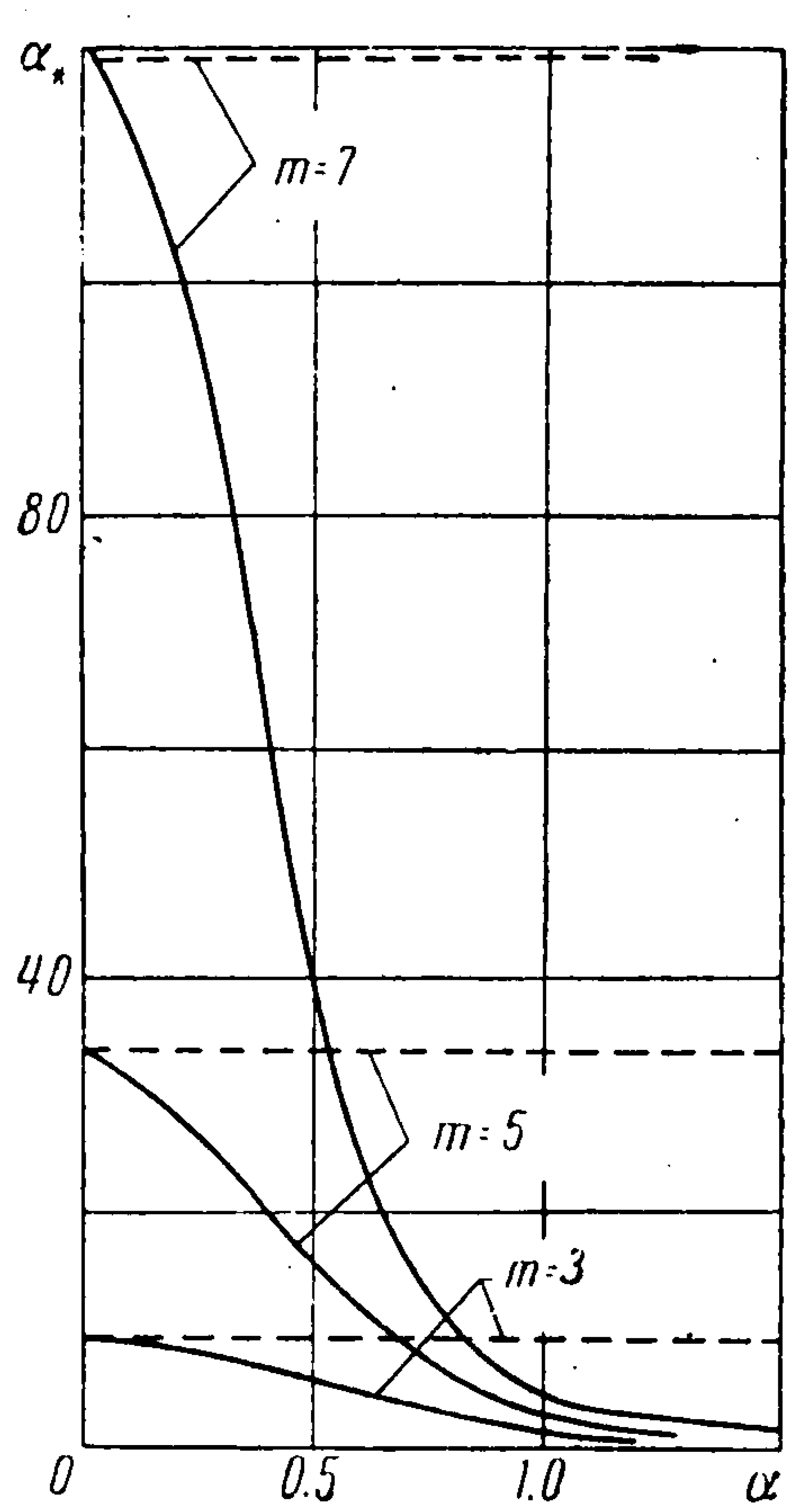
где

$$\zeta_{11} = \alpha\left(\frac{7}{6} + \eta^2 - 2\eta^4 + \frac{5}{6}\eta^6\right) + 2\zeta(1 - 3\eta^2) = \zeta_{11}a^{11}\frac{r^2}{2h\dot{w}_0}$$

