Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И СТАЦИОНАРНЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ АРГУМЕНТА. РЕГУЛЯРНЫЙ СЛУЧАЙ

К. Г. Валеев

(Ленинград)

Рассматриваемые уравнения с экспоненциальными коэффициентами и стационарными запаздываниями аргумента часто встречаются в технических задачах. Исследование проводится методом, который представляет собой обобщение результатов автора [1]. Задача сводится к изучению изображения по Лапласу [2] решения системы дифференциальных уравнений. Это решение получается в асимптотическом виде при больших значениях аргумента.

Изложенный метод позволяет строить частное решение, удовлетворяющее определенным начальным условиям. Построение решения системы линейных дифференциальных уравнений в окрестности регулярной особой точки отличается от построения методом Фробениуса подобно тому, как отличается метод Эйлера решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами от решения этих уравнений при помощи преобразования Лапласа [2].

1. Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений с экспоненциальными коэффициентами и стационарными запаздываниями аргумента

$$\sum_{q=0}^{l} e^{-\alpha_q t}\left(A_{qn}\frac{d^nY(t)}{dt^n}+\sum_{k=0}^{n-1}\int_{-h}^{0} dA_{qk}(\vartheta)\frac{d^kY(t+\vartheta)}{dt^k}\right)=\Phi(t) \tag{1.1}$$

Здесь $Y(t)$ — m-мерный вектор, A_{qn} — постоянные комплексные матрицы размера $m\times m$, удовлетворяющие условиям

$$A_{0n}\equiv E, \qquad \sum_{q=1}^{l}|A_{qn}|\leqslant\mu_0<1 \tag{1.2}$$

Здесь E — единичная матрица. Символ $|A|$ означает норму матрицы

$$A=\|a_{sj}\|_1^m, \qquad |A|=\max_s\sum_{j=1}^{m}|a_{sj}| \tag{1.3}$$

Элементы $a_{sj}^{qk}(\vartheta)$ матрицы $A_{qk}(\vartheta)=\|a_{sj}^{qk}(\vartheta)\|_1^m$ являются функциями ограниченной вариации на $[-h, 0]$, $(h>0)$ [3]. Число l в (1.1) обычно предполагаем конечным. Случай $l=\infty$ будет оговариваться особо, при этом предполагаем выполнение дополнительных условий

$$\sum_{q=0}^{\infty}|\alpha_q|^n\,|A_{qn}|\leqslant c, \qquad \sum_{q=0}^{\infty}\mathop{V}_{-h}^{0}\, a_{sj}^{qk}(\vartheta)\,|\alpha_q|^k\leqslant c=\text{const} \tag{1.4}$$

$$(k=0, 1, \ldots, n-1;\ s, j=1, \ldots, m)$$

Дифференциал, стоящий перед матрицами $A_{qk}(\vartheta)$ в (1.1), распространяется лишь на эти матрицы. Интегралы в (1.1) понимаются как интегралы Стильтьеса ([3], стр. 277).

Для комплексных чисел α_q выполняются условия

$$\alpha_0\equiv 0, \qquad \operatorname{Re}\alpha_q\geqslant 0 \qquad (q=1, 2, \ldots, l) \tag{1.5}$$

Среди чисел $\operatorname{Im}\alpha_q$ могут быть рационально несоизмеримые. Пусть изображением вектора $\Phi(t)$ $(t \geqslant 0)$ является мероморфный вектор $Q(p)$, компоненты которого регулярны и ограничены при $\operatorname{Re} p \geqslant b = \text{const}$.

В частном случае предполагаем

$$\Phi(t) = \sum_{j=1}^{\lambda} C_j t^{\nu_j} e^{\omega_j t}, \qquad Q(p) = \sum_{j=1}^{\lambda} C_j \nu_j! \, (p - \omega_j)^{-\nu_j - 1} \tag{1.6}$$

где C_j — постоянные комплексные векторы, ν_j — целые неотрицательные числа, ω_j — комплексные числа. Ищем при $t > 0$ решение $Y(t)$ системы уравнений (1.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$Y(t) = Y_0^{(0)}(t), \ldots, \frac{d^{n-1} Y(t)}{dt^{n-1}} = Y_0^{(n-1)}(t), \qquad t \in [-h, 0] \tag{1.7}$$

где векторы $Y_0^{(j)}$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ удовлетворяют при $t \in [-h, 0]$ условиям Дирихле. Предполагаем, что векторы $Y(t), \ldots, d^{n-1}Y(t)/dt^{n-1}$ непрерывны в точке $t = 0$ справа.

