Прикладная математика и механика. Том XXVI. 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ВЫЧИСЛЕНИИ И ИССЛЕДОВАНИИ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ХИЛЛА

Г. Ф. Филимонов

(Москва)

Путем прямого решения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений получены разложения и оценки для коэффициентов Фурье частных решений обобщенного уравнения Хилла, найдены условия сходимости. Обсуждена практическая применимость разных форм частных решений и разных способов записи бесконечных систем. Выведено замкнутое выражение для характеристического уравнения, содержащее только одну неизвестную μ.

1. Одним из наиболее распространенных способов решения обобщенного уравнения Хилла

$$\frac{d^2}{d\tau^2} y(\tau) + \Psi(\tau) y(\tau) = 0, \qquad \Psi(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \theta_m \cos(2m\tau + \varepsilon_m) \tag{1.1}$$

является представление его частных решений $y_k = y_k(\tau)$ $(k = 1, 2)$ в виде разложений по всем возможным произведениям параметров θ_m.

Эти решения получены методом последовательных приближений, примененным непосредственно к уравнению (1.1). Однако приведенные способы построения последующих приближений по предыдущим обычно [1-3] не дают возможности исследовать сходимость найденных для $y_k(\tau)$ рядов. Ниже для вычисления разложений $y_k(\tau)$ применяется метод последовательных приближений непосредственно к системам бесконечных алгебраических уравнений, к которым можно свести уравнение (1.1); при этом определяются критерии сходимости рядов, получающихся для $y_k(\tau)$.

2. Рассмотрим бесконечные системы уравнений. Для вычисления $y_k(\tau)$ можно выбрать следующие выражения в качестве исходных.

Первое — формула Флоке [1]

$$y_k(\tau) = e^{\mu_k \tau} \Phi_k(\tau) \qquad (k = 1, 2) \tag{2.1}$$

Второе является линейной комбинацией формул (2.1)

$$y_1(\tau) = \Phi_1(\tau) \cos \nu\tau - \Phi_2(\tau) \sin \nu\tau, \quad y_2(\tau) = \Phi_1(\tau) \sin \nu\tau + \Phi_2(\tau) \cos \nu\tau \tag{2.2}$$

если в (2.1) положить $\mu_1 = -\mu_2 = i\nu$.

В (2.1), (2.2) периодические функции $\Phi_k(\tau)$ можно представить в виде

$$\Phi_k(\tau) = C_k + \sum_{q=-\infty}^{\infty} \Delta(q;\ -n/2)\, A_{kq} \sin[(n+2q)\tau + \varphi_{kq}] \tag{2.3}$$

или

$$\Phi_k(\tau) = C_k + \sum_{q=-\infty}^{\infty} \Delta(q, -n/2)\, [c_{kq} \sin(n+2q)\tau + s_{kq} \cos(n+2q)\tau]$$

$$(c_{kq} = A_{kq} \cos \varphi_{kq}, \quad s_{kq} = A_{kq} \sin \varphi_{kq}) \tag{2.4}$$

Здесь n — целое число, определяющее номер области устойчивых и неустойчивых решений уравнения (1.1); символ

$$\Delta(q; r, s, \ldots, t) = (1-\delta_{qr})(1-\delta_{qs})\ldots(1-\delta_{qt}) \qquad \begin{pmatrix} \delta_{\lambda\nu}=0 \text{ при } \lambda \neq \nu \\ \delta_{\lambda\nu}=1 \text{ при } \lambda = \nu \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

В (1.1), (2.3), (2.4) при записи рядов Фурье предполагается

$$\theta_{-m} = \theta_m, \qquad \varepsilon_{-m} = -\varepsilon_m, \qquad A_{k,\,-n-q} = A_{kq}, \qquad \varphi_{k,\,-n-q} = \pi - \varphi_{kq} \tag{2.6}$$

Таким образом, искомыми будут величины A_{kq}, φ_{kq}, c_{kq}, s_{kq}, индексы которых удовлетворяют неравенству

$$n + 2q > 0 \tag{2.7}$$

Комбинируя (2.3) (или (2.4)) с (2.1) (или (2.2)), можно получить разные выражения для $y_k(\tau)$. Каждому из них соответствует своя бесконечная система алгебраических уравнений[1].

Прямая подстановка в (1.1) показывает, что для функций $\Phi_k(\tau)$, определенных при помощи (2.3), уравнение (1.1) сводится к системе

$$I_q A_q = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Delta(m;\ q, -n-q)\, \zeta_{qm}(\varphi_m - \varphi_q + \pi/2)\, A_m \tag{2.8}$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_q - \psi_q) = \frac{\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \Delta(m;\ q, -n-q)\,[\zeta_{qm}(\varphi_m - \psi_q) + r_q \zeta_{qm}(\varphi_m - \psi_q + \pi/2)]\, A_m}{\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \Delta(m;\ q, -n-q)\,[\zeta_{qm}(\varphi_m - \psi_q + \pi/2) - r_q \zeta_{qm}(\varphi_m - \psi_q)]\, A_m} \tag{2.9}$$

$$C = -\delta_{n,\,2N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Delta(m;\ -n/2)\, A_m \frac{\theta_{N+m}}{\theta_0 + \mu^2} \sin(\varphi_m + \varepsilon_{N+m}) \tag{2.10}$$

а для функций $\Phi_k(\tau)$, определенных при помощи (2.4), к системе

$$\begin{aligned} L_q s_q &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Delta(m;\ q, -n-q)\,[\alpha_{qm} s_m + \beta_{qm} c_m] \\ L_q c_q &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Delta(m;\ q, -n-q)\,[\gamma_{qm} s_m + \varkappa_{qm} c_m] \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$C = -\delta_{n,\,2N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Delta(m;\ -n/2) \frac{\theta_{N+m}}{\theta_0 - \nu^2} [s_m \cos\varepsilon_{N+m} + c_m \sin\varepsilon_{N+m}] \tag{2.12}$$

В (2.8) — (2.12) у A_{kq}, φ_{kq}, c_{kq}, s_{kq}, C_k опущен индекс k; индекс

$$N = \frac{1}{4}[2n - 1 + (-1)^n] \tag{2.13}$$

Коэффициенты $\zeta_{qm}(x)$, r_q, ψ_q, I_q, α_{qm}, β_{qm}, γ_{qm}, $\varkappa_{qm}$, L_q приведены ниже для каждого конкретного случая.

