Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ УСЛОВИЯХ УСТОЙЧИЕССТИ РАВНОВЕСНЫХ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ КОНФИГУРАЦИЙ

К. Н. Степанов, В. В. Хоменюк
(Харьков)

В работе [1] на основе прямого метода Ляпунова было показано, что состояние равновесия идеально проводящей жидкости неустойчиво, если существуют такие смещения $\xi(\mathbf{r})$ жидкости от положения равновесия, для которых потенциальная энергия системы $U\{\xi\} < 0$. Естественно ожидать, что если для всех допустимых $\xi(\mathbf{r})$ потенциальная энергия системы возрастает ($U\{\xi\} > 0$), то положение равновесия устойчиво. Однако принятое в [1] определение устойчивости, не налагающее ограничений на производные $\partial\xi/\partial x_k$, не позволяет доказать это утверждение. При принятом в [1] определении устойчивости допускаются большие возмущения $\partial\xi/\partial x_k$, в частности, большие возмущения потенциальной энергии системы. Отметим, что аналогичное положение имеет место и при исследовании устойчивости упругих систем [2].

В предлагаемой работе дается определение устойчивости положения равновесия идеально проводящей жидкости, отличающееся от определения устойчивости, принятого в [1], и устанавливаются достаточные и необходимые критерии устойчивости, примыкающие к известным критериям энергетического принципа [3-5].

1. Уравнения движения для малых смещений $\xi(\mathbf{r}, t)$ жидкости от положения равновесия имеют вид [3-5]

$$\rho\ddot{\xi}_i = F_i(\xi) + f_i(\dot{\xi}) \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

где

$$\mathbf{F}(\xi) = \nabla(\xi\nabla p) + \gamma\nabla(p \operatorname{div} \xi) - $$
$$- \frac{1}{4\pi}\mathbf{H} \times \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\xi \times \mathbf{H}) + \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}\mathbf{H} \times \operatorname{rot}(\xi \times \mathbf{H}) \tag{1.2}$$

$$f_i(\mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\zeta\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) \tag{1.3}$$

Здесь ρ, p и $\mathbf{H}$ — равновесные значения плотности и давления жидкости и напряженности магнитного поля, γ — показатель адиабаты, η и ζ — коэффициенты вязкости, $\mathbf{v} = \dot{\xi}$ — скорость элемента жидкости, δ_{ik} — символ Кронекера.

Для того чтобы не рассматривать возмущения магнитного поля в области, не занятой жидкостью, примем, что $\xi = 0$ на поверхности S, ограничивающей объем V, занимаемый жидкостью.

Обозначим через $\xi(t, \mathbf{r}, \xi_0(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0(\mathbf{r}))$ решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям и начальным условиям $\xi = \xi_0(\mathbf{r})$, $\dot{\xi} = \dot{\xi}_0(\mathbf{r})$ при $t = 0$. Будем далее считать, что уравнение (1.1) имеет дважды непрерывно дифференцируемые по x_k решения, определенные при всех $t \geqslant 0$, если $\xi_0(\mathbf{r})$ и $\dot{\xi}_0(\mathbf{r})$ дважды непрерывно дифференцируемы по x_k.

Заметим, что всюду далее начальные данные $\xi_0(\mathbf{r})$ и $\dot{\xi}_0(\mathbf{r})$ дважды непрерывно дифференцируемы по x_k ($k = 1, 2, 3$), хотя это и не оговаривается.

Тогда из (1.1) находим, что

$$\frac{dE}{dt} = -W \leqslant 0 \qquad (E\{\xi, \dot\xi\} = T\{\dot\xi\} + U\{\xi\}) \tag{1.4}$$

(T — кинетическая энергия, U — потенциальная энергия)

$$T\{\dot\xi\} = \frac{1}{2}\int \rho\dot\xi^2\, d\mathbf{r}, \qquad U\{\xi\} = -\frac{1}{2}\int \xi\mathbf{F}(\xi)\, d\mathbf{r} \tag{1.5}$$

$$W\{\mathbf{v}\} = -\int \mathbf{v}\mathbf{f}(\mathbf{v})\, d\mathbf{r} = \frac{1}{2}\int \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2 d\mathbf{r} + \int \zeta\left(\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2 d\mathbf{r} \tag{1.6}$$

В выражениях (1.5) и (1.6) интегрирование проводится по объему V. Функционал $U\{\xi\}$ содержит ξ, $\partial\xi / \partial x_k$, $\partial^2\xi / \partial x_i \partial x_k$. Однако интегрированием по частям нетрудно убедиться, используя обращение ξ в нуль на S, что производные второго порядка $\partial^2\xi / \partial x_i\, \partial x_k$ не содержатся в $U\{\xi\}$. Очевидно, что $T(0) = U(0) = 0$.

