Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ ОДНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ, СВЯЗАННОЙ С КРУЧЕНИЕМ ПОЛОГО ПОЛУШАРА

Б. Л. Абрамян, А. А. Баблоян

(Ереван)

Задача о кручении конического вала, когда вал скручивается моментами, приложенными на его торцах, впервые рассмотрена Феплем [1]. Кручение вала в виде конуса рассмотрено также в работах А. Ш. Локшина [2] и Н. Я. Панарина [3]. Кручение сферы, когда она скручивается сосредоточенными моментами, рассмотрено в работах Снелла [4] и Хубера [5]. Некоторые другие задачи о кручении валов переменного сечения в сферических координатах рассмотрены в работах К. В. Соляника-Красса [6] и Б. Л. Абрамяна [7].

Кручение тела вращения, осевое сечение которого ограничено двумя сферическими поверхностями и конической поверхностью, составленного из двух материалов с конической поверхностью их раздела, рассмотрено в работе Даса [8]. Конус скручивается касательными усилиями, приложенными на конической поверхности, а сферические поверхности предполагаются закрепленными. Решение этой задачи получено при помощи конических функций.

В другой работе Дас [9] рассмотрел кручение составного шара и эллипсоидов вращения нагрузкой, распределенной на поверхности по некоторому определенному закону. Кручение двухслойной полой полусферы произвольной осесимметричной нагрузкой рассмотрено в работе [10].

Ниже рассматривается задача о кручении полой полусферы, когда часть ее торца закреплена и она скручивается произвольной осесимметричной нагрузкой. Решение задачи получено при помощи конических функций. Определение постоянных интегрирования сведено к решению бесконечной системы линейных уравнений. Доказывается, что эта система вполне регулярна и имеет ограниченные сверху свободные члены.

1. Задачу о кручении тела вращения будем решать при помощи функции перемещения $\psi(r, z)$, которая в области осевого сечения тела вращения удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{3}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0 \tag{1.1}$$

а на границе области осевого сечения задана либо своей нормальной производной, либо самой функцией.

Напряжения $\tau_{r\varphi}$, $\tau_{\varphi z}$ и перемещение v выражаются через функцию перемещения $\psi(r, z)$ формулами

$$\tau_{r\varphi} = Gr\frac{\partial\psi}{\partial r}, \qquad \tau_{\varphi z} = Gz\frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad v = r\psi(r, z) \tag{1.2}$$

где G — модуль сдвига материала.

Переходя к новой координатной системе

$$r = ae^t\sqrt{1-\xi^2}, \qquad z = ae^t\xi, \qquad \xi = \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}, \qquad t = \ln\frac{\sqrt{r^2+z^2}}{a} \tag{1.3}$$

где $a > 0$ — некоторая постоянная; уравнение (1.1) приведем к виду

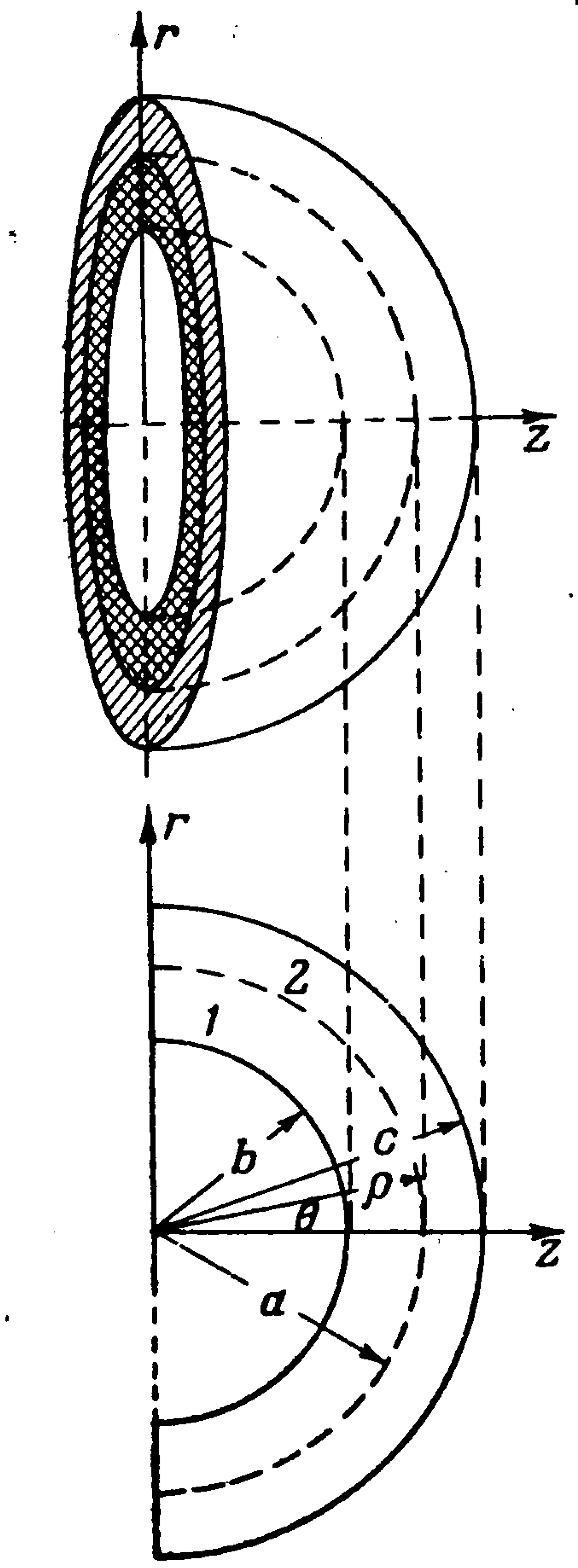
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + (1-\xi^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial \xi^2} + 3\frac{\partial\psi}{\partial t} - 4\xi\frac{\partial\psi}{\partial\xi} = 0 \tag{1.4}$$