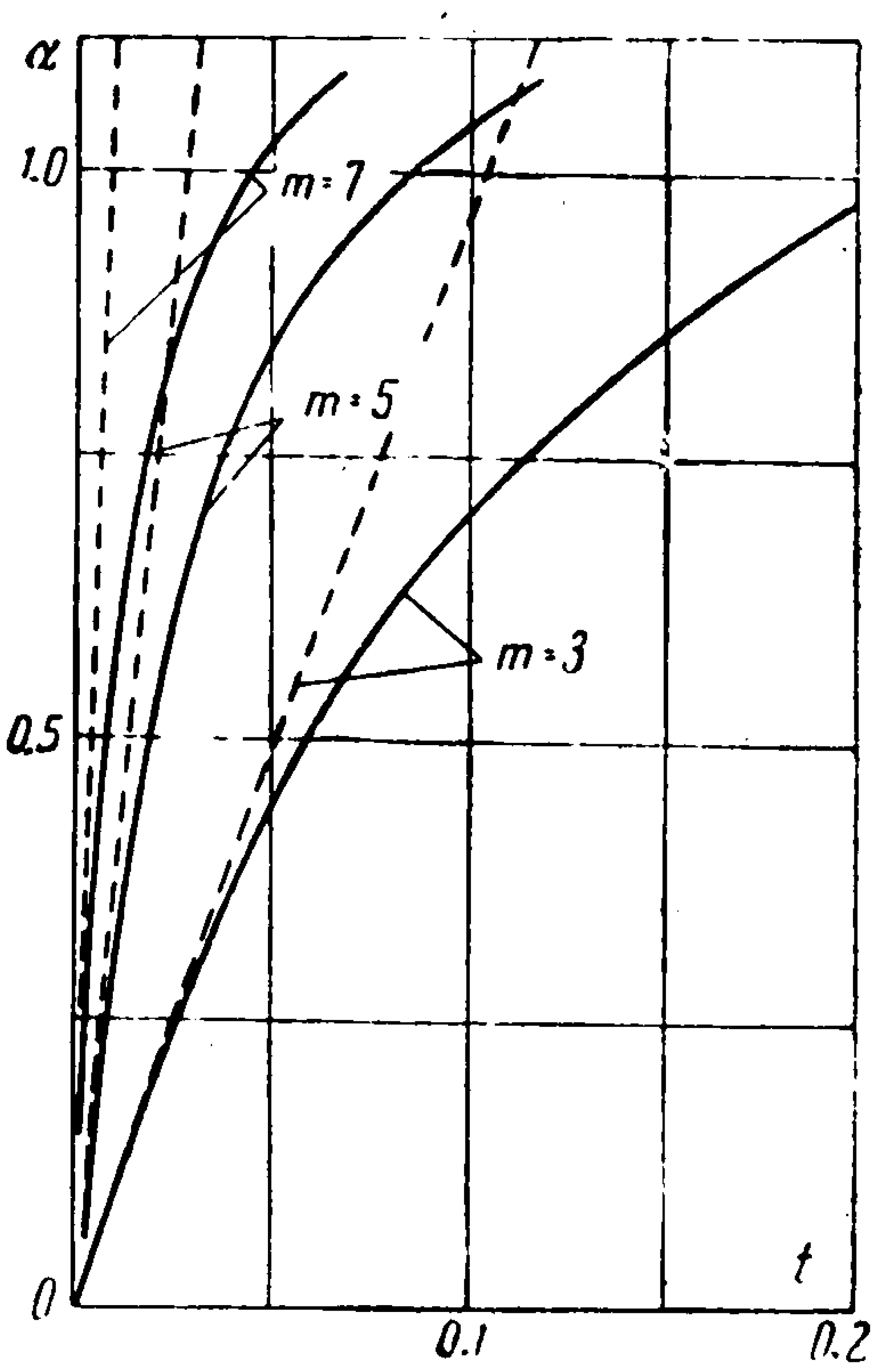
$$\zeta_{22} = \alpha\left(\frac{7}{6} - 5\eta^2 + 6\eta^4 - \frac{13}{6}\eta^6\right) + 2\zeta(1 - \eta^2) = \zeta_{22}a^{22}\frac{r^2}{2h\dot{w}_0}$$

$$q_* = q_3\frac{B^{\mu}}{3(8h^2/r^2)^{\mu+1}}, \qquad m = \frac{1}{\mu}, \qquad \zeta = \frac{z}{h}, \qquad \alpha = \frac{w_0}{2h}$$

По формуле (3.5) на фиг. 1 построена зависимость $\dot{\alpha}_* = 2^{m+1}\dot{\alpha} / q_*^{\ m}$ от величин α и m, а на фиг. 2 — зависимость α от $t_* = tq_*^m / 2^{m+1}$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Пунктирными линиями на фигурах нанесены результаты по линейной теории, а сплошной — по нелинейной.

Как видно из графиков, расхождение между результатами линейной и нелинейной теории столь значительны, что не считаться с ними невозможно. Полученное вариационное уравнение (2.6) дает возможность решить не только задачи изгиба, но и задачи устойчивости в состоянии установившейся ползучести.

Поступила 11 XII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Теория ползучести. Физматгиз, М., 1960.
2. Hill R., New horisons in the mechanics of solids, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1956, 5, № 1, 66—74, November. (Сб. пер. Механика, 1957, № 4.)
3. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. Гостехиздат, 1956.