2. Обозначим

$$\rho_1\{\xi(\mathbf{r})\} = \int \xi^2\, d\mathbf{r} + \alpha\sum_{k=1}^{3}\int\left(\frac{\partial\xi}{\partial x_k}\right)^2 d\mathbf{r}, \qquad \rho_2\{\dot\xi(\mathbf{r})\} = \int \rho\dot\xi^2\, d\mathbf{r} \tag{2.1}$$

В выражениях (2.1) интегрирование проводится по объему V, $\partial\xi / \partial x_k$ — вектор с координатами $\partial\xi_i / \partial x_k$, коэффициент размерности α — положительная постоянная. Отметим, что под знаком интегралов, определяющих ρ_1, можно было бы ввести положительные весовые функции, выбор которых определяется из физических соображений.

Заметим, что всюду далее числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ ограничены сверху некоторым числом $\sigma > 0$, хотя это и не оговаривается. Дадим теперь определения устойчивости и неустойчивости положения равновесия.

Определение 2.1. Положение равновесия устойчиво, если по любым $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ найдутся такие $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, что если

$$\rho_1\{\xi_0(\mathbf{r})\} < \delta_1, \qquad \rho_2\{\dot\xi_0(\mathbf{r})\} < \delta_2 \tag{2.2}$$

то при всех $t \geqslant 0$ будет

$$\rho_1\{\xi(t, \mathbf{r}, \xi_0(\mathbf{r}), \dot\xi_0(\mathbf{r}))\} < \varepsilon_1, \qquad \rho_2\{\dot\xi(t, \mathbf{r}, \xi_0(\mathbf{r}), \dot\xi_0(\mathbf{r}))\} < \varepsilon_2 \tag{2.3}$$

Определение 2.2. Положение равновесия неустойчиво, если существует хотя бы одно из чисел $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ таких, что какие бы (сколь угодно малые) $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ ни взять, всегда существуют такие

$$\xi_0(\mathbf{r}),\ \dot\xi_0(\mathbf{r}),\ \rho_1\{\xi_0(\mathbf{r})\} < \delta_1,\ \rho_2\{\dot\xi_0(\mathbf{r})\} < \delta_2$$

что будет выполняться хотя бы одно из неравенств

$$\rho_1\{\xi(t, \mathbf{r}, \xi_0(\mathbf{r}), \dot\xi_0(\mathbf{r}))\} \geqslant \varepsilon_1, \qquad \rho_2\{\dot\xi(t, \mathbf{r}, \xi_0(\mathbf{r}), \dot\xi_0(\mathbf{r}))\} \geqslant \varepsilon_2 \tag{2.4}$$

хотя бы для одного значения $t \geqslant 0$.

Определение 2.3. Функционал $V\{\xi(\mathbf{r}), \dot\xi(\mathbf{r})\}$ называется определенно положительным по метрике $\rho\{\xi, \dot\xi\}$, если $V\{\xi, \dot\xi\} \geqslant 0$ для любых допустимых $\xi(\mathbf{r})$ и $\dot\xi(\mathbf{r})$ и если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное $\lambda = \lambda(\varepsilon)$, зависящее только от ε, что оценка $V\{\xi, \dot\xi\} \geqslant \lambda$ выполняется для любых $\xi(\mathbf{r})$, $\dot\xi(\mathbf{r})$, удовлетворяющих условию $\rho\{\xi(\mathbf{r}), \xi(\mathbf{r})\} \geqslant \varepsilon$.

Функционал $T\{\dot\xi(\mathbf{r})\}$ определенно положителен по метрике $\rho_2\{\dot\xi(\mathbf{r})\}$.

3. Рассмотрим теперь условия устойчивости положения равновесия идеально проводящей невязкой жидкости ($\eta = \zeta = 0$).

Теорема 3.1 (*Необходимое условие устойчивости*). Для того чтобы положение равновесия идеально проводящей невязкой жидкости было устойчиво, необходимо, чтобы было $U\{\xi\} \geqslant 0$ для всех допустимых $\xi(\mathbf{r})$ (ξ дважды непрерывно дифференцируемы по x_k и $\xi = 0$ на S).