Формулы для напряжений и перемещения принимают вид

$$\tau_{\xi\varphi} = -G(1-\xi^2)\frac{\partial\psi}{\partial\xi}, \qquad \tau_{t\varphi} = G\sqrt{1-\xi^2}\,\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

$$v = ae^t\sqrt{1-\xi^2}\,\psi(t,\xi) \tag{1.5}$$

Решая уравнение (1.4) методом разделения переменных, для функции $\psi(t,\xi)$ получим следующие частные решения:



$$\psi(t,\xi) = e^{-3t/2}\left[A\,\mathrm{sh}\frac{(2n+1)}{2}t + B\,\mathrm{ch}\frac{(2n+1)}{2}t\right]\varphi_n(\xi) \tag{1.6}$$

$$\psi(t,\xi) = \frac{d}{d\xi}\left[AP_{-1/2+\mu_k i}(\xi) + BQ_{-1/2+\mu_k i}(\xi)\right]T_k(t)$$

где

$$\varphi_n(\xi) = \frac{d}{d\xi}\left[CP_n(\xi) + DQ_n(\xi)\right]$$

$$T_k(t) = e^{-3t/2}\left[C\sin\mu_k t + D\cos\mu_k t\right] \tag{1.7}$$

Здесь $P_n(\xi)$ и $Q_n(\xi)$ — функции Лежандра[11], $P_{-1/2+\mu_k i}(\xi)$ и $Q_{-1/2+\mu_k i}(\xi)$ — конические функции [11, 12], A, B, C и D — произвольные постоянные, n — положительное натуральное число.

Отметим, что функции

$$1, \quad e^{-3t}, \quad \frac{1}{1\pm\xi} - \ln(1\pm\xi) - t \tag{1.9}$$

также являются частными решениями дифференциального уравнения (1.4).

2. Рассмотрим задачу кручения полой полусферы с радиусами b и c $(b < c)$, когда на сферических поверхностях и на кольцевой части плоскости $z = 0$ $(r > a,\ b < a < c)$ действуют крутящие касательные напряжения (фиг. 1), а на остальной части плоскости $z = 0$ $(r < a)$ заданы значения перемещения v.

Для такой задачи граничные условия будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \tau_{t\varphi}(-t_1,\xi) &= f_1(\xi) \\ \tau_{t\varphi}(t_2,\xi) &= f_2(\xi) \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqslant \xi \leqslant 1)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\xi\varphi}(t,0) &= f_3(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant t_2) \\ v(t,0) &= f_4(t) \qquad (-t_1 \leqslant t < 0) \end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$t_1 = \ln\frac{a}{b}, \qquad t_2 = \ln\frac{c}{a} \tag{2.2}$$

$$(0 \leqslant \xi \leqslant 1)$$

Функцию $\psi(t, \xi)$ ищем в виде

$$\psi(t, \xi) = \begin{cases} \psi_1(t, \xi) \text{ в области } 1 \ (t < 0) \\ \psi_2(t, \xi) \text{ в области } 2 \ (t > 0) \end{cases} \tag{2.3}$$

Из (1.4) и (2.3) следует, что функции ψ_1 и ψ_2 удовлетворяют уравнению (1.4). Из (2.1) и (2.3) для функций ψ_1 и ψ_2 получим следующие граничные условия:

$$G\sqrt{1-\xi^2}\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\Big|_{t=-t_1} = f_1(\xi), \qquad -G\frac{\partial\psi_2}{\partial\xi}\Big|_{\xi=0} = f_3(t)$$

$$G\sqrt{1-\xi^2}\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\Big|_{t=t_2} = f_2(\xi), \qquad ae^t\psi_1(t, 0) = f_4(t) \tag{2.4}$$