---

[1] Представление

$$\Phi_k(\tau) = C_k + \sum_{q=-\infty}^{\infty} \Delta(q;\ -n/2)\,[b_{kq}^{(+)} e^{i(n+2q)\tau} + b_{kq}^{(-)} e^{-i(n+2q)\tau}]$$

не рассматривается: особых преимуществ оно не имеет.

Системы (2.8), (2.11) однородны. Поэтому неизвестные A_q и c_q, s_q могут определяться с точностью до произвольного коэффициента; обычно полагают одну из амплитуд

$$A_{p_0} = 1 \tag{2.14}$$

Индекс p_0 удобно выбрать из условия $|I_{p_0}| < |I_p|$ или $|L_{p_0}| < |L_p|$, если $p_0 \neq p$. В большом числе случаев эти условия соответствуют $p_0 = 0$, если $n \neq 0$, и $p_0 = 1$, если $n = 0$.

Условие (2.14) выделяет из систем (2.8) — (2.10) и (2.11) — (2.12) по два уравнения, соответствующие $q = p_0$. Они играют роль характеристических и служат для определения μ и φ_0.

В процессе вычислений A_q, φ_q (или c_q, s_q) характеристические уравнения следует считать из систем (2.8) — (2.10) и (2.11) — (2.12) изъятыми, т. е. $q \neq p_0$, $q \neq -n - p_0$.

Соответствующие индексам $m = p_0$ и $m = -n - p_0$ члены сумм, входящих в правые части (2.8), (2.11), нужно выделить, так как они будут неоднородными членами уравнений.

Система (2.8) будет регулярной, если

$$1 > \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Delta(m;\ p_0,\ q,\ -n-p_0,\ -n-q) \left| \frac{\zeta_{qm}(\varphi_m - \varphi_q + \pi/2)}{I_m} \right| \tag{2.15}$$

Система (2.11) будет регулярной, если

$$\begin{gathered} 1 > \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Delta(m;\ p_0,\ q,\ -n-p_0,\ -n-q)\ \frac{|\alpha_{qm}| + |\beta_{qm}|}{|L_m|} \\ 1 > \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Delta(m;\ p_0,\ q,\ -n-p_0,\ -n-q)\ \frac{|\gamma_{qm}| + |\varkappa_{qm}|}{|L_m|} \end{gathered} \tag{2.16}$$

При соблюдении условий (2.15), (2.16) все разложения для A_q и c_q, s_q, полученные путем решения (2.8) и, соответственно, (2.11) методом последовательных приближений, будут сходиться абсолютно [4].

Неравенства (2.15) и (2.16) неодинаковы по своей жесткости, например, для случая $\Theta_m \to 0$, $m \neq 0$, можно показать, что (2.51) мягче неравенства (2.16).

Неравенства (2.15) и (2.16) дают абсолютные критерии сходимости. Можно доказать, что при одновременном выполнении (2.15) и (2.16) правильным является наиболее мягкий из (2.15), (2.16) критерий сходимости.

Ниже (см. (5.13)) для случая убывания θ_m по геометрической прогрессии с ростом $|m|$ найден необходимый критерий сходимости решений системы (2.8), (2.9).

Сравнивая (5.13) с (2.15), можно убедиться, что эти условия не сильно отличаются друг от друга.

Предлагаемые способы вычисления $y_k(\tau)$ родственны методу Уиттекера (см. [1], стр. 253). Особое место среди них занимает решение (2.2), (2.4). Оно содержит замкнутое характеристическое уравнение и допускает независимое вычисление характеристического числа ν и коэффициентов Фурье c_{kq}, s_{kq}.

3. Рассмотрим решение (2.2), (2.4). В этом случае получаем систему уравнений (2.11) — (2.12), коэффициенты которой равны

$$\alpha_{qm} = \varkappa_{qm} = \zeta_{qm}(\pi/2), \qquad \beta_{qm} = -\gamma_{qm} = \zeta_{qm}(0) \tag{3.1}$$

Здесь

$$\zeta_{qm}(x) = \left(1 + \frac{n+2q}{M_q}\frac{M_m}{n+2m}\right)\Delta(m;\, q,\, -n/2)\,[\theta_{q-m}\sin(x+\varepsilon_{m-q}) - $$
$$- \lambda_{qm}\sin(x + \varepsilon_{N+m} - \varepsilon_{N+q})]$$

$$-\Delta(m;\, -n/2)\sum_{p=-\infty}^{\infty}\frac{\Delta(p;\, q, m, -n/2)}{n+2p}\frac{n+2q}{M_q}[\theta_{p-m}\theta_{q-p}\sin(x+\varepsilon_{m-p}+\varepsilon_{p-q}) +$$
$$+ \lambda_{pp}\lambda_{qm}\sin(x+\varepsilon_{N+m}-\varepsilon_{N+q}) - \theta_{p-m}\lambda_{pq}\sin(x+\varepsilon_{m-p}+\varepsilon_{N+p}-\varepsilon_{N+q}) -$$
$$- \theta_{q-p}\lambda_{pm}\sin(x+\varepsilon_{p-q}+\varepsilon_{N+m}-\varepsilon_{N+p})]$$

$$M_q = (n+2q)^2 - \theta_0 + \nu^2 + \lambda_{qq}, \qquad \lambda_{qm} = \delta_{n,\,2N}\frac{\theta_{N+m}\theta_{N+q}}{\theta_0 - \nu^2} \tag{3.2}$$
$$L_q = M_q - 4\nu^2\frac{(n+2q)^2}{M_q} - \zeta_{qq}(\pi/2)$$