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1 работы [1].

Следствие. (*Достаточное условие неустойчивости.*) Из теоремы 3.1 следует, что если существуют такие $\xi(\mathbf{r})$, что $U\{\xi(\mathbf{r})\} < 0$, то положение равновесия идеально проводящей невязкой жидкости неустойчиво.

Теорема 3.2 (*Достаточное условие устойчивости*). Если $U\{\xi\}$ является определенно положительным функционалом по метрике $\rho_1\{\xi\}$, то положение равновесия идеально проводящей невязкой жидкости устойчиво.

Доказательство. Выберем $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ и покажем, что можно найти соответствующие (в смысле определения 2.1) $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$.

Так как $U\{\xi\}$ и $T\{\dot{\xi}\}$ являются определенно положительными функционалами соответственно по метрикам $\rho_1\{\xi\}$ и $\rho_2\{\dot{\xi}\}$, то по данным $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ найдутся такие $\lambda_1(\varepsilon_1) > 0$, $\lambda_2(\varepsilon_2) > 0$, что будет

$$U\{\xi(\mathbf{r})\} \geqslant \lambda_1, \qquad T\{\dot{\xi}(\mathbf{r})\} \geqslant \lambda_2 \quad \text{при } \rho_1\{\xi(\mathbf{r})\} \geqslant \varepsilon_1, \ \rho_2\{\dot{\xi}(\mathbf{r})\} \geqslant \varepsilon_2 \tag{3.1}$$

Положим $\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2)$ и

$$V\{\xi, \dot{\xi}\} = T\{\dot{\xi}\} + U\{\xi\} \tag{3.2}$$

Так как $V \to 0$ при $\rho_1\{\xi\} \to 0$, $\rho_2\{\dot{\xi}\} \to 0$, то по $\lambda > 0$ найдутся такие $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ ($\delta_1 \leqslant \varepsilon_1$, $\delta_2 \leqslant \varepsilon_2$), что

$$V\{\xi, \dot{\xi}\} < \lambda \quad \text{при } \rho_1\{\xi\} < \delta_1, \ \rho_2\{\dot{\xi}\} < \delta_2 \tag{3.3}$$

Покажем, что найденные $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ соответствуют выбранным $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ в смысле определения 2.1.

Предположим противоположное, т. е. что в некоторый момент времени $t = \tau$ будет выполняться хотя бы одно из неравенств

$$\rho_1\{\xi(\tau, \mathbf{r}, \xi_0(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0(\mathbf{r}))\} \geqslant \varepsilon_1, \qquad \rho_2\{\dot{\xi}(\tau, \mathbf{r}, \xi_0(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0(\mathbf{r}))\} \geqslant \varepsilon_2 \tag{3.4}$$

где

$$\rho_1\{\xi_0(\mathbf{r})\} < \delta_1, \qquad \rho_2\{\dot{\xi}_0(\mathbf{r})\} < \delta_2$$

Тогда будет выполняться неравенство

$$V\{\xi(\tau, \mathbf{r}, \xi_0(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0(\mathbf{r})), \ \dot{\xi}(\tau, \mathbf{r}, \xi_0(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0(\mathbf{r}))\} \geqslant \lambda \tag{3.5}$$

С другой стороны, согласно (1.4) при $t \geqslant 0$

$$V\{\xi(t, \mathbf{r}, \xi_0(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0(\mathbf{r})), \ \dot{\xi}(t, \mathbf{r}, \xi_0(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0(\mathbf{r}))\} = V\{\xi_0(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0(\mathbf{r})\} \tag{3.6}$$

так как $W \equiv 0$. Отсюда имеем, что

$$V\{\xi(t, \mathbf{r}, \xi_0(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0(\mathbf{r})), \ \dot{\xi}(t, \mathbf{r}, \xi_0(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0(\mathbf{r}))\} < \lambda \tag{3.7}$$

так как

$$\rho_1\{\xi_0(\mathbf{r})\} < \delta_1, \qquad \rho_2\{\dot{\xi}_0(\mathbf{r})\} < \delta_2$$

Полученное противоречие показывает, что ни одно из неравенств (3.4) не может выполняться. Следовательно, при всех $t \geqslant 0$ будет

$$\rho_1\{\xi(t, \mathbf{r}, \xi_0(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0(\mathbf{r}))\} < \varepsilon_1, \qquad \rho_2\{\dot{\xi}(t, \mathbf{r}, \xi_0(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0(\mathbf{r}))\} < \varepsilon_2 \tag{3.8}$$

т. е. положение равновесия устойчиво. Теорема доказана.