При этом на линии контакта областей *1* и *2* должны быть выполнены условия сопряжения

$$\psi_1(0, \xi) = \psi_2(0, \xi) \qquad \frac{\partial\psi_1}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial\psi_2}{\partial t}\Big|_{t=0} \tag{2.5}$$

Решения для функций ψ_1 и ψ_2 берем в виде

$$\psi_1(t, \xi) = A^{(1)} + B^{(1)}e^{-3t} + D^{(1)}\left[\frac{1}{1+\xi} - \ln(1+\xi) - t\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} e^{-3t/2}\left[A_k^{(1)}\operatorname{sh}\beta_k t + B_k^{(1)}\operatorname{ch}\beta_k t\right]\varphi_{2k+1}(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} D_k^{(1)}P'_{-1/2+\mu_k i}(\xi)\,T_k^{(1)}(t)$$

$$(-t_1 \leqslant t < 0,\ 0 \leqslant \xi \leqslant 1) \tag{2.6}$$

$$\psi_2(t, \xi) = A^{(2)} + B^{(2)}e^{-3t} + D^{(2)}\left[\frac{1}{1+\xi} - \ln(1+\xi) - t\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} e^{-3t/2}\left[A_k^{(2)}\operatorname{sh}\beta_k t + B_k^{(2)}\operatorname{ch}\beta_k t\right]\varphi_{2k+1}(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} D_k^{(2)}P'_{-1/2+\gamma_k i}(\xi)\,T_k^{(2)}(t)$$

$$(0 \leqslant t \leqslant t_2,\ 0 \leqslant \xi \leqslant 1) \tag{2.7}$$

где

$$T_k^{(1)}(t) = e^{-3t/2}\left(\tfrac{3}{2}\sin\mu_k t + \mu_k\cos\mu_k t\right)$$

$$T_k^{(2)}(t) = e^{-3t/2}\left(\tfrac{3}{2}\sin\gamma_k t + \gamma_k\cos\gamma_k t\right) \tag{2.8}$$

$$\varphi_{2k+1}(\xi) = \frac{d}{d\xi}P_{2k+1}(\xi) \tag{2.9}$$

$$\beta_k = \frac{4k+3}{2}, \qquad \mu_k = \frac{k\pi}{t_1}, \qquad \gamma_k = \frac{k\pi}{t_2} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$\mu_0 = \gamma_0 = \tfrac{3}{2}i, \qquad i = \sqrt{-1} \tag{2.10}$$

3. Докажем, что функции [13]

$$\chi_k(t) = \begin{cases} e^{\alpha t} & \text{при } k = 0 \\ \alpha\sin\gamma_k t + \gamma_k\cos\gamma_k t & \text{при } k = 1, 2, 3, \ldots \end{cases} \tag{3.1}$$

где α — постоянная величина, образуют замкнутую и ортогональную систему в промежутке $[0, t_2]$ среди функций, удовлетворяющих условиям Дирихле. Для этого нужно доказать, что из условий

$$\int_0^{t_2} f(t)\chi_k(t)\,dt = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.2}$$

где $f(t)$ — любая функция в классе $L^2[0, t_2]$, следует $f(t) \equiv 0$ или, что то же самое, из условий

$$\int_0^{t_2} f(t)\chi_k(t)\,dt = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3.3}$$

следует, что функция $f(t)$ или совпадает с функцией $\chi_0(t) = e^{\alpha t}$, или тождественно равна нулю.

Подставим в (3.3) значение $\chi_k(t)$ из (3.1) и преобразуем полученный интеграл

$$\int_0^{t_2} f(t)\chi_k(t)\,dt = \alpha\int_0^{t_2} f(t)\sin\gamma_k\, tdt + \gamma_k\int_0^{t_2} f(t)\cos\gamma_k t\,dt =$$

$$= \int_0^{t_2} [\alpha f(t) - f'(t)]\sin\gamma_k t\,dt$$

Тогда условия (3.3) принимают вид

$$\int_0^{t_2} [\alpha f(t) - f'(t)]\sin\gamma_k t\,dt = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3.4}$$

Так как система функций $\{\sin\gamma_k t\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ полна в $L^2[0, t_2]$, то в силу (3.4) функция $f(t)$ должна удовлетворять следующему дифференциальному уравнению:

$$\alpha f(t) - f'(t) = 0$$

которое имеет единственное, отличное от нулевого, решение

$$f(t) = Ce^{\alpha t} \tag{3.5}$$

т. е. функция $f(t)$, удовлетворяющая условиям (3.3), или тождественно равна нулю, или же совпадает с функцией $\chi_0(t) = e^{\alpha t}$ с точностью до постоянного множителя.

