Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ВДАВЛИВАНИЕ ЖЕСТКИХ ШТАМПОВ В ПОЛУПРОСТРАНСТВО ПРИ СТЕПЕННОМ УПРОЧНЕНИИ И ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ МАТЕРИАЛА

А. И. Кузнецов
(Ленинград)

В работах Н. Х. Арутюняна [1,2] рассмотрена плоская контактная задача в случае степенного упрочнения материала и в случае материала, обладающего нелинейной ползучестью наследственного типа. В предлагаемой статье на основе идей работ [1,2] рассматривается пространственная контактная задача при аналогичных предположениях о свойствах материала.

§ 1. Сосредоточенная сила, приложенная к границе полупространства при степенном упрочнении материала. Пусть нормально к границе полупространства $z \geqslant 0$ приложена сосредоточенная сила P.

Введем сферическую систему координат (фигура). Ввиду осевой симметрии задачи

$$u_\varphi = 0, \qquad \varepsilon_{R\varphi} = \varepsilon_{\theta\varphi} = 0, \qquad \tau_{R\varphi} = \tau_{\theta\varphi} = 0$$

а отличные от нуля перемещения u_R, u_θ, деформации ε_R, ε_θ, $\varepsilon_{R\theta}$, ε_φ и напряжения σ_R, σ_θ, $\tau_{R\theta}$, σ_φ не зависят от φ.

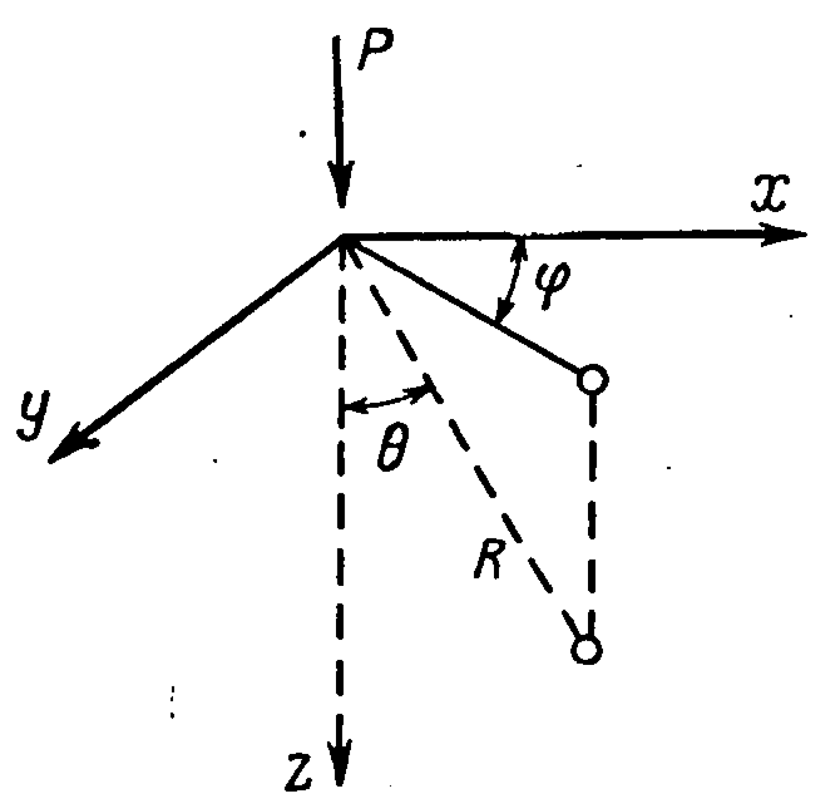
Будем предполагать материал несжимаемым

$$\varepsilon_R + \varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi = 0 \tag{1.1}$$

а упрочнение — степенным (1.2)

$$\sigma_{ij}' = A\Gamma^{\mu-1}\varepsilon_{ij}, \qquad \left(\Gamma^2 = \frac{2}{3}\left[(\varepsilon_R - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_\varphi)^2 + (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_R)^2\right] + 4\varepsilon_{R\theta}^2\right)$$

Здесь Γ — интенсивность деформаций сдвига; σ_{ij}' — девиатор напряжений, A и μ — постоянные материала, причем $0 < \mu \leqslant 1$.



Напряжения должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_R}{\partial R} + \frac{1}{R}\frac{\partial \tau_{R\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_R - \sigma_\theta - \sigma_\varphi}{R} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{R}\tau_{R\theta} = 0 \tag{1.3}$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{R\theta}}{\partial R} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{R}(\sigma_\theta - \sigma_\varphi) + \frac{3}{R}\tau_{R\theta} = 0 \tag{1.4}$$

Напряжения должны удовлетворять также граничным условиям

$$\tau_{R\theta} = 0, \quad \sigma_\theta = 0 \quad \text{при } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ и } R \neq 0 \tag{1.5}$$

и условию статической эквивалентности силе P

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} (\sigma_R\cos\theta - \tau_{R\theta}\sin\theta)\, R^2 \sin\theta\, d\theta + P = 0 \tag{1.6}$$

Деформации должны удовлетворять условиям совместности [3]