Отметим, что аналогично можно доказать при $U\{\xi\} > 0$ устойчивость положения равновесия для определения устойчивости равновесия, принятого в [1], по отношению к достаточно гладким начальным возмущениям ($|\partial\xi_0|\,\partial x_i\,| < \sigma_1$, $|\,\partial^2\xi_0\,|\,\partial x_i\,\partial x_k\,| < \sigma_2$, где σ_1 и σ_2 — постоянные).

Теорема 3.2 аналогична известной теореме Лагранжа [6], обобщение которой предложено А. А. Мовчаном при исследовании устойчивости упругих систем [2] и сплошных тел [7].

Очевидно, что состояние равновесия идеально проводящей невязкой жидкости не может быть асимптотически устойчиво.

4. Рассмотрим теперь случай вязкой идеально проводящей жидкости. Отметим, что влияние вязкости на устойчивость положения равновесия несжимаемой жидкости рассматривал методом нормальных волн Хэйр [8].

Теорема 4.1 (*Достаточное условие неустойчивости*). Если существует $\xi(\mathbf{r})$ такое, что $U\{\xi(\mathbf{r})\} < 0$, то положение равновесия неустойчиво и при наличии вязкости.

Доказательство. Предположим, что состояние равновесия устойчиво. Выберем $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$, тогда существуют $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, такие, что если

$$\rho_1\{\xi_0(\mathbf{r})\} < \delta_1, \qquad \rho_2\{\dot{\xi}_0(\mathbf{r})\} < \delta_2 \tag{4.1}$$

то

$$\rho_1\{\xi(t, \mathbf{r}, \xi_0(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0(\mathbf{r}))\} < \varepsilon_1, \qquad \rho_2\{\dot{\xi}(t, \mathbf{r}, \xi_0(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0(\mathbf{r}))\} < \varepsilon_2 \quad \text{при } t \geqslant 0 \tag{4.2}$$

Положим

$$V\{\xi, \dot{\xi}\} = \int \rho\xi\dot{\xi}d\mathbf{r} + \frac{1}{4}\int \eta \left(\frac{\partial\xi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial\xi_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\,\delta_{ik}\frac{\partial\xi_l}{\partial x_l}\right)^2 d\mathbf{r} + \frac{1}{2}\int \zeta \left(\frac{\partial\xi_l}{\partial x_l}\right)^2 d\mathbf{r} \tag{4.3}$$

где интегрирование проводится по объему V.

Если ξ решение уравнения (1.1), то

$$\frac{dV}{dt} = 2(T - U) \tag{4.4}$$

Существуют $\xi_0^*(\mathbf{r})$ и $\dot{\xi}_0^*(\mathbf{r})$ такие, что

$$\rho\{\xi_0^*(\mathbf{r})\} < \delta_1, \quad \rho_2\{\xi_0^*(\mathbf{r})\} < \delta_2 \tag{4.5}$$

$$\mu = -T\{\dot{\xi}_0^*(\mathbf{r})\} - U\{\xi_0^*(\mathbf{r})\} > 0, \qquad V\{\xi_0^*(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0^*(\mathbf{r})\} > 0$$

Так как при $t \geqslant 0$

$$\rho_1\{\xi(t, \mathbf{r}, \xi_0^*(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0^*(\mathbf{r}))\} < \varepsilon_1, \qquad \rho_2\{\dot{\xi}(t, \mathbf{r}, \xi_0^*(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0^*(\mathbf{r}))\} < \varepsilon_2 \tag{4.6}$$

то существует $\lambda > 0$ такое, что при $t \geqslant 0$

$$V\{\xi(t, \mathbf{r}, \xi_0^*(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0^*(\mathbf{r})), \dot{\xi}(t, \mathbf{r}, \xi_0^*(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0^*(\mathbf{r}))\} < \lambda \tag{4.7}$$

С другой стороны, так как при $t \geqslant 0$

$$T\{\dot{\xi}(t, \mathbf{r}, \xi_0^*(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0^*(\mathbf{r}))\} + U\{\xi(t, \mathbf{r}, \xi_0^*(\mathbf{r}), \dot{\xi}_0^*(\mathbf{r}))\} \leqslant -\mu < 0 \tag{4.8}$$