Из значения интеграла

$$\int_0^{t_2} \chi_k(t)\chi_p(t)\,dt = \begin{cases} \frac{t_2}{2}(\gamma_k^2 + \alpha^2) & \text{при } k = p \neq 0 \\ \frac{1}{2\alpha}(e^{2\alpha t_2} - 1) & \text{при } k = p = 0 \\ 0 & \text{при } k \neq p \end{cases} \tag{3.6}$$

следует, что функции $\chi_k(t)$ образуют ортогональную систему.

Таким образом, система функций $\{\chi_k\}$ полна в $L^2[0, t_2]$. Отсюда вытекает, что любую функцию $f(t) \in L^2[0, t_2]$ можно разложить в ряд Фурье по функциям (3.1). При этом в точках непрерывности для функции $f(t)$ будем иметь

$$f(t) = a_0\chi_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(t) \tag{3.7}$$

где коэффициенты разложения в силу (3.6) определяются формулами

$$a_0 = \frac{2\alpha}{e^{2\alpha t_2} - 1} \int_0^{t_2} f(t)\chi_0(t)\,dt, \qquad a_k = \frac{2}{t_2(\gamma_k^2 + \alpha^2)} \int_0^{t_2} f(t)\chi_k(t)\,dt \tag{3.8}$$

Таким образом, системы функций $\{1, T_k^{(1)}(t)\}$ и $\{1, T_k^{(2)}(t)\}$ замкнуты и ортогональны с весом e^{3t}, соответственно, в промежутках $[-t_1, 0]$ и $[0, t_2]$, т. е. для этих функций имеем

$$\int_{-t_1}^{0} e^{3t} T_k^{(1)}(t) T_p^{(1)}(t)\,dt = \begin{cases} 0 & k \neq p \\ \frac{1}{2} t_1 \left(\mu_k^2 + \frac{9}{4}\right) & k = p \neq 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

$$\int_{0}^{t_2} e^{3t} T_k^{(2)}(t)\, T_p^{(2)}(t)\,dt = \begin{cases} 0 & k \neq p \\ \frac{1}{2} t_2 \left(\gamma_k^2 + \frac{9}{4}\right) & k = p \neq 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\int_{-t_1}^{0} e^{3t} T_k^{(1)}(t)\,dt = \int_{0}^{t_2} e^{3t} T_k^{(2)}(t)\,dt = 0 \tag{3.11}$$

Функции же $\{1, \varphi_{2k+1}(\xi)\}$ замкнуты и ортогональны с весом $(1-\xi^2)$ в интервале $[0, 1]$, т. е. удовлетворяют равенствам

$$\int_0^1 (1-\xi^2)\varphi_{2k+1}(\xi)\varphi_{2p+1}(\xi)\,d\xi = \begin{cases} 0 & (k \neq p) \\ \omega_p = \dfrac{(2p+1)(2p+2)}{4p+3} & (k = p) \end{cases} \tag{3.12}$$

$$\int_0^1 (1-\xi^2)\varphi_{2k+1}(\xi)\,d\xi = 0 \tag{3.13}$$

4. Для удовлетворения граничным условиям (2.4) и (2.5) произвольные функции f_i представим в виде рядов

$$\begin{aligned} f_1(\xi) &= G\sqrt{1-\xi^2}\,[a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_{2k+1}(\xi)] \\ f_2(\xi) &= G\sqrt{1-\xi^2}\,[b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi_{2k+1}(\xi)] \end{aligned} \qquad (0 \leqslant \xi \leqslant 1) \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} f_3(t) &= G[c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k T_k^{(2)}(t)] && (0 \leqslant t \leqslant t_2) \\ f_4(t) &= ae^t[d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k T_k^{(1)}(t)] && (-t_1 \leqslant t < 0) \end{aligned} \tag{4.2}$$

где коэффициенты разложений согласно соотношениям (3.8) — (3.13) определяются следующими формулами:

$$a_0 = \frac{3}{2G}\int_0^1 \sqrt{1-\xi^2}\, f_1(\xi)\, d\xi, \qquad a_k = \frac{1}{G\omega_k}\int_0^1 \sqrt{1-\xi^2}\, f_1(\xi)\, \varphi_{2k+1}(\xi)\, d\xi$$

$$b_0 = \frac{3}{2G}\int_0^1 \sqrt{1-\xi^2}\, f_2(\xi)\, d\xi, \qquad b_k = \frac{1}{G\omega_k}\int_0^1 \sqrt{1-\xi^2}\, f_2(\xi)\, \varphi_{2k+1}(\xi)\, d\xi \tag{4.3}$$

$$c_0 = \frac{3}{G\,(e^{3t_2}-1)}\int_0^{t_2} e^{3t} f_3(t)\, dt, \qquad c_k = \frac{2}{Gt_2\,(\gamma_k^2 + {}^9/_4)}\int_0^{t_2} e^{3t} f_3(t)\, T_k^{(2)}(t)\, dt$$

$$d_0 = \frac{3}{a\,(1-e^{-3t_1})}\int_{-t_1}^{0} e^{2t} f_4(t)\, dt, \qquad d_k = \frac{2}{at_1\,(\mu_k^2 + {}^9/_4)}\int_{-t_1}^{0} e^{2t} f_4(t)\, T_k^{(1)}(t)\, dt \tag{4.4}$$