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2\varepsilon_\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{2\operatorname{ctg}\theta}{R}\frac{\partial\varepsilon_\varphi}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial R}(\varepsilon_\theta+\varepsilon_\varphi)-\frac{\operatorname{ctg}\theta}{R}\frac{\partial\varepsilon_\theta}{\partial\theta}+\frac{2}{R}(\varepsilon_\theta-\varepsilon_R)-$$
$$-\frac{2}{R}\left(\frac{\partial\varepsilon_{R\theta}}{\partial\theta}+\varepsilon_{R\theta}\operatorname{ctg}\theta\right)=0$$
$$\frac{\partial^2(\varepsilon_\varphi R)}{\partial R^2}-\frac{\partial\varepsilon_R}{\partial R}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{R}\frac{\partial\varepsilon_R}{\partial\theta}-\frac{2\operatorname{ctg}\theta}{R}\frac{\partial(\varepsilon_{R\theta}R)}{\partial R}=0$$
$$\frac{\partial^2(\varepsilon_\theta R)}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2\varepsilon_R}{\partial\theta^2}-\frac{\partial\varepsilon_R}{\partial R}-\frac{2}{R}\frac{\partial^2(\varepsilon_{R\theta}R)}{\partial R\partial\theta}=0 \tag{1.7}$$
$$\frac{1}{R}\frac{\partial\varepsilon_R}{\partial\theta}-\frac{\partial^2\varepsilon_\varphi}{\partial R\partial\theta}-\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial\varepsilon_\varphi}{\partial R}+\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial\varepsilon_\theta}{\partial R}-\frac{2}{R}\varepsilon_{R\theta}=0$$

Связь деформаций с перемещениями определяется формулами

$$\varepsilon_R=\frac{\partial u_R}{\partial R},\qquad \varepsilon_\theta=\frac{1}{R}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_R}{R},\qquad \varepsilon_\varphi=\frac{u_\theta\operatorname{ctg}\theta}{R}+\frac{u_R}{R} \tag{1.8}$$
$$2\varepsilon_{R\theta}=\frac{\partial u_\theta}{\partial R}-\frac{u_\theta}{R}+\frac{1}{R}\frac{\partial u_R}{\partial\theta}$$

Отметим частные случаи решения задачи. При $\mu=1$ (упругий несжимаемый материал) [3]

$$\sigma_R=\frac{3}{2}\frac{P}{\pi}\frac{\cos\theta}{R^2},\qquad \sigma_\theta=\tau_{R\theta}=\sigma_\varphi=0 \tag{1.9}$$
$$\varepsilon_R=-\frac{P}{2\pi G}\frac{\cos\theta}{R^2},\qquad \varepsilon_\theta=\varepsilon_\varphi=-\frac{1}{2}\varepsilon_R,\qquad \varepsilon_{R\theta}=0$$
$$u_R=\frac{P}{2\pi G}\frac{\cos\theta}{R},\qquad u_\theta=-\frac{P}{4\pi G}\frac{\sin\theta}{R}$$

где G — модуль сдвига. При $\mu=2/3$ решение имеет вид [4]

$$\sigma_R=-\frac{P}{\pi}\frac{1}{R^2},\qquad \sigma_\theta=\tau_{R\theta}=\sigma_\varphi=0$$
$$\varepsilon_R=-3^{0.75}\,2\sqrt{2}\left(\frac{P}{\pi A}\right)^{1.5}\frac{1}{R^3},\qquad \varepsilon_\theta=\varepsilon_\varphi=-\frac{1}{2}\varepsilon_R,\qquad \varepsilon_{R\theta}=0 \tag{1.10}$$
$$u_R=3^{0.75}\sqrt{2}\left(\frac{P}{\pi A}\right)^{1.5}\frac{1}{R^2},\qquad u_\theta=0$$

Нетрудно убедиться, что решение задачи в форме

$$\sigma_R=\frac{F(\theta)}{R^2},\qquad \sigma_\theta=\tau_{R\theta}=\sigma_\varphi=0$$

существует лишь при этих значениях μ.

Как следует из условия (1.6), напряжения σ_R и $\tau_{R\theta}$ при $R=0$ имеют особенность $1/R^2$. Однако о поведении напряжений σ_θ и σ_φ при $R=0$ условие (1.6) никаких сведений не дает.

Сделаем следующее предположение. Допустим, что переменные R и θ в выражениях напряжений разделяются. В пользу этого предположения говорит однородность каждой из групп уравнений (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) и (1.7), которым необходимо удовлетворить. Наконец, сделанное предположение, очевидно, выполняется при $\mu=1$ и при $\mu=2/3$. Тогда из условия (1.6) и дифференциальных уравнений равновесия следует, что напряжения имеют вид

$$\sigma_{ij}=F_{ij}(\theta)\,R^{-2} \tag{1.11}$$

При этом в силу уравнений (1.2)

$$\varepsilon_{ij}=e_{ij}(\theta)\,R^{-2m},\qquad m=\frac{1}{\mu} \tag{1.12}$$

Возьмем перемещения в форме

$$u_R = \xi(\theta) R^{-2m+1}, \qquad u_\theta = \eta(\theta) R^{-2m+1} \tag{1.13}$$

Условие несжимаемости (1.1) позволяет выразить $\xi(\theta)$ через $\eta(\theta)$

$$\xi(\theta) = \operatorname{ctg}\theta\zeta(\theta) + \zeta'(\theta), \qquad \zeta(\theta) \equiv \frac{\eta(\theta)}{2m-3} \tag{1.14}$$