получим, что при $t \geqslant 0$

$$\frac{d}{dt} V \{\xi (t, \mathbf{r}, \xi_0^* (\mathbf{r}), \dot{\xi}_0^* (\mathbf{r})), \dot{\xi} (t, \mathbf{r}, \xi_0^* (\mathbf{r}), \dot{\xi}_0^* (\mathbf{r}))\} \geqslant 2\mu > 0 \qquad (4.9)$$

Следовательно, при $t \to +\infty$

$$V \{\xi (t, \mathbf{r}, \xi_0^* (\mathbf{r}), \dot{\xi}_0^* (\mathbf{r})), \dot{\xi} (t, \mathbf{r}, \xi_0^* (\mathbf{r}), \dot{\xi}_0^* (\mathbf{r}))\} \to +\infty \qquad (4.10)$$

что противоречит (4.7). Полученное противоречие показывает, что сделанное предположение о том, что состояние равновесия устойчиво, неверно. Теорема доказана.

Замечание. Теорема 2 (достаточное условие неустойчивости) в работе [1] неверна, так как в ее доказательстве допущена ошибка (из выполнения неравенств

$$\|\xi (t, \mathbf{r}, \xi_0^* (\mathbf{r}), \dot{\xi}_0^* (\mathbf{r}))\| < \varepsilon_1, \ \|\dot{\xi} (t, \mathbf{r}, \xi_0^* (\mathbf{r}), \dot{\xi}_0^* (\mathbf{r}))\| < \varepsilon_2 \quad \text{при } t \geqslant 0$$

не следует неравенство (15) работы [1]).

Однако, теорема остается справедливой, если:

1) изменить определение устойчивости положения равновесия так, как это сделано в настоящей работе, или

2) оставить определение устойчивости положения равновесия таким же, как в [1], но предположить, что $|\partial \xi_i / \partial x_k|$ $(i, k = 1, 2, 3)$ меньше некоторой постоянной величины.

Следствие. (*Необходимое условие устойчивости.*) Для того чтобы положение равновесия идеально проводящей вязкой жидкости было устойчиво, необходимо, чтобы было $U \{\xi (\mathbf{r})\} \geqslant 0$ для всех допустимых $\xi (\mathbf{r})$.

Теорема 4.2 (*Достаточное условие устойчивости*). Если $U \{\xi\}$ является определенно положительным функционалом по метрике $\rho_1 \{\xi\}$, то положение равновесия устойчиво и при наличии вязкости.

Доказательство теоремы 4.2 проводится аналогично доказательству теоремы 3.2 с использованием функционала (3.2). Только вместо равенства (3.6) будет иметь место следующее неравенство:

$$V \{\xi (t, \mathbf{r}, \xi_0 (\mathbf{r}), \dot{\xi}_0 (\mathbf{r})), \dot{\xi} (t, \mathbf{r}, \xi_0 (\mathbf{r}), \dot{\xi}_0 (\mathbf{r}))\} \leqslant V \{\xi_0 (\mathbf{r}), \dot{\xi}_0 (\mathbf{r})\} \qquad (4.11)$$

а поэтому по-прежнему будет иметь место неравенство (3.7).

Теоремы 4.1, 4.2 аналогичны известным теоремам Кельвина [6] о влиянии диссипативных сил на устойчивость состояния равновесия системы материальных точек.

Поступила 2 XII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов К. Н., Хоменюк В. В. Замечания к энергетическому принципу в магнитной гидродинамике. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 4.
2. Мовчан А. А. О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 3.
3. Hein K., Lüst R., Schlüter A. Zur Stabilitäts eines Plasmas. Zeitschr. Naturforsch, 1957, B. 12a, H. 10.
4. Bernstein I. B., Frieman E. A., Kruskal M. D., Kulsrud R. M. An energie principle for hydromagnetic stability problems. Proc. Roy. Soc., 1958, v. A 244, № 1236.
5. Брагинский С. И., Кадомцев Б. Б. Стабилизация плазмы с помощью охраняющих проводников. Статья в сб. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М., Изд-во АН СССР, 1958, т. III, стр. 300—326.
6. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М., Гостехиздат, 1955.
7. Мовчан А. А. Об устойчивости движения сплошных тел. Теорема Лагранжа и ее обращение. Инж. сб., 1960, т. 29.
8. Hare A. The effect of visconsity on the stability of incompressible magnetohydrodynamic systems. Phil. Mag., 1959, v. 4, № 48.