Удовлетворив граничным условиям и условиям сопряжения, получим ряд соотношений для определения неизвестных коэффициентов. Разрешая эти уравнения, для неизвестных получим следующие выражения (m — постоянное число, подлежащее определению в дальнейшем)

$$A_k^{(1)} = \frac{1}{\beta_k^2 - {}^9/_4}\left[\frac{mY_k\,(4k+3)\,\varphi_{2k+1}(0)}{(2k+1)(2k+2)}\left(\beta_k + \frac{3}{2}\operatorname{cth}\beta_k t_1\right) - \frac{3a_k\, e^{-3t_1/2}}{2\operatorname{sh}\beta_k t_1}\right]$$

$$B_k^{(1)} = \frac{1}{\beta_k^2 - {}^9/_4}\left[\frac{mY_k\,(4k+3)\,\varphi_{2k+1}(0)}{(2k+1)(2k+2)}\left(\frac{3}{2} + \beta_k\operatorname{cth}\beta_k t_1\right) - \frac{\beta_k a_k\, e^{-3t_1/2}}{\operatorname{sh}\beta_k t_1}\right]$$

$$A_k^{(2)} = \frac{1}{\beta_k^2 - {}^9/_4}\left[\frac{mY_k\,(4k+3)\,\varphi_{2k+1}(0)}{(2k+1)(2k+2)}\left(\beta_k - \frac{3}{2}\operatorname{cth}\beta_k t_2\right) + \frac{3b_k\, e^{3t_2/2}}{2\operatorname{sh}\beta_k t_2}\right]$$

$$B_k^{(2)} = \frac{1}{\beta_k^2 - {}^9/_4}\left[\frac{mY_k\,(4k+3)\,\varphi_{2k+1}(0)}{(2k+1)(2k+2)}\left(\frac{3}{2} - \beta_k\operatorname{cth}\beta_k t_2\right) + \frac{\beta_k b_k\, e^{3t_2/2}}{\operatorname{sh}\beta_k t_2}\right]$$

$$D_k^{(1)} = \frac{X_k + \gamma_k c_k}{\mu_k P''_{-1/2+\mu_k i}(0)}, \qquad D_k^{(2)} = \frac{c_k}{P''_{-1/2+\mu_k i}(0)} \tag{4.5}$$

$$B^{(1)} = \frac{c_0 - (c_0 - 2b_0)\, e^{3t_2}}{6\,(e^{3t_1}-1)}, \qquad B^{(2)} = \frac{c_0 - 2b_0}{6} e^{3t_1}$$

$$D^{(1)} = -a_0 - e^{3t_1}\frac{c_0 - (c_0 - 2b_0)\, e^{3t_2}}{2\,(e^{3t_1}-1)}, \qquad D^{(2)} = -\frac{c_0}{2}.$$

$$A^{(1)} = d_0 - D^{(1)} - \frac{3}{1-e^{-3t_1}}\left[B^{(1)} t_1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(4k+3)\,\varphi_{2k+1}^2(0)\, mY_k}{(2k+1)(2k+2)(\beta_k^2 - {}^9/_4)} - e^{3t_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k\,\varphi_{2k+1}(0)}{\beta_k^2 - {}^9/_4}\right] \tag{4.6}$$

$$A^{(2)} = A^{(1)} + B^{(1)} - B^{(2)} + \left(\tfrac{11}{6} - 2\ln 2\right)(D^{(1)} - D^{(2)}) - \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k}{\mu_k^2 + {}^9/_4}$$

При получении этих выражений были использованы значения

$$\int_0^1 (1-\xi^2)\, P'_{-1/2+\mu_k i}(\xi)\, d\xi = -\frac{P''_{-1/2+\mu_k i}(0)}{\mu_k^2 + {}^9/_4}$$

$$\int_0^1 (1-\xi^2)\, P_{-1/2+\mu_k i}(\xi)\, \varphi_{2p+1}(\xi)\, d\xi = -\frac{P''_{-1/2+\mu_k i}(0)\,\varphi_{2p+1}(0)}{\mu_k^2 + (2p + {}^3/_2)^2} \tag{4.7}$$

где

$$\varphi_{2p+1}(0) = (-1)^p \frac{(2p+1)!!}{(2p)!!} = (-1)^p \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2p+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2p}, \qquad \varphi'_{2p+1}(0) = 0 \qquad (4.8)$$