Далее будем рассматривать случай $\mu \neq 2/3$. (При $\mu = 2/3$ решение дается формулами (1.10).) Перемещениям (1.13) — (1.14) соответствуют «деформации» $e_{ij}(\theta)$, равные

$$\begin{gathered} e_R = (-2m+1)(\operatorname{ctg}\theta\zeta + \zeta'), \qquad e_\theta = \operatorname{ctg}\theta\zeta + 2(m-1)\zeta' \\ e_\varphi = 2(m-1)\operatorname{ctg}\theta\zeta + \zeta' \\ 2e_{R\theta} = -[2m(2m-3) + 1 + \operatorname{ctg}^2\theta]\zeta + \operatorname{ctg}\theta\zeta' + \zeta \end{gathered} \tag{1.15}$$

Покажем, что выражения деформаций (1.12) при $e_{ij}(\theta)$, определяемых (1.15) (а следовательно, и выражения перемещений (1.13) — (1.14)), будут общими выражениями при предположении о разделяемости переменных и при условии несжимаемости. Для этого внесем (1.12) в условия (1.7). Исключая e_R при помощи условия несжимаемости, получим

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv e_\varphi'' + 2\operatorname{ctg}\theta e_\varphi' - \operatorname{ctg}\theta e_\theta' - 2e_{R\theta}' - 2(m-1)e_\varphi - 2(m-2)e_\theta - \\ &\qquad - 2\operatorname{ctg}\theta e_{R\theta} = 0 \\ X_2 &\equiv \operatorname{ctg}\theta(e_\varphi' + e_\theta') - 4m(m-1)e_\varphi + 2me_\theta - 2(2m-1)\operatorname{ctg}\theta e_{R\theta} = 0 \\ X_3 &\equiv e_\varphi'' + e_\theta'' - 2(2m-1)e_{R\theta}' + 2me_\varphi - 4m(m-1)e = 0 \\ X_4 &\equiv (2m-1)e_\varphi' - e_\theta' + 2m\operatorname{ctg}\theta(e_\varphi - e_\theta) - 2e_{R\theta} = 0 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Система (1.16) эквивалентна системе

$$\begin{aligned} Y_1 &\equiv -X_1 + X_4\operatorname{ctg}\theta + X_4' = 0, \qquad Y_3 \equiv -X_2 + (2m-1)X_4\operatorname{ctg}\theta = 0 \\ Y_2 &\equiv -X_3 + (2m-1)X_4' = 0, \qquad X_4 = 0 \end{aligned}$$

Можно проверить, что выполняются тождества

$$2mY_1 \equiv Y_2 + Y_3, \qquad 2m(Y_2 - Y_3) \equiv (Y_3\operatorname{tg}\theta)'$$

Поэтому система уравнений $Y_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ эквивалентна уравнению $Y_3 = 0$. Следовательно, система (1.16) эквивалентна уравнениям $Y_3 = 0$ и $X_4 = 0$. В развернутом виде уравнение $Y_3 = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} 2(m-1)\operatorname{ctg}\theta e_\varphi' + [2(m-1) + (2m-1)\operatorname{ctg}^2\theta]e_\varphi - \operatorname{ctg}\theta e_\theta' - \\ - [1 + (2m-1)\operatorname{ctg}^2\theta]e_\theta = 0 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Интегрируя (1.17) и используя уравнение $X_4 = 0$, найдем

$$\begin{aligned} e_\theta &= C\cos\theta\sin^{-2m+1}\theta + 2(m-1)e_\varphi - (2m-1)(2m-3)\cos\theta\sin^{-2m+1}\theta \times \\ &\qquad \times \int_0^\theta e_\varphi \sin^{2m-2}\theta d\theta \\ 2e_{R\theta} &= -C\cos 2\theta\sin^{-2m}\theta + e_\varphi' - (2m-3)\operatorname{ctg}\theta e_\varphi + (2m-1)(2m-3) \times \\ &\qquad \times \cos 2\theta\sin^{-2m}\theta\int_0^\theta e_\varphi\sin^{2m-2}\theta d\theta \end{aligned} \tag{1.18}$$

где C — постоянная интегрирования.

Рассмотрим теперь третье равенство (1.15) как уравнение относительно ζ. Решив это уравнение и исключив затем ζ через e_φ во втором и четвертом равенствах (1.15), получаем выражения для e_θ и $e_{R\theta}$, совпадающие с выражениями (1.18). Это и доказывает высказанное выше утверждение об общности формул (1.15) и (1.13) — (1.14).

Обозначим через $s_{ij}(\theta)$ и $s(\theta)$ множители, зависящие только от θ, в выражениях девиатора напряжений σ_{ij}' и среднего давления σ

$$\sigma_{ij}' = s_{ij}(\theta) R^{-2}, \qquad \sigma = s(\theta) R^{-2} \tag{1.19}$$

Тогда уравнения (1.2) можно записать в виде

$$s_{ij} = A g^{\mu-1} e_{ij} \tag{1.20}$$

где (1.21)

$$g^2 = \frac{2}{3}[(e_R - e_\theta)^2 + (e_\theta - e_\varphi)^2 + (e_\varphi - e_R)^2] + 4e_{R\theta}^2, \qquad \Gamma = g(\theta) R^{-2m}$$

При помощи (1.19) запишем уравнения равновесия (1.3), (1.4) в форме

$$\begin{gathered} s_{R\theta}' + \operatorname{ctg}\theta s_{R\theta} - (s_\theta + s_\varphi) - 2s = 0 \\ s' + s_\theta' + s_{R\theta} + \operatorname{ctg}\theta (s_\theta - s_\varphi) = 0 \end{gathered} \tag{1.22}$$