В решениях (2.2) произвольно задавать можно только одну амплитуду, например A_{1p_0}. Поэтому, выбрав A_{1p_0} согласно (2.14), амплитуду A_{2p_0} следует вычислять при помощи вытекающих из (1.1) равенств

$$2\nu(n+2q)\,A_{2q}\sin(x+\varphi_{2q}) = M_q A_{1q}\cos(x+\varphi_{1q}) - \tag{3.3}$$
$$-\sum_{m=-\infty}^{\infty}\Delta(m;\, q,\, -n/2)\,A_{1m}[\theta_{q-m}\cos(x+\varphi_{1m}+\varepsilon_{m-q}) -$$
$$- \lambda_{qm}\cos(x+\varphi_{1m}+\varepsilon_{N+m}-\varepsilon_{N+q})]$$

Фаза x в равенствах (3.2), (3.3) произвольна. Решение системы (2.11), (3.1), (3.2) можно найти путем последовательного исключения неизвестных c_q, s_q из уравнений (2.11). В результате получаем выражения

$$L_q^{(\infty)}c_q = \Delta(q;\, p_0)\,(\gamma_{qp_0}^{(\infty)}s_{p_0} + \varkappa_{qp_0}^{(\infty)}c_{p_0})$$
$$L_q^{(\infty)}s_q = \Delta(q;\, p_0)\,(\alpha_{qp_0}^{(\infty)}s_{p_0} + \beta_{qp_0}^{\infty}c_{p_0}) \tag{3.4}$$

в которых коэффициенты определяются рекуррентными формулами

$$\alpha_{qm}^{(k+1)} = \alpha_{qm}^{(k)} + \frac{\Delta(p_k;\, q)}{L_{p_k}^{(k)}}[\alpha_{qp_k}^{(k)}\alpha_{p_km}^{(k)} + \beta_{qp_k}^{(k)}\gamma_{p_km}^{(k)}]$$
$$\beta_{qm}^{(k+1)} = \beta_{qm}^{(k)} + \frac{\Delta(p_k;\, q)}{L_{p_k}^{(k)}}[\alpha_{qp_k}^{(k)}\beta_{p_km}^{(k)} + \beta_{qp_k}^{(k)}\varkappa_{p_km}^{(k)}]$$
$$\gamma_{qm}^{(k+1)} = \gamma_{qm}^{(k)} + \frac{\Delta(p_k;\, q)}{L_{p_k}^{(k)}}[\gamma_{qp_k}^{(k)}\alpha_{p_km}^{(k)} + \varkappa_{qp_k}^{(k)}\gamma_{p_km}^{(k)}] \tag{3.5}$$
$$\varkappa_{qm}^{(k+1)} = \varkappa_{qm}^{(k)} + \frac{\Delta(p_k;\, q)}{L_{p_k}^{(k)}}[\varkappa_{qp_k}^{(k)}\varkappa_{p_km}^{(k)} + \gamma_{qp_k}^{(k)}\beta_{p_km}^{(k)}]$$

$$L_q^{(k+1)} = L_q^{(k)} - \Delta(q;\, p_1, p_2, \ldots, p_k)\,[\alpha_{qq}^{(k+1)} - \alpha_{qq}^{(k)}],\ L_q^{(0)} = L_q$$
$$\alpha_{qm}^{(0)} = \zeta_{qm}(\pi/2) + \zeta_{q,\,-n-m}(\pi/2), \qquad \gamma_{qm}^{(0)} = -\zeta_{qm}(0) - \zeta_{q,\,-n-m}(0)$$
$$\beta_{qm}^{(0)} = \zeta_{qm}(0) - \zeta_{q,\,-n-m}(0), \qquad \varkappa_{qm}^{(0)} = \zeta_{qm}(\pi/2) - \zeta_{q,\,-n-m}(\pi/2)$$

В (3.4), (3.5) индексы $p_k \neq p_j$, если $k \neq j$; набор p_k совпадает с набором чисел $N+1-n$, $N+2-n, \ldots$

Последовательность изменения p_k в зависимости от индекса k произвольна и определяется порядком исключения c_q, s_q из системы (2.11): сначала исключаются c_{p_1}, s_{p_1}, затем c_{p_2}, s_{p_2} и т. д.

Практически c_q, s_q удобнее исключать, начиная с наибольших амплитуд.

В равенствах (2.11) и (3.4) номеру $q = p_0$ соответствуют два уравнения, которые остаются последними при последовательном исключении c_q, s_q. Эти уравнения играют роль характеристических.

Из (3.4) видно, что при $q = p_0$ правая часть (3.4) обращается в нуль. Если $A_{p_0} \neq 0$, величины c_{p_0}, s_{p_0} одновременно не могут обратиться в нуль (см. (2.4)). Поэтому фаза φ_{p_0} произвольна[1], а характеристическое уравнение имеет вид

$$L_{p_0}^{(\infty)} = L_{p_0} - \sum_{p_k=N+1-n}^{\infty} \Delta(p_k; p_0) \frac{1}{L_{p_k}^{(k)}} [\alpha_{p_0 p_k}^{(k)} \alpha_{p_k p_0}^{(k)} + \beta_{p_0 p_k}^{(k)} \gamma_{p_k p_0}^{(k)}] = 0 \quad (3.6)$$