Входящие в выражения (4.5) и (4.6) неизвестные коэффициенты X_k и Y_k определяются из двух бесконечных систем линейных уравнений

$$Y_p = \sum_{k=1}^{\infty} a_{pk} X_k + M_p, \qquad X_p = \sum_{k=1}^{\infty} b_{pk} Y_k + N_p \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots) \quad (4.9)$$

где

$$a_{pk} = \frac{\beta_p{}^2 - {}^9/_4}{m\beta_p(\operatorname{cth}\beta_p t_1 + \operatorname{cth}\beta_p t_2)} \frac{1}{\mu_k{}^2 + \beta_p{}^2}$$

$$b_{pk} = -\frac{2m\mu_p{}^2}{t_1(\mu_p^2 + {}^9/_4)} \frac{P''_{-{}^1/_2+\mu_p i}(0)}{P'_{-{}^1/_2+\mu_p i}(0)} \frac{(4k+3)\varphi^2_{2k+1}(0)}{(2k+1)(2k+2)(\beta_k{}^2 + \mu_p{}^2)} \qquad (4.10)$$

$$M_p = \frac{\beta_p{}^2 - {}^9/_4}{m\beta_p(\operatorname{cth}\beta_p t_1 + \operatorname{cth}\beta_p t_2)} \left[-\frac{D^{(1)} - D^{(2)}}{4p^2 + 6p} + \right.$$

$$\left. + \frac{(2p+1)(2p+2)}{4p(2p+3)\varphi_{2p+1}(0)} \left(\frac{a_p e^{-3t_1/2}}{\operatorname{sh}\beta_p t_1} + \frac{b_p e^{3t_2/2}}{\operatorname{sh}\beta_p t_2} \right) \right] \qquad (4.11)$$

$$N_p = -\frac{2\mu_p{}^2}{t_1(\mu_p{}^2 + {}^9/_4)} \frac{P''_{-{}^1/_2+\mu_p i}(0)}{P'_{-{}^1/_2+\mu_p i}(0)} \left[(-1)^{p+1} e^{-3t_1/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \varphi_{2k+1}(0)}{\beta_k{}^2 + \mu_p{}^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{e^{\prime\,2}(c_0 - 2b_0) - c_0 + 2(-1)^p a_0 e^{-3t_1/2}}{2(\mu_p{}^2 + {}^9/_4)} - \frac{d_p t_1}{2\mu_p}\left(\mu_p^2 + \frac{9}{4}\right) \right] \qquad (4.12)$$

5. Докажем, что системы (4.9) вполне регулярны. Пользуясь выражениями (4.10), будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{pk}| = \frac{\beta_p{}^2 - {}^9/_4}{m\beta_p(\operatorname{cth}\beta_p t_1 + \operatorname{cth}\beta_p t_2)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k{}^2 + \beta_p{}^2} = \qquad (5.1)$$

$$= \frac{t_1}{2m} \frac{\beta_p{}^2 - {}^9/_4}{\beta_p{}^2} \frac{\operatorname{cth}\beta_p t_1 - 1/\beta_p t_1}{\operatorname{cth}\beta_p t_1 + \operatorname{cth}\beta_p t_2} < \frac{t_1}{4m}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_p| = -\frac{2m}{t_1} \frac{\mu_p{}^2}{\mu_p^2 + {}^9/_4} \frac{P''_{-{}^1/_2+\mu_p i}(0)}{P'_{-{}^1/_2+\mu_p i}(0)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4k+3)\varphi^2_{2k+1}(0)}{(2k+1)(2k+2)(\beta_k{}^2 + \mu_p{}^2)} \qquad (5.2)$$

Для суммирования ряда из правой части выражения (5.2) пользуемся разложениями функций в ряды по функциям Лежандра.

Пусть функции $f(\xi)$ и $\psi(\xi)$ принадлежат классу $L^2[0,1]$ и представлены в виде рядов

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_{2k+1}(\xi), \qquad \psi(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k P_{2k+1}(\xi) \qquad 5.3)$$

где функции $P_{2k+1}(\xi)$ ортогональны в интервале (0,1) и для них имеют место равенства

$$\int_0^1 P_{2k+1}(\xi)\,P_{2p+1}(\xi)\,d\xi = \begin{cases} 0 & (k \neq p) \\ \dfrac{1}{4k+3} & (k = p) \end{cases} \tag{5.4}$$

Так как ряды (5.3) ограниченно сходятся, то, умножив их и интегрируя полученное выражение в интервале (0,1), получим

$$\int_0^1 \psi(\xi)\,f(\xi)\,d\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k b_k}{4k+3} \tag{5.5}$$

при этом использованы равенства (5.4). Равенство (5.5) можно назвать равенством Парсеваля для разложений (5.3). Полагая теперь

$$f(\xi) = \frac{P_{-1/2+\mu_p i}(\xi)}{P_{-1/2+\mu_p i}(0)}, \qquad \psi(\xi) = 1 \tag{5.6}$$