Первое из этих уравнений выражает «среднее давление» s через «компоненты девиатора напряжений» s_{ij}. Исключая s из второго уравнения, получаем уравнение, содержащее только s_{ij}

$$s_{R\theta}'' + \operatorname{ctg}\theta s_{R\theta}' + (1 - \operatorname{ctg}^2\theta) s_{R\theta} + s_\theta' - s_\varphi' + 2\operatorname{ctg}\theta(s_\theta - s_\varphi) = 0 \tag{1.23}$$

Подстановка формул (1.20) в уравнение (1.23) дает

$$\begin{gathered} g^{\mu-1}[e_{R\theta}'' + \operatorname{ctg}\theta e_{R\theta}' + (1 - \operatorname{ctg}^2\theta) e_{R\theta} + e_\theta' - e_\varphi' + 2\operatorname{ctg}\theta(e_\theta - e_\varphi)] + \\ + (\mu - 1) g^{\mu-3}\{2gg'e_{R\theta}' + [(\mu - 2) g'^2 + gg'' + \operatorname{ctg}\theta gg'] e_{R\theta} + \\ + gg'(e_\theta - e_\varphi)\} = 0 \end{gathered} \tag{1.24}$$

Если теперь внести в (1.24) значения e_{ij}, определяемые равенствами (1.15), то получим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка для определения функции $\zeta(\theta)$

$$U\zeta = 0 \tag{1.25}$$

Здесь через U обозначен соответствующий дифференциальный оператор. Граничные условия (1.5) означают, что

$$s_{R\theta} = 0, \qquad s_\theta + s = 0 \quad \text{при } \theta = {}^1\!/_2\pi \tag{1.26}$$

Исключив s при помощи первого уравнения (1.22), получим

$$s_{R\theta} = 0, \qquad s_{R\theta}' + s_\theta - s_\varphi = 0 \quad \text{при } \theta = {}^1\!/_2\pi \tag{1.27}$$

или, после подстановки формул (1.20)

$$e_{R\theta} = 0, \qquad e_{R\theta}' + e_\theta - e_\varphi = 0 \quad \text{при } \theta = {}^1\!/_2\pi \tag{1.28}$$

Если теперь внести в (1.28) значения e_{ij} согласно (1.15), то получим следующие граничные условия для функции $\zeta(\theta)$: (1.29)

$$\zeta'' - [1 + 2m(2m - 3)]\zeta = 0, \qquad \zeta''' - 2(2m^2 - 5m + 4)\zeta' = 0 \quad \text{при} \quad \theta = {}^1\!/_2\pi$$

Кроме того, из условия $u_\theta = 0$ при $\theta = 0$ имеем

$$\zeta = 0 \quad \text{при } \theta = 0 \tag{1.30}$$

Условие (1.6) при помощи первого уравнения (1.22) можно привести к виду

$$\int_0^{\pi/2} [s_{R\theta}\sin\theta + 3(s_\theta + s_\varphi)\cos\theta]\sin\theta d\theta = \frac{P}{\pi} \tag{1.31}$$

Если внести сюда (1.20) и (1.15), то получим условие

$$V[\zeta] \equiv \int_0^{\pi/2} g^{\mu-1}\left[e_{R\theta}\sin\theta + 3(e_\theta + e_\varphi)\cos\theta\right]\sin\theta d\theta = \frac{P}{\pi A} \tag{1.32}$$

Таким образом, задача свелась к отысканию функции $\zeta(\theta)$, удовлетворяющей обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка (1.25) и условиям (1.29), (1.30), (1.32).

При $\mu = 1$ уравнение (1.25) линейное и просто интегрируется. При этом условия (1.29), (1.30) и (1.32) выделяют из общего решения функцию $\zeta(\theta)$, соответствующую решению (1.9). При $\mu \neq 1$ уравнение (1.25) представляет собой весьма сложное нелинейное дифференциальное уравнение, проинтегрировать которое не удалось. Однако для поставленной в работе цели оказывается достаточным произвести анализ зависимости решения задачи (1.25), (1.29), (1.30), (1.32) от параметров.

Заметим, что левая часть уравнения (1.25) представляет собой однородную функцию степени μ относительно $\zeta, \zeta', \ldots, \zeta^{IV}$. Граничные условия (1.29), (1.30) также однородные; причем в равенства (1.25), (1.29), (1.30) из параметров задачи входит лишь μ. Поэтому если $\zeta_0 = \zeta_0(\theta, \mu)$ – какое-либо частное решение задачи (1.25), (1.29), (1.30), то $\zeta = B\zeta_0$, где B — произвольная постоянная, есть также решение этой задачи. Постоянную B определим из условия (1.32)

$$B = D^{-m}(\mu)\left(\frac{P}{\pi A}\right)^m, \qquad D(\mu) = V[\zeta_0]$$

Следовательно, перемещения имеют вид

$$\begin{aligned} u_R &= D^{-m}(\mu)[\operatorname{ctg}\theta\zeta_0(\theta, \mu) + \zeta_0'(\theta, \mu)]\left(\frac{P}{\pi A}\right)^m R^{-2m+1} \\ u_\theta &= (2m-3)\, D^{-m}(\mu)\,\zeta_0(\theta, \mu)\left(\frac{P}{\pi A}\right)^m R^{-2m+1} \end{aligned} \tag{1.33}$$