Оно содержит только одну незвестную ν. Поэтому решение (3.6) можно искать независимо от вычисления c_q, s_q. В качестве примера ниже приведены приближенные выражения корней (3.6) для случая

$$|\sqrt{\theta_0} - m| \gg \theta_1, \qquad |m| = 0, 1, \ldots$$

В нулевом приближении

$$\nu_0 = n + 2p_0 - \left(\theta_0 + \frac{\delta_{n,\,2N}\theta_1^2}{(n+2p_0)(n+2p_0-2\sqrt{\theta_0})}\right)^{1/2} \quad (3.7)$$

В первом приближении

$$\begin{aligned} \nu^2 &= \nu_0^2 - \frac{\theta_1^2}{2\sqrt{\theta_0}(1+\sqrt{\theta_0})}, \quad n = 1, \quad p_0 = 0 \\ \nu^2 &= \nu_0^2 - \nu_0 \frac{\theta_1^2}{4\sqrt{\theta_0}(1+\sqrt{\theta_0})}, \quad n = 2, \quad p_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Известно [1], что детерминант Хилла (детерминант системы (2.11)) имеет бесконечное количество корней, в то время как (1.1) не может иметь более двух характеристических показателей. Формула (3.7) показывает, что появление тех или иных корней детерминанта Хилла в качестве характеристических показателей определяется способом решения (1.1).

В частности, при действительных τ, $\Psi(\tau)$ характеристические числа μ_k ($k = 1, 2$) решения (2.1) либо действительны, либо чисто мнимы. Доказательство этого утверждения несложно. При действительных τ и $\Psi(\tau)$ решениями (1.1) будут как $y_1(\tau)$, так и $y_1^*(\tau)$. Поэтому μ_1 и μ_1^* одновременно будут характеристическими показателями уравнения (1.1), и либо $\mu_1^* = \mu_1$, либо $\mu_1^* = \mu_2 = -\mu_1$.

Применение уравнения (3.6) требует вычисления сложных выражений (3.2) для $\zeta_{qm}(x)$. В тех случаях, когда ряд (1.1) для $\Psi(\tau)$ содержит конечное число членов, выражения (3.2) упрощаются. В других случаях входящие в (3.2) суммы можно представить при помощи известных тригонометрических рядов (см., например, [5] (1.445)) в виде определенных интегралов, вычисление которых может оказаться проще прямого суммирования.

Если же для коэффициентов (3.2) простые выражения найти не удается, применение разложений (3.4)—(3.5) для вычисления c_q, s_q становится нецелесообразным.

---

[1] Произвольно выбирается φ_{1p_0}; фазу φ_{2p_0} (как и A_{2p_0}) следует вычислять при помощи (3.3).

В этом случае, вычислив ν при помощи характеристического уравнения (3.6), для нахождения $y_k(\tau)$ можно использовать вместо (2.2), (2.4) другие решения, которые приводят к более простым, чем (3.1), (3.2), коэффициентам.

4. В качестве такого решения рассмотрим (2.1), (2.4). В этом случае коэффициенты α_{qm}, β_{qm}, γ_{qm}, $\varkappa_{qm}$ можно представить в виде комбинаций двух функций

$$\begin{aligned}
\alpha_{qm} &= \Delta(m;\ -n/2)\,[\xi_{qm}(\pi/2)+\sigma_{qm}(\pi/2)]\\
\beta_{qm} &= \Delta(m;\ -n/2)\,[-\xi_{qm}(0)-\sigma_{qm}(0)]\\
\gamma_{qm} &= \Delta(m;\ -n/2)\,[\xi_{qm}(0)-\sigma_{qm}(0)]\\
\varkappa_{qm} &= \Delta(m;\ -n/2)\,[\xi_{qm}(\pi/2)-\sigma_{qm}(\pi/2)]
\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
\xi_{qm}(x) = {}&(M_q+\lambda_{qq})\,[\theta_{q-m}\sin(x+\varepsilon_{q-m})-\lambda_{qm}\sin(x+\varepsilon_{N+q}-\varepsilon_{N+m})]-\\
&-2\mu(n+2q)\,[\theta_{q-m}\cos(x+\varepsilon_{q-m})-\lambda_{qm}\cos(x+\varepsilon_{N+q}-\varepsilon_{N+m})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{qm}(x) = {}&\theta_{n+2q}\,[\theta_{q-m}\sin(x+\varepsilon_{q-m}-\varepsilon_{n+2q})-\lambda_{qm}\sin(x+\varepsilon_{N+q}-\varepsilon_{N+m}-\varepsilon_{N+2q})]-\\
&-\lambda_{qq}\,[\theta_{q-m}\sin(x+\varepsilon_{q-m}-2\varepsilon_{N+q})-\lambda_{qm}\sin(x-\varepsilon_{N+q}-\varepsilon_{N+m})]
\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$M_q=(n+2q)^2-\theta_0-\mu^2, \qquad \lambda_{qm}=\delta_{n,\,2N}\,\frac{\theta_{N+q}\theta_{N+m}}{\theta_0+\mu^2}$$

$$L_q=M_q^2+4\mu^2(n+2q)^2+2\lambda_{qq}\,[M_q+\theta_{n+2q}\cos(\varepsilon_{N+2q}-2\varepsilon_{N+q})]-\theta_{n+2q}^2$$

Для того чтобы найти решение уравнений (2.11), (4.1), (4.2), запишем систему (2.11) в виде[1]

$$a_q=g_q+\sum_{m=-2N}^{\infty}\Delta(m;\ 0,\ 1)\,z_{qm}a_m \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
a_{2q} &= L_q c_q, & L_m z_{2q,\,2m} &= \Delta(m;\ q)\,[\varkappa_{qm}-\varkappa_{q,\,-n-m}]\\
a_{2q+1} &= L_q s_q, & L_m z_{2q,\,2m+1} &= \Delta(m;\ q)\,[\gamma_{qm}+\gamma_{q,\,-n-m}]\\
g_q &= a_0 z_{q0}+a_1 z_{q1}, & L_m z_{2q+1,\,2m} &= \Delta(m;\ q)\,[\beta_{qm}-\beta_{q,\,-n-m}]\\
& & L_m z_{2q+1,\,2m+1} &= \Delta(m;\ q)\,[\alpha_{qm}+\alpha_{q,\,-n-m}]
\end{aligned}$$

Для вычисления a_m при помощи (4.3) можно предложить разные варианты метода последовательных приближений. При соблюдении условия регулярности (2.16) все они приводят к одним и тем же значениям a_q (см. [4]). Однако наиболее удобным каждый из них оказывается только для определенного закона изменения чисел z_{qm} с ростом индексов q, m.