будем иметь

$$a_k = \frac{(4k+3)\,\varphi_{2k+1}(0)}{\mu_p^2 + (2k+3/2)^2}, \qquad b_k = \frac{(4k+3)\,\varphi_{2k+1}(0)}{(2k+1)(2k+2)} \tag{5.7}$$

Здесь использованы значения интегралов

$$\int_0^1 P_{2k+1}(\xi)\,d\xi = \frac{(\xi^2-1)\,P'_{2k+1}(\xi)}{(2k+1)(2k+2)}\Bigg|_0^1 = \frac{\varphi_{2k+1}(0)}{(2k+1)(2k+2)}$$

$$\int_0^1 P_{-1/2+\mu_p i}(\xi)\,P_{2k+1}(\xi)\,d\xi = -\frac{P_{-1/2+\mu_p i}(0)\,\varphi_{2k+1}(0)}{\mu_p^2 + (2k+3/2)^2} \tag{5.8}$$

Подставляя значения (5.7) в (5.5), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k+3)\,\varphi^2_{2k+1}(0)}{(2k+1)(2k+2)\,[\mu_p^2 + (2k+3/2)^2]} = -\frac{P'_{-1/2+\mu_p i}(0)}{(\mu_p^2 + 1/4)\,P_{-1/2+\mu_p i}(0)} \tag{5.9}$$

При получении этого равенства использовано значение интеграла

$$\int_0^1 P_{-1/2+\mu_p i}(\xi)\,d\xi = -\frac{(\xi^2-1)\,P'_{-1/2+\mu_p i}(\xi)}{\mu_p^2 + 1/4}\Bigg|_0^1 = -\frac{P'_{-1/2+\mu_p i}(0)}{\mu_p^2 + 1/4} \tag{5.10}$$

Из уравнения

$$(1-\xi^2)\,P''_{-1/2+\mu_p i}(\xi) - 2\xi P'_{-1/2+\mu_p i}(\xi) - (\mu_p^2 + 1/4)\,P_{-1/2+\mu_p i}(\xi) = 0 \tag{5.11}$$

При $\xi = 0$ имеем

$$P''_{-1/2+\mu_p i}(0) = (\mu_p^2 + 1/4)\,P_{-1/2+\mu_p i}(0) \tag{5.12}$$

Подставляя (5.12) в (5.9), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4k+3)\,\varphi^2_{2k+1}(0)}{(2k+1)(2k+2)\,[\mu_p^2 + (2k+3/2)^2]} = -\frac{P'_{-1/2+\mu_p i}(0)}{P''_{-1/2+\mu_p i}(0)} - \frac{3}{2(\mu_p^2 + 9/4)} \tag{5.13}$$

В силу соотношения (5.13) можно утверждать, что разложение функции $P'_{-1/2+\mu_p i}(\xi)$ по функциям $\{\varphi_{2k+1}(\xi)\}$, которое имеет вид

$$\frac{P'_{-1/2+\mu_p i}(\xi)}{P''_{-1/2+\mu_p i}(0)} = -\frac{3}{2(\mu_p^2 + 9/4)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4k+3)\,\varphi_{2k+1}(0)\,\varphi_{2k+1}(\xi)}{(2k+1)(2k+2)\,[\mu_p^2 + (2k+3/2)^2]} \tag{5.14}$$

сохраняет свою силу в краевой точке $\xi=0$.

В силу (5.13) равенство (5.2) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{\infty}|b_{pk}|=\frac{2m}{t_1}\frac{\mu_p^2}{\mu_p^2+{}^9/_4}\left[1+\frac{3}{2(\mu_p^2+{}^9/_4)}\frac{P''_{-1/2+\mu_p i}(0)}{P'_{-1/2+\mu_p i}(0)}\right] \tag{5.15}$$

Так как правая часть (5.13) положительна, то имеем оценки

$$-1<\frac{3}{2(\mu_p^2+{}^9/_4)}\frac{P''_{-1/2+\mu_p i}(0)}{P'_{-1/2+\mu_p i}(0)}<0 \tag{5.16}$$

Учитывая (5.16), из (5.15) получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}|b_{pk}|<\frac{2m}{t_1} \tag{5.17}$$

Если постоянное число m выбирать из равенства

$$\frac{t_1}{4m}=\frac{2m}{t_1}, \qquad m=\frac{t_1\sqrt{2}}{4}$$

то для сумм модулей коэффициентов при неизвестных систем (4.9) будем иметь следующие оценки:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_{pk}|<\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}|b_{pk}|<\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{5.18}$$

Легко видеть, что свободные члены (4.11) и (4.12) систем (4.9) ограничены сверху и при $p\to\infty$ стремятся к нулю, как $O(1/p)$.