Осадка точек границы полупространства равна

$$w(x, y) = -u_\theta\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = c(\mu)\left(\frac{P}{A}\right)^m r^{-2m+1}, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2} \tag{1.34}$$

$$c(\mu) = -(2m-3)\,[\pi D(\mu)]^{-m}\,\zeta_0(\pi/2, \mu), \; c(1) = 1/4\pi$$

Здесь $c(\mu)$ — некоторая постоянная, зависящая только от μ. Равенство (1.34) перепишем в виде

$$Ac^{-\mu}w^\mu = \frac{P}{r^{2-\mu}} \tag{1.35}$$

§ 2. Вдавливание штампа в полупространство со степенным упрочнением. Пусть в полупространство $z \geqslant 0$ вдавливается без трения жесткий штамп. Предполагаем, что свойства материала следуют уравнениям (1.1), (1.2). Поставим задачу, определить осадку штампа и распределение давления по площадке контакта S. Осадка точек площадки контакта равна

$$w(x, y) = \alpha x + \beta y + w_0 - \varphi(x, y) \tag{2.1}$$

где $z = -\varphi(x, y)$ — уравнение поверхности штампа в момент соприкосновения его с полупространством, $\alpha x + \beta y + w_0$ — неизвестное жесткое перемещение.

Для получения приближенного решения поставленной задачи применим, следуя Н. X. Арутюняну [1], принцип сложения «обобщенных перемещений» w^{μ}. Тогда, обозначая давление на площадке контакта через $p(x, y)$ и используя формулу (1.35), получаем для $p(x, y)$ интегральное уравнение¹, аналогичное уравнению в соответствующей плоской задаче [1]

$$\iint\limits_{(S)} \frac{p(x_1, y_1)\,dx_1dy_1}{\left(\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}\right)^{2-\mu}} = Ac^{-\mu}w^{\mu}(x, y) \tag{2.2}$$

в котором функция $w(x, y)$ определяется равенством (2.1). Для определения постоянных α, β и w_0 имеем уравнения равновесия штампа

$$\iint\limits_{(S)} p\,dxdy = P \tag{2.3}$$

$$\iint\limits_{(S)} py\,dxdy = M_x, \qquad \iint\limits_{(S)} px\,dxdy = -M_y \tag{2.4}$$

где P, M_x, M_y — заданные сила и составляющие момента, вдавливающие штамп. Если штамп имеет плавную форму, то для определения размера площадки S следует воспользоваться условием обращения в нуль давления на границе области S.

Если в полупространство вдавливается силой P осесимметричный штамп, то функция $w(x, y)$ в (2.2) заменяется функцией

$$w(r) = w_0 - \varphi(r) \tag{2.5}$$

а из условий (2.3) — (2.4) остается лишь условие (2.3).

Уравнение (2.2) представляет собой линейное интегральное уравнение Фредгольма первого рода с ядром, имеющим слабую особенность $(1 \leqslant 2-\mu < 2)$.

Интересно отметить, что уравнение, аналогичное уравнению (2.2), получается в задаче о вдавливании жесткого штампа в неоднородное упругое полупространство с модулем Юнга

$$E = E_n z^n, \qquad n,\ E_n = \mathrm{const} \qquad (0 < n \leqslant 1)$$

и с коэффициентом Пуассона $\nu = 1/(2+n)$; в этом случае [5]

$$\iint\limits_{(S)} \frac{p(x_1, y_1)\,dx_1dy_1}{\left(\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}\right)^{1+n}} = \gamma w(x, y) \qquad (\gamma = \mathrm{const}) \tag{2.6}$$

Используя эту аналогию, можно сформулировать следующий результат. Пусть в полупространство вдавливается силой P штамп с плоским основанием. При этом свободные члены в уравнениях (2.2) и (2.6) представляют собой постоянные $Ac^{-\mu}w_0^{\mu}$ и γw_0 соответственно. Обозначим через $p_1(x, y)$ решение уравнения (2.2) при свободном члене, равном единице. Тогда давление под штампом в случае полупространства

¹ При контакте по достаточно малой площадке двух тел с различными постоянными A_1, A_2 и одинаковым показателем μ свободный член уравнения (2.2) заменяется функцией

$$[c\,(A_1^{-m} + A_2^{-m})]^{-\mu}\,[\alpha x + \beta y + w_0 - \varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y)]^{\mu}$$

где $z = \varphi_1(x, y)$, $z = -\varphi_2(x, y)$ — уравнения поверхностей тел в момент их соприкосновения.

с упрочнением равно

$$p(x, y) = Ac^{-\mu}w_0^{\mu}p_1(x, y)$$

а в случае неоднородного упругого полупространства (при $n = 1 - \mu$)

$$p(x, y) = \gamma w_0 p_1(x, y)$$

Если теперь исключить постоянные $Ac^{-\mu}w_0^{\mu}$ и γw_0 через силу P при помощи условия (2.3), то в рассматриваемом случае законы распределения давления под штампом, действующим на упрочняющееся полупространство, и под таким же штампом, действующим на неоднородное упругое полупространство (при $n = 1 - \mu$), совпадут. Заметим, что уравнения, связывающие осадку w_0 с силой P, будут различными.