2. В этом пункте для изображения $F(p)$ решения $Y(t)$ строится система линейных разностных уравнений, для которой получено решение в виде матричного ряда. Соответствие между изображением $F(p)$ и оригиналом $Y(t)$ будем обозначать стрелкой

$$Y(t) \leftarrow\!\!\!\!\div F(p), \qquad F(p) = \int_0^{\infty} Y(t) e^{-pt} \, dt \tag{2.1}$$

Умножая систему (1.1) на e^{-pt} и интегрируя по t от 0 до ∞, получим для $F(p)$ систему линейных разностных уравнений [1]

$$\sum_{q=0}^{l} L_q(p + \alpha_q) F(p + \alpha_q) = R(p) \tag{2.2}$$

Здесь

$$L_q(p) = A_{qn} p^n + \sum_{k=0}^{n-1} p^k \int_{-h}^{0} e^{p\vartheta} \, dA_{qk}(\vartheta) \qquad (q = 0, 1, \ldots, l) \tag{2.3}$$

$$R(p) = Q(p) + \sum_{q=0}^{l} \Psi_q(p + \alpha_q) \qquad (Q \text{ — согласно (1.6)}) \tag{2.4}$$

$$\Psi_q(p) = A_{qn} \sum_{j=0}^{n-1} Y_0^{(j)}(0) \, p^{n-j-1} + \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{k=j+1}^{n-1} \int_{-h}^{0} e^{p\vartheta} \, dA_{qk}(\vartheta) \, Y_0^{(j)}(0) \, p^{k-j-1} -$$
$$- \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-h}^{0} \int_{t}^{0} e^{p(\vartheta - t)} \, dA_{qk}(\vartheta) \, Y_0^{(k)}(t) \, dt \tag{2.5}$$

Элементы известных матриц $L_q(p)$ являются целыми функциями p и равномерно по $\operatorname{Im} p$ удовлетворяют следующему из (1.2) условию

$$\overline{\lim_{p \to \infty}} \sum_{q=1}^{n} | L_0^{-1}(p) L_q(p + \alpha_q) | \leqslant \mu < 1, \qquad \operatorname{Re} p \geqslant b = \text{const} \tag{2.6}$$

Здесь $R(p)$ — известный вектор, при этом из (2.4) имеем

$$\lim | L_0^{-1}(p) R(p) | = 0, \qquad \operatorname{Re} p \to +\infty \tag{2.7}$$

Используя (2.3), (2.4), введем обозначения

$$K_q(p) = -L_0^{-1}(p) L_q(p+\alpha_q), \quad \Omega(p) = L_0^{-1}(p) R(p) \tag{2.8}$$

Система разностных уравнений (2.2) после умножения на $L_0^{-1}(p)$ и разрешения относительно $F(p)$ принимает вид

$$F(p) = \sum_{q=1}^{n} K_q(p) F(p+\alpha_q) + \Omega(p) \tag{2.9}$$

При $\operatorname{Re} p \geqslant b_1$, где число b_1 достаточно велико, соотношение (2.9) можно рассматривать как сжимающее отображение ([3], стр. 44) пространства ограниченных регулярных при $\operatorname{Re} p \geqslant b_1$ вектор-функций с расстоянием, определенным по формуле

$$\rho(F_1(p), F_2(p)) = \max_j \{|f_{1j}(p) - f_{2j}(p)|\}, \qquad \operatorname{Re} p \geqslant b_1 \tag{2.10}$$

$f_{sj}(p)$ — компоненты вектора $F_s(p)$ $(s = 1, 2)$. Решение $F(p)$ системы (2.2), которое ограничено при достаточно большой $\operatorname{Re} p \geqslant b_1$, является единственным и может быть получено методом последовательных приближений ([3], стр. 45). Имеем

$$F_0(p) \equiv 0, \qquad F_{j+1}(p) = \sum_{q=1}^{l} K_q(p) F_j(p+\alpha_q) + \Omega(p) \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.11}$$

Последовательность функций $F_j(p)$ сходится равномерно к регулярному при $\operatorname{Re} p \geqslant b_1$ вектору $F(p)$, так как выполнено условие

$$\sum_{q=1}^{l} |K_q(p)| \leqslant \mu_1 < 1 \quad \text{при } \operatorname{Re} p \geqslant b_1 \tag{2.12}$$

Из (2.11) получаем для $F(p)$ выражение (2.13)

$$F(p) = \Omega(p) + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{q_j=1,2,\ldots,l} K_{q_1}(p) K_{q_2}(p+\alpha_{q_1}) K_{q_3}(p+\alpha_{q_1}+\alpha_{q_2}) \ldots$$
$$\ldots K_{q_\sigma}(p+\alpha_{q_1}+\alpha_{q_2}+\ldots+\alpha_{q_{\sigma-1}}) \Omega(p+\alpha_{q_1}+\alpha_{q_2}+\ldots+\alpha_{q_\sigma})$$

3. Регулярный случай $\alpha_0 \equiv 0$, $\operatorname{Re} \alpha_q > 0$ $(q = 1, \ldots, l)$. В этом случае система уравнений (1.1) особенно просто исследуется. Рассмотрим уравнение, которое будем называть порождающим (2.3)

$$\operatorname{Det} L_0(p) = 0 \tag{3.1}$$

Обозначим корни этого уравнения через $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k, \ldots$ Введем в рассмотрение числа $p_{k_0, k_1, \ldots, k_l}$, где

$$p_{k_0, k_1, \ldots, k_l} = \rho_{k_0} - k_1\alpha_1 - k_2\alpha_2 - \ldots - k_l\alpha_l \quad (k_q = 0, 1, 2, \ldots;\ q = 0, 1