Таким образом, системы (4.9) оказались вполне регулярными и имеют ограниченные сверху и стремящиеся к нулю свободные члены. Это обстоятельство дает возможность определить все неизвестные X_k и Y_k с желаемой точностью [14]. При этом легко доказать, что неизвестные коэффициенты X_k и Y_k стремятся к нулю, как $O(k^{-1}\ln k)$.

6. Подставляя найденные значения неизвестных постоянных из (4.5) в (2.6) и (2.7), для функций ψ_1 и ψ_2 окончательно получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}\Psi_1(t,\xi)&=A^{(1)}+B^{(1)}e^{-3t}+D^{(1)}\left[\frac{1}{1+\xi}-\ln(1+\xi)-t\right]+\\&+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-3t/2}\varphi_{2k+1}(\xi)}{\beta_k^2-{}^9/_4}\left[\frac{mY_k(4k+3)\varphi_{2k+1}(0)}{(2k+1)(2k+2)}R_k^{(1)}(t_1+t)-a_ke^{-3t_1/2}R_k^{(1)}(t)\right]+\\&+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k+\gamma_kc_k}{\mu_k}\frac{P'_{-1/2+\mu_k i}(\xi)}{P''_{-1/2+\mu_k i}(0)}T_k^{(1)}(t)\end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned}\Psi_2(t,\xi)&=A^{(2)}+B^{(2)}e^{-3t}+D^{(2)}\left[\frac{1}{1+\xi}-\ln(1+\xi)-t\right]-\\&-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-3t/2}\varphi_{2k+t}(\xi)}{\beta_k^2-{}^9/_4}\left[\frac{mY_k(4k+3)\varphi_{2k+1}(0)}{(2k+1)(2k+2)}R_k^{(2)}(t-t_2)-b_ke^{3t_2/2}R_k^{(2)}(t)\right]+\\&+\sum_{k=1}^{\infty}c_k\frac{P'_{-1/2+\gamma_k i}(\xi)}{P''_{-1/2+\gamma_k i}(0)}T_k^{(2)}(t)\end{aligned} \tag{6.2}$$

В равенствах (6.1) и (6.2) введены обозначения

$$R_k^{(s)}(t) = \frac{3}{2}\frac{\operatorname{sh}\beta_k t}{\operatorname{sh}\beta_k t_s} + \beta_k \frac{\operatorname{ch}\beta_k t}{\operatorname{sh}\beta_k t_s} \qquad (s = 1, 2) \tag{6.3}$$

Ряды, входящие в формулы (6.1) и (6.2), — сходящиеся. Из оценки для неизвестных коэффициентов X_k и Y_k следует, что первые производные от этих рядов будут везде сходящимися, кроме точки ($t = 0$, $\xi = 0$), т. е. касательные напряжения во всех точках осевого сечения полушара имеют конечные значения, кроме точки (0, 0), где при жестком закреплении торца имеет место концентрация напряжений.

Таким образом, пользуясь формулами (1.5), (6.1) и (6.2), можно определить напряжения $\tau_{t\varphi}$, $\tau_{\xi\varphi}$ и перемещение v в любой точке осевого сечения полушара.

Поступила 17 X 1961

Институт математики и механики АН Арм. ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Föppl A. Über die Torsion von runden Stäben mit veränderlichen Durchmesser. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. München, 1905.
2. Локшин А. Ш. О кручении тела вращения. Изв. Екатеринослав. горн. ин-та, 1923, т. XI, № 1.
3. Панарин Н. Я. К расчету усеченного полого конуса при кручении. Изв. НИИГ, 1937, т. XX.
4. Snell C. The twisted sphere. Mathematica, 1957, vol. 4, No 8,
5. Huber A. The elastik sphere under concentrated torques. Quart. Appl. Math., 1955, vol. 13.
6. Солянник-Красса К. В. Кручение валов переменного сечения. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
7. Абрамян Б. Л. О кручении тела вращения осесимметричной нагрузкой. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 6, стр. 1047—1056.
8. Das S. Ch. On the stresses incomposite truncated cone due to shearing stresses on the curved surface. Indian Journ. Theoret. Phys., 1956, 4, № 4, 89—92.
9. Das S. Ch. On the stresses in twisted composite spheres and spheroids. Canad. Journ. Phys., 1957, 35, No 7, 811—817.
10. Абрамян Б. Л., Гулканян Н. О. Кручение полой двухслойной полусферы. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-матем. наук, 1961, т. XIV, № 6.
11. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., ИИЛ, 1952.
12. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.— Л., ГИТТЛ, 1951.
13. Баблоян А. А. Плоская задача теории упругости для кольцевого сечения. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.- матем. наук, 1961, т. XIV, № 6.
14. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.— Л., Гостехиздат, 1950.