В работе Н. А. Ростовцева [5] получено решение уравнения (2.6) для эллиптического в плане штампа при полиномиальном свободном члене (обобщение теоремы И. Я. Штаермана для однородного упругого материала), а также решение в случае круговой площадки контакта.

Рассмотрим вдавливание силой P штампа с плоским эллиптическим основанием. Используя результаты работы [5], находим

$$p(x, y) = \frac{(2-\mu)P}{2\pi ab}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-\mu/2}, \qquad P = Ac^{-\mu}\frac{\sin\pi\mu / 2a^{1-\mu}b}{(2-\mu)K}w_0^{\mu} \quad (2.7)$$

где b, a — полуоси эллипса ($a \leqslant b$)

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{(\sqrt{1 - e^2\sin^2\alpha})^{\mu}} \qquad \left(e^2 = 1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \quad (2.8)$$

В частности, для штампа с плоским круговым основанием (a — радиус основания)

$$p(r) = \frac{(2-\mu)P}{2\pi a^{2-\mu}}\frac{1}{(\sqrt{a^2 - r^2})^{\mu}}, \qquad P = Ac^{-\mu}\frac{2\sin\pi\mu/2}{\pi(2-\mu)}w_0^{\mu} \quad (2.9)$$

При $\mu = 1$ формулы (2.7) переходят в соответствующие известные формулы в случае однородного упругого материала. Заметим, что распределение давления (2.9) аналогично распределению давления в задаче о вдавливании прямоугольного штампа при плоской деформации [1].

В случае осесимметричного штампа, вдавливаемого силой P, на основании результатов работы [5] имеем

$$p(r) = Ac - \mu\frac{1}{\pi^2}\sin\frac{\pi\mu}{2}\left[\frac{\psi(a)}{(a^2 - r^2)^{\mu/2}} - \int_r^a \frac{\psi'(u)\,du}{(u^2 - r^2)^{\mu/2}}\right] \quad (2.10)$$

$$\psi(u) = w_0^{\mu} + u^{\mu}\int_0^u \frac{[w^{\mu}(v)]'\,dv}{(u^2 - v^2)^{\mu/2}} \quad (2.11)$$

Если штамп имеет плавную форму, то $p(a) = 0$, и, следовательно,

$$\psi(a) = 0 \quad (2.12)$$

Уравнение (2.12) связывает между собой радиус a площадки контакта, осадку штампа w_0 и показатель упрочнения μ. Уравнение (2.3) дает еще одно уравнение, связывающее a, w_0, P, A и μ.

Вычисление интегралов, входящих в (2.10), (2.11), для таких, представляющих интерес, штампов как конический, шаровой, параболический оказывается затруднительным, ввиду наличия степени μ функции $w(r)$ в (2.11). Чтобы упростить вычисление интегралов, прибегнем к аппроксимации функции $f(r) = w^{\mu}(r)$ полиномом.

Рассмотрим штамп достаточно гладкой формы. Пусть функция $\varphi(r)$ имеет непрерывные первую и вторую производные в интервале $[0, l]$, где $l > a$. Тогда функция $f(r)$ обладает таким же свойством. Рассмотрим непрерывную в интервале $[0, l^2]$ функцию $\lambda(t) = f''(\sqrt{t})$. По теореме Вейерштрасса, ее с любой степенью точности можно аппроксимировать полиномом[1]

$$q(t) = \sum_{i=0}^{k} a_i t^i$$

При этом функция $f''(r)$ аппроксимируется полиномом

$$q(r^2) = \sum_{i=0}^{k} a_i r^{2i}$$

содержащим лишь четные степени r. Тогда, как нетрудно видеть, полиномы

$$\begin{aligned} Q(r) &= \sum_{i=0}^{k} \frac{a_i}{(2i+1)(2i+2)} r^{2i+2} + f'(0)\, r + w_0^{\mu} \\ Q'(r) &= \sum_{i=0}^{k} \frac{a_i}{2i+1} r^{2i+1} + f'(0) \end{aligned} \tag{2.13}$$

будут аппроксимировать $f(r)$ и $f'(r)$ соответственно с точностью, пропорциональной точности аппроксимации функции $f''(r)$ полиномом $q(r^2)$. При этом, как можно убедиться, значение давления, полученного при помощи такой аппроксимации, будет близким к действительному.

Внося (2.13) в (2.11), получаем

$$\psi(u) = w_0^{\mu} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(1-\mu/2)}{\Gamma(1.5-\mu/2)} f'(0)\, u + \sum_{i=0}^{k} \frac{a_i b_i}{2i+1} u^{2i+2}$$

$$b_i = \frac{1}{2} \frac{i!}{(1-\mu/2+i)(1-\mu/2+i-1)\ldots(1-\mu/2+1)(1-\mu/2)}$$

$$p(r) = -Ac^{-\mu} a^{1-\mu} \frac{\sin \pi\mu/2}{\pi^2} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(1-\mu/2)}{\Gamma(1.5-\mu/2)} f'(0) \int_{\rho}^{1} \frac{dt}{(t^2-\rho^2)^{\mu/2}} + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=0}^{k} \frac{a_i b_i a^{2i+1}}{(2i+1)(2i+2)} \int_{\rho}^{1} \frac{t^{2i+1} dt}{(t^2-\rho^2)^{\mu/2}} \right]$$