В качестве примера рассмотрим два простейших случая. Пусть θ_m — медленно меняющаяся последовательность чисел. В этом случае z_{qm} по порядку величины равняется $\theta_{q-m}L_m^{-1}$; величину a_q целесообразно искать в виде

$$z_{qm}=tU_{qm}, \qquad a_q=\sum_{k=0}^{\infty}a_{qk}t^k \tag{4.4}$$

Подставляя (4.4) в (4.3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, находим

$$\begin{aligned}
a_{qk} = g_q\delta_{k0}+\Delta(k;\ 0)\sum_{p_1=-2N}^{\infty}\Delta(p_1;\ 0,\ 1)\,U_{qp_1}\sum_{p_2=-2N}^{\infty}\Delta(p_2;\ 0,\ 1)\,U_{p_1p_2}\ldots\\
\ldots\sum_{p_k=-2N}^{\infty}\Delta(p_k;\ 0,\ 1)\,U_{p_{k-1}p_k}g_{p_k}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

[1] Для сокращения записи здесь и ниже принято $p_0=0$.

Формулы (4.4), (4.5) дают окончательные выражения для a_q, если входящую в них вспомогательную величину t положить $t = 1$.

Предположим теперь, что по порядку величины $\theta_m \sim x^{|m|}$ ($|m| = 0, 1, 2, \ldots$). В этом случае $z_{qm} \sim x^{|Q-M|}$ по порядку величины, и a_q удобно искать в виде[1]

$$z_{qm} = t^{|Q-M|} V_{qm}, \qquad g_q = t^{|Q|} G_q, \qquad a_q = \sum_{k=0}^{\infty} b_{qk} t^{k+|Q|} \tag{4.6}$$

Подставляя (4.6) в (4.5) и приравнивая коэффициенты при t, находим

$$b_{qk} = G_q \delta_{k0} + \sum_{m=0}^{2Q+1} \Delta(m;\ 0,\ 1) V_{qm} b_{mk} + \tag{4.7}$$

$$+ \left\{ \sum_{m=-2N}^{2QD(-Q)} \delta_{r,\,k+2[M-QD(-Q)]} + \sum_{m=2(Q+1)D(Q)}^{\infty} \delta_{r,\,k-2[M-QD(Q)]} \right\} \Delta(m;\ 0,\ 1) V_{qm} b_{mr}$$

$$D(Q) = \begin{cases} 1\ (Q > 0) \\ 0\ (Q < 0) \end{cases}$$

Равенства (4.7) представляют собой набор рекуррентных соотношений, которые позволяют вычислять величины b_{qk} по их «низшим» приближениям b_{mr} ($r < k$) и приближениям того же порядка «предыдущих» b_{mk} ($|m| < |q|$) амплитуд. Практическое применение (4.7) трудностей не представляет. Равенства (4.6), (4.7) дают окончательное выражение для a_q, если в них положить $t = 1$.

Нетрудно видеть, что при соблюдении условий (2.14) коэффициенты z_{qm} зависят от θ_m, ε_m, μ, а g_q зависят от θ_m, ε_m, μ, φ_0. Если μ вычислить при помощи уравнения (3.6), то разложения (4.4) — (4.7) будут зависеть только от неизвестной φ_0. Характеристическое уравнение системы (2.11), (4.1), (4.2) можно представить в виде двух уравнений

$$\theta_0 - n^2 + \mu^2 = \theta_n \cos(2\varphi_0 + \varepsilon_n) + 2\lambda_{00} \sin^2(\varphi_0 + \varepsilon_N) -$$

$$- \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Delta(m;\ 0, -n/2, -n) A_m [\theta_m \cos(\varphi_m - \varphi_0 + \varepsilon_m) - \lambda_{0m} \cos(\varphi_m - \varphi_0 + \varepsilon_{N+m} - \varepsilon_N)]$$

$$2n\mu = -\theta_n \sin(2\varphi_0 + \varepsilon_n) + \lambda_{00} \sin 2(\varphi_0 + \varepsilon_N) - \tag{4.8}$$

$$- \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Delta(m;\ 0, -n/2, -n) A_m [\theta_m \sin(\varphi_m - \varphi_0 + \varepsilon_m) - \lambda_{0m} \sin(\varphi_m - \varphi_0 + \varepsilon_{N+m} - \varepsilon_N)]$$

Подставив сюда (4.4)—(4.7), находим c_0, s_0, а затем вычисляем $y_k(\tau)$.

5. Для нахождения приближенных выражений для A_q и φ_q рассмотрим решения (2.1) — (2.3), (2.2) — (2.3). Уравнение (1.1) превращается при этом в систему (2.8) — (2.10), коэффициенты которой равны

$$\zeta_{qm}(x) = \Delta(m;\ -n/2) [\theta_{q-m} \sin(x + \varepsilon_{m-q}) - \lambda_{qm} \sin(x + \varepsilon_{N+m} - \varepsilon_{N+q})]$$

$$I_q = (n + 2q)^2 - \theta_0 - \mu^2 + \lambda_{qq} [1 - \cos 2(\varphi_q + \varepsilon_{N+q})] + \theta_{n+2q} \cos(2\varphi_q + \varepsilon_{n+2q})$$

$$\lambda_{qm} = \delta_{n,\,2N} \frac{\theta_{N+m} \theta_{N+q}}{\theta_0 + \mu^2}, \qquad r_q = \frac{2\mu(n + 2q) + \zeta_{-n-q,\,q}(2\varphi_q)}{I_q} \tag{5.1}$$

в случае решения (2.1), (2.3). Для решения (2.2), (2.3)

$$r_q = 0, \qquad I_q = L_q \tag{5.2}$$

и L_q, $\zeta_{qm}(x)$ определяются при помощи (3.2).