где $\rho = r/a$, $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Второй интеграл в выражении $p(r)$ может быть вычислен интегрированием по частям; имеем

$$\int_{\rho}^{1} \frac{t^{2i+1} dt}{(t^2-\rho^2)^{\mu/2}} = (1-\rho^2)^{1-\mu/2} \left[\frac{1}{1-\mu+2i+2-1} + \right.$$
$$+ \frac{2i\rho^2}{(-\mu+2i+2)(-\mu+2i+2-3)} +$$
$$\left. + \ldots + \frac{(2i)!!\,\rho^{2i}}{(-\mu+2i+2)(-\mu+2i+2-3)\ldots(-\mu+3)(-\mu+1)} \right]$$

[1] В качестве такого полинома можно взять [6]

$$\sum_{i=0}^{k} C_k^{\,i} \left(\frac{t}{l^2}\right)^i \left(1-\frac{t}{l^2}\right)^{k-i} \lambda\left(\frac{i}{k}\, l^2\right)$$

а первый интеграл в выражении $p(r)$ нуждается в табулировании. Для штампов, не имеющих при $r = 0$ угловой точки, $f'(0) = 0$, и член с первым интегралом в выражении $p(r)$ исчезает. Условие (2.12) позволяет выразить радиус a площадки контакта через осадку штампа w_0. Условие (2.3) дает

$$P = Ac^{-\mu}(\mu)\, h(w_0, \mu)$$

Заметим, что неизвестную величину $c(\mu)$ (постоянную для данного материала), входящую в связь между силой и осадкой штампа, можно определить из опыта на вдавливание какого-либо одного штампа.

Иногда вдавливание твердых тел используют для экспериментального определения механических постоянных материала. Полученные в работе решения позволяют при помощи опытов на вдавливание определить показатель упрочнения. Так, например, если известны значения силы и осадки штампа при двух вдавливаниях штампа с плоским круглым основанием, то формула (2.9) дает следующее уравнение для μ:

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{w_{01}}{w_{02}}\right)^{\mu}$$

При вдавливании конуса или шара таким уравнением может служить (2.12) или уравнение

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{h(w_{01}, \mu)}{h(w_{02}, \mu)}$$

В заключение отметим, что изложенные выше результаты могут быть перенесены на случай установившейся и квазиустановившейся ползучести, описываемой уравнениями [7] теории течения (при условии несжимаемости и степенном законе связи интенсивности скоростей деформации сдвига и интенсивности касательных напряжений).

§ 3. Вдавливание штампа в полупространство при неустановившейся ползучести материала. Будем предполагать, что ползучесть несжимаемого материала описывается уравнениями, предложенными Ю. Н. Работновым [8]:

$$A\Gamma^{\mu-1}(t)\, \varepsilon_{ij}(t) = \sigma_{ij}'(t) - \int_0^t K(t-\tau)\, \sigma_{ij}'(\tau)\, d\tau \tag{3.1}$$

Здесь t — время (пространственные переменные для краткости опущены), σ_{ij}' — девиатор напряжений, Γ — интенсивность деформаций сдвига, A и μ — постоянные материала ($0 < \mu \leqslant 1$), $K(t-\tau)$ — ядро последействия [1].

При мгновенном нагружении в момент $t = 0$ материал, подчиняющийся уравнениям (3.1), ведет себя как обладающий лишь упрочнением (степенным).

Рассмотрим квазистатическую задачу о действии сосредоточенной силы $P(t)$, приложенной нормально к границе полупространства. Так как оператор в правой части (3.1) является линейным однородным оператором, а пространственные переменные входят в (3.1) как параметры, все соображения § 1 о зависимости искомых величин от радиуса R переносятся и на рассматриваемую задачу. В число аргументов функций ζ, e_{ij}, g, s_{ij} необходимо, кроме угла θ, включить еще время t. Раз-

[1] Без ущерба для дальнейшего ядро $K(t-\tau)$ можно заменить ядром более общего вида $K(t, \tau)$, а нижний предел интеграла — постоянной t_0.

решая уравнения (3.1) относительно σ_{ij}' и используя (1.20), получим

$$s_{ij}(\theta, t) = Ag^{\mu-1}(\theta, t)\, e_{ij}(\theta, t) + \int_0^t N(t-\tau)\, Ag^{\mu-1}(\theta, \tau)\, e_{ij}(\theta, \tau)\, d\tau \quad (3.2)$$

где $N(t-\tau)$ — резольвента ядра $K(t-\tau)$.

Чтобы получить уравнение для определения функции $\zeta(\theta, t)$, необходимо внести в (3.2) формулы (1.15) и затем получившиеся выражения s_{ij} подставить в дифференциальное уравнение (1.23). Подставляя (3.2) в (1.23) и внося дифференциальный оператор, стоящий в левой части уравнения (1.23), под знак интеграла, получаем однородное интегральное уравнение Вольтерра

$$u(\theta, t) + \int_0^t N(t-\tau)\, u(\theta, \tau)\, d\tau = 0 \quad (3.3)$$

относительно функции $u(\theta, t) = U\zeta$, где U — дифференциальный оператор уравнения (1.25). Из (3.3) следует, что $u(\theta, t) = 0$, т. е. функция $\zeta(\theta, t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению (1.25).