[1] Числа Q и M вычисляются при помощи формулы (2.10), в которую вместо n следует подставить соответственно q и m.

Коэффициенты системы (2.8) — (2.10) зависят от фаз φ_m. Поэтому пользоваться выражением (2.3) для точных вычислений $y_k(\tau)$ неудобно. Однако при действительных значениях фаз φ_m, когда все входящие в (2.8) — (2.10) тригонометрические функции можно мажорировать единицей, уравнения (2.8) — (2.10) позволяют получить приближенные выражения для A_q и φ_q.

Рассмотрим случай действительных θ_m, ε_m. Фазы φ_m решения (2.1), (2.3) будут в этом случае действительными в областях неустойчивости, а фазы φ_m решения (2.2), (2.3) — в областях устойчивости. Поэтому оценочные соотношения для устойчивых решений (1.1) нужно искать при помощи (2.2), (2.3), а для неустойчивых — при помощи (2.1), (2.3).

Характер изменения A_q с ростом $|q|$ в большой степени зависит от свойств коэффициентов θ_m. Поэтому ниже рассмотрим приближенные выражения для A_q в двух частных случаях.

Если θ_m, $|m| = 1, 2, \ldots$ образуют медленно убывающую последовательность чисел, то A_q удобно искать в виде, аналогичном (4.4). Введем обозначение

$$z_{qm} = \Delta(m;\ q)\,[\delta_{m0} + I_m^{-1}\Delta(m;\ 0)]\,[\zeta_{qm}(\varphi_m - \varphi_q + \pi/2) - \\ - \zeta_{q,\,-n-q}(-\varphi_m - \varphi_q + \pi/2)] \tag{5.3}$$

Положим [1]

$$z_{qm} = tU_{qm}, \qquad A_q I_q = A_0 \sum_{k=0}^{\infty} a_{qk} t^{k+1} \tag{5.4}$$

При помощи (2.8) находим

$$a_{qk} = \delta_{k0}U_{q0} + \Delta(k;\ 0) \sum_{p_1=-N}^{\infty} \Delta(p_1;\ 0)\,U_{qp_1} \sum_{p_2=-N}^{\infty} \Delta(p_2;\ 0)\,U_{p_1p_2} \ldots \\ \ldots \sum_{p_k=-N}^{\infty} \Delta(p_k;\ 0)\,U_{p_{k-1}p_k}\,U_{p_k0} \tag{5.5}$$

Для A_q получаем

$$|I_q A_q| \leqslant |A_0| \left[|z_{q0}| + \frac{S^{(0)}}{1-S} \right] \\ S \geqslant \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Delta(m;\ 0,\ q,\ -n,\ -n-q) \left| \frac{\zeta_{qm}(\varphi_m - \varphi_q + \pi/2)}{I_m} \right| \\ S^{(0)} \geqslant \left| \sum_{m=-N}^{\infty} z_{qm} z_{m0} \right| \tag{5.6}$$

Величина S является мажорантой правых частей (2.15).

Неравенство (5.6) принимает простой вид, если принять

$$|\zeta_{qm}(\varphi_m - \varphi_q + \pi/2) - \zeta_{q,\,-n-m}(-\varphi_m - \varphi_q + \pi/2)| < t \tag{5.7}$$

Интервал значений величины t, в пределах которого неравенства (5.6) сохраняют свой смысл, определяется при помощи (2.15).

Если θ_m, $|m| = 1, 2, \ldots$ образуют геометрическую прогрессию, то A_q удобно искать в виде, аналогичном (4.6).

Положим

$$z_{qm} = x^{|q-m|}V_{qm}, \qquad I_q A_q = A_0 \sum_{k=0}^{\infty} b_{qk} x^{k+|q|} \tag{5.8}$$

---

[1] Напомним, что в решении (2.2), (2.3) произвольны A_{10}, φ_{10}. A_{20}, φ_{20} должны вычисляться при помощи (3.3).

Подставив (5.8) в (2.8) и приравняв коэффиенты при степенях x, находим

$$b_{qk} = \delta_{k0} V_{q0} + \sum_{m=0}^{q} \Delta(m;\ 0)\, V_{qm} b_{mk} +$$

$$+ \left\{ \sum_{m=-N}^{qD(-q)-1} \delta_{r,\, k+2[m-qD(-q)]} + \sum_{m=qD(q)+1}^{\infty} \delta_{r,\, k-2[m-qD(q)]} \right\} V_{qm} b_{mr} \tag{5.9}$$

Если

$$|\zeta_{qm}(\varphi_m - \varphi_q + \pi/2) - \zeta_{q,\, -n-m}(-\varphi_m - \varphi_q + \pi/2)| \leqslant t x^{|q-m|} \tag{5.10}$$

то равенства (5.9) позволяют вывести приближенное выражение

$$|b_{q0}| \leqslant t\left(1 + \frac{t}{|I_1 \operatorname{sign} q|}\right)\left(1 + \frac{t}{|I_2 \operatorname{sign} q|}\right)\cdots\left(1 + \frac{t}{|I_q|}\right) \tag{5.11}$$

С известной точностью I_m в (5.11) можно заменить на $I_m \approx 4m^2$; при этом правая часть (5.11) при $q \to \infty$ превращается в известное бесконечное произведение, и

$$|b_{q0}| \leqslant t\, \frac{\operatorname{sh}(\pi\sqrt{t}/2)}{\pi\sqrt{t}/2} \tag{5.12}$$

Область изменения t и x, в пределах которой неравенства (5.11), (5.12) сохраняют свой смысл, можно определить, подставив (5.10) в (2.15).

Анализируя следующие члены ряда (5.8) для случая (5.10), можно найти необходимый критерий сходимости ряда (5.8)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{tx}{|I_m|}\, \frac{tx}{|I_{m+1}|} < 1 \tag{5.13}$$

Выведенные здесь разложения (5.8), (5.9) для амплитуд A_q похожи на ряды, приведенные в [1, 2] для решения (2.1), (2.3).

Нетрудно убедиться, что (5.8), (5.9) являются их обобщением. Для этого (5.1) следует подставить в (5.9) и разложить I_m^{-1} в ряды по произведениям чисел θ_m. Тогда (5.9) совпадает с соответствующими результатамл [1, 2]. Нужно, однако, заметить, что при вычислении (2.1), (2.3) в областях устойчивости, соответствующих $n > 2$, такое разложение становится незаконным, поскольку оно ведет к нарушению условия (2.15). Поэтому приведенные в [2] разложения $y_k(\tau)$ для $n = 3$ заведомо применимы только в области неустойчивости.

Рассмотрим приближенные решения уравнений (2.9) для случая (5.10), когда все произведения вида $A_q \ldots A_r \theta_\omega \ldots \theta_\varepsilon$ можно считать величинами p-го порядка малости, если $|q| + \ldots + |r| + |\omega| + \ldots + |\varepsilon| = p$.

В соответствии с этой классификацией числители правых частей (2.9) содержат члены $|q| + 2p$, $n + q + 2p$ $(p = 0, 1, \ldots)$ порядков малости.

Входящие в (2.9) величины ψ_q произвольны. В частности, можно положить $\psi_q = 0$. Однако величины ψ_q можно выбрать и таким образом, чтобы правые части (2.9) оказались малыми величинами первого или более высокого порядка малости. В этом случае ψ_q будут приближенными значениями фаз φ_q.

Для вывода уравнений, определяющих ψ_q, приравняем нулю суммы всех членов q порядка малости, входящие в числители правых частей (2.9). Тогда получим: для областей неустойчивости (решения (2.1), (2.3))

$$\psi_0 = \varphi_0, \qquad \sum_{m=0}^{q} \Delta(m;\ q,\ -n/2)\, A_m \theta_{q-m} \sin(\varphi_m - \psi_q + \varepsilon_{m-q}) = 0 \tag{5.14}$$

для областей устойчивости (решения (2.2), (2.3))

$$\sum_{r=0}^{q} \Delta(r;\ q,\ -n/2)\left(\frac{M_q}{n+2q} + \frac{M_r}{n+2r}\right) A_r \theta_{q-r} \sin(\varphi_r - \psi_q + \varepsilon_{r-q}) - \tag{5.15}$$

$$- \sum_{m,\,p} \Delta(p;\, m,\ q,\, -n/2)\, \Delta(m;\, q,\, -n/2)\, \frac{\theta_{q-p}\theta_{p-m}}{n+2p} A_m \sin(\varphi_m - \psi_q + \varepsilon_{m-p} + \varepsilon_{p-q}) = 0$$

$$0 \leqslant m < p < q, \qquad q < p < m \leqslant 0 \qquad (\psi_0 = \varphi_0)$$

Если в (5.14), (5.15) заменить φ_m на ψ_m, то (5.14), (5.15) и дадут искомые уравнения для ψ_q. Уравнения (5.14), (5.15) носят характер рекуррентных соотношений. Они допускают несложное последовательное решение.

6. Рассмотрим решения обыкновенного уравнения Хилла, когда $\varepsilon_m = 0$. Система (2.9), соответствующая (2.2), (2.3), при $\varepsilon_m = 0$ имеет решения

$$\varphi_q = 0, \qquad \varphi_q = \pi/2 \tag{6.1}$$

Поэтому разложения (5.4), (5.5) и (5.8), (5.9), примененные к решению (2.2), (2.3), в случае обыкновенного уравнения Хилла содержат только одну неизвестную ν и могут рассматриваться как окончательные. (Согласно (3.3) фаза $\varphi_{2q} = 0$, $\pi/2$, если $\varphi_{1q} = \pi/2$, 0 соответственно.)

Для вычисления периодических ($\mu = 0$) решений обыкновенного уравнения Хилла можно использовать и выражения (2.1), (2.3). В этом случае (6.1) также будут удовлетворять системе (2.9) и (5.4) — (5.5), (5.8) — (5.9) дадут окончательные выражения для амплитуд A_q. Преимущество последнего способа вычисления $y_k(\tau)$ заключается в том, что коэффициенты (5.1) значительно проще коэффициентов (3.2).

7. Рассмотрим уравнение Матье. В этом случае

$$\varepsilon_m = 0, \qquad \theta_m = \theta_0\delta_{m0} + \theta_1\delta_{|m|,1} \tag{7.1}$$

Постоянную C удобно включить в сумму (2.3) при помощи равенств

$$C = \delta_{n,2N}A_{-N}, \qquad \delta_{n,2N}\varphi_{-N} = \pi/2 \tag{7.2}$$

Для A_q, φ_q получается система (2.8), (2.9) с коэффициентами

$$\zeta_{qm}(x) = \theta_1\delta_{|m-q|,1}\sin x, \qquad r_q = \frac{2\mu(n+2q)}{I_q}, \qquad I_q = (n+2q)^2 - \theta_0 - \mu^2 \tag{7.3}$$

Уравнение Матье является частным случаем обыкновенного уравнения Хилла. Однако изложенные в п. 6 способы вычисления $y_k(\tau)$ не всегда удобны для решения уравнения Матье, так как они приводят к слишком грубым оценкам коэффициентов Фурье $y_k(\tau)$ и условий сходимости.