Внесем теперь (3.2) в граничные условия (1.27). Тогда получим два однородных интегральных уравнения вида (3.3): первое относительно $[g^{\mu-1}e_{R\theta}]_{\theta=\pi/2}$, второе относительно $[g^{\mu-1}(e_{R\theta}' + e_\theta - e_\varphi)]_{\theta=\pi/2}$. Из этих уравнений следует, что функция $\zeta(\theta, t)$ удовлетворяет граничным условиям (1.29). Граничное условие (1.30) имеет место, очевидно, и в рассматриваемом случае. Внося (3.2) в условие (1.31), имеем

$$v(t) + \int_0^t N(t-\tau)\, v(\tau)\, d\tau = \frac{P(t)}{\pi A}$$

Решая это интегральное уравнение для $v(t) = V[\zeta]$, находим

$$V[\zeta] = \frac{1}{\pi A}(1-L)\, P(t), \qquad \left(Ly(t) = \int_0^t K(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau\right) \quad (3.4)$$

Таким образом, функция $\zeta(\theta, t)$ удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению (1.25) и тем же граничным условиям (1.29), (1.30), что и в соответствующей задаче при степенном упрочнении. Условие (3.4) отличается от условия (1.32) лишь иным значением правой части. Отметим, что время t в уравнение и в условия для определения функции $\zeta(\theta, t)$ входит как параметр. Следовательно, решение задачи о действии сосредоточенной силы получается из решения задачи § 1, если в нем заменить силу P величиной $(1-L)\, P(t)$.

Перейдем теперь к задаче о вдавливании жесткого штампа в полупространство, свойства материала которого описываются уравнениями (3.1). Предполагаем, что трение по площадке контакта отсутствует. Применяя, как и в § 2, принцип суперпозиции «обобщенного перемещения» w^μ, для определения давления под штампом получим:

$$\iint\limits_{(S_t)} \frac{(1-L)\, p(x_1, y_1, t)\, dx_1 dy_1}{\left(\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}\right)^{2-\mu}} = Ac^{-\mu} w^\mu(x, y, t) \quad (3.5)$$

Здесь (S_t) — площадка контакта, а функция $w(x, y, t)$ определяется равенством (2.1), в котором величины α, β, w_0, определяемые из условий (2.3), (2.4), суть, вообще говоря, функции времени. Уравнение (3.5) эквивалентно следующим двум уравнениям, аналогичным соответствующим уравнениям в плоской задаче [2]

$$\omega(x, y, t) - \int_0^t K(t-\tau)\,\omega(x, y, \tau)\,d\tau = w^{\mu}(x, y, t) \tag{3.6}$$

$$\iint\limits_{(S_t)} \frac{p(x_1, y_1, t)\,dx_1 dy_1}{\left(\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}\right)^{2-\mu}} = Ac^{-\mu}\omega(x, y, t) \tag{3.7}$$

Уравнение (3.6) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода (x, y входят в него как параметры).

Уравнение (3.7) — уравнение Фредгольма первого рода (переменная t входит в (3.7) как параметр). Постоянная $c(\mu)$ может быть определена из опыта на кратковременное вдавливание какого-либо одного штампа.

Рассмотрим штамп с плоским основанием, вдавливаемый в полупространство силой $P(t)$. В этом случае площадка контакта фиксирована, а $w = w_0^{\mu}(t)$ от x, y не зависит. Из (3.6) следует, что $\omega = \omega_0(t)$

$$\omega_0(t) = w_0^{\mu}(t) + \int_0^t N(t-\tau)\,w_0^{\mu}(\tau)\,d\tau \tag{3.8}$$

также не зависит от x, y. Но тогда

$$p(x, y, t) = p_1(x, y)\,Ac^{-\mu}\omega_0(t) \tag{3.9}$$

Здесь $p_1(x, y)$ — решение уравнения (3.7) при свободном члене, равном единице. Исключая $Ac^{-\mu}\omega_0(t)$ через $P(t)$ при помощи условия (2.3), получаем распределение давления

$$p(x, y, t) = P(t)\,p_1(x, y)\left(\iint\limits_{(S)} p_1(x, y)\,dxdy\right)^{-1}$$

совпадающее с распределением давления при степенном упрочнении (или же при мгновенном вдавливании штампа). Таким образом, в случае штампа с плоским основанием, вдавливаемом силой, ползучесть не оказывает влияния на вид закона распределения давления под штампом. Этот результат вполне аналогичен соответствующему результату в плоской задаче [2]. Так, для штампа с плоским эллиптическим основанием распределение давления дается первой формулой (2.7), в которой P следует считать заданной функцией времени; при этом, чтобы получить связь между силой P и осадкой w_0, нужно во второй формуле (2.7) заменить w_0^{μ} величиной ω_0, определяемой согласно (3.8).

Поступила 20 II 1962

Ленинградский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. X. Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала. Изв. АН Арм. ССР, 1959, т. XII, № 2.
2. Арутюнян Н. X. Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 5.
3. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. ГИТТЛ, М., 1955.
4. Hruban K. The basic problem of a non — linear and non — homogeneous half — space. Non — Homogeneity in Elasticity and Plasticity. Pergamon Press, 1959.
5. Ростовцев Н. А. Об одном интегральном уравнении в задаче о давлении жесткого фундамента на неоднородный грунт. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 1.
6. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. Гостехиздат, 1947.
7. Качанов Л. М. Теория ползучести. Физматгиз, 1960.
8. Работнов Ю. Н. Некоторые вопросы теории ползучести. Вестн. МГУ, 1948, № 10.