Поэтому для решения уравнения Матье целесообразно использовать введенные в ([1], стр. 256) ряды Уиттекера, обладающие более быстрой сходимостью, чем (5.4).

Применение бесконечных уравнений позволяет в этом случае вывести выражение для общего члена рядов Уиттекера, найти количественную оценку области их сходимости и получить удобные оценки величин A_q, φ_q.

Полагая

$$A_q = \delta_{q0} + \Delta(q;\,0)\,a_q \frac{\theta_1\cos(\varphi_{1\cdot\mathrm{sign}q} - \varphi_0)}{I_{1\cdot\mathrm{sign}q}}\,\frac{\theta_1\cos(\varphi_{2\cdot\mathrm{sign}q} - \varphi_{1\cdot\mathrm{sign}q})}{I_{2\cdot\mathrm{sign}\,q}}\cdots$$
$$\cdots\frac{\theta_1\cos(\varphi_q - \varphi_{q-1\cdot\mathrm{sign}\,q})}{I_q} \tag{7.4}$$

находим для a_q систему уравнений

$$a_0 = 1, \qquad a_q = a_{q-1\cdot\mathrm{sign}\,q} + z_q a_{q+1\cdot\mathrm{sign}\,q}, \qquad z_q = \frac{\theta_1^2\cos^2(\varphi_q - \varphi_{q+1\cdot\mathrm{sign}\,q})}{I_q I_{q+1\cdot\mathrm{sign}\,q}} \tag{7.5}$$

Система (7.5) естественно распадается на две независимые части, соответствующие $q > 0$ и $q < 0$. Вследствие (2.8) бесконечной оказывается только система, соответствующая $q > 0$. Найдем ее решение.

Если в (7.5) положить $q > 0$, то получается нерегулярная система уравнений, к которой неприменимы общие методы, изложенные в [4]. Тем не менее решение (7.5) для $q > 0$ может быть получено при помощи разложения типа (5.4)

$$z_q = tU_q, \qquad a_q = \sum_{k=0}^{\infty} a_{qk}t^k \tag{7.6}$$

Подставляя (7.6) в (7.5), находим

$$a_{qk} = \delta_{k0} + \Delta(k;\ 0) \sum_{p_1=1}^{q} U_{p_1} \sum_{p_2=1}^{p_1+1} U_{p_2} \ldots \sum_{p_k=1}^{p_{k-1}+1} U_{p_k} \tag{7.7}$$

Нетрудно видеть, что ряд (7.6), (7.7) сходится абсолютно, если

$$1 > \left| \sum_{p=1}^{\infty} z_p \right| \tag{7.8}$$

При этом для a_q получаем

$$|a_q| < (1-S)^{-1}, \qquad S = \left| \sum_{p=1}^{\infty} z_p \right| \tag{7.8}$$

Разложения (7.6), (7.7) представляют собой обобщение рядов Уиттеккера. Неравенство (7.8) дает достаточное условие их абсолютной сходимости.

Рассмотрим приближенные решения системы (2.9). Повторяя вывод уравнений (5.14) для ψ_q, получаем

$$\psi_q = \psi_{q-1\cdot \operatorname{sign} q} + \operatorname{arctg} \frac{2\mu(n+2q)}{I_q}, \qquad \psi_0 = \varphi_0 \tag{7.10}$$

Из (7.10) видно, что $\varphi_{q\pm1} - \varphi_q$ — малая величина, стремящаяся к нулю при $q \to \infty$. Поэтому в отличие от общего случая (см. п. 5) выражения (2.1), (2.3) пригодны для вычисления как неустойчивых, так и устойчивых решений уравнения Матье. Из (7.9) можно вывести также, что

$$|\operatorname{Im}(\varphi_q - \varphi_0)| \approx {}^1/_2\, |\mu|\, \ln |q(n+q)|$$

при $q \to \infty$ и чисто мнимых значениях μ.

8. Одна из основных целей настоящей работы состоит в том, чтобы для решений обобщенного уравнения Хилла получить простейшие разложения, допускающие непосредственное практическое применение. Такими оказались разложения п.п 3, 4, 6, зависящие только от характеристического числа μ.

Если (3.6) допускает несложное вычисление ν, использование рядов (3.4), (4.4)—(4.7), (5.4), (5.8) трудностей не представляет.

Если же решить (3.6) простыми средствами нельзя, для вычисления $y_k(\tau)$ необходимо использовать другие методы. В частности, может оказаться полезным предложенный в [1] и примененный в [2] метод формального разложения всех величин по произведениям чисел θ_m. Условия (2.15), (2.16), (5.13) и неравенства (5.6), (5.11) в этом случае дадут возможность найти точность метода последовательных приближений. При решении укороченных систем уравнений неравенства (5.6), (5.11), (7.9) позволяют оценить ошибки, которые совершаются при обрывании бесконечных систем.

В заключение отметим, что результаты п.п. 4—7 приведены для $p_0 = 0$ (см. 2.14)). Поэтому применять их для случая $n = 0$ нужно с известной осторожностью.

Автор благодарит рецензента редакции К. Г. Валеева за большую помощь и ряд ценных советов.

Поступила 23 II 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Уиттекер Е. Г., Ватсон Г. Н. Курс современного анализа. Ч. 2, ГИТТЛ, 1934.
2. Хаяси Т. Вынужденные колебания в нелинейных системах, ИИЛ, 1957.
3. Courant E., Snyder H. Ann. of Phys. 1958, 3, 1 (имеется русск. перевод: «Проблемы соврем. физики», Курант Е., Снейдер Н. Теория синхротрона с сильной фокусировкой. М., ИИЛ, 1958, № 4).
4. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. ГИТТЛ, 1949.
5. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, рядов, сумм и бесконечных произведений. ГИТТЛ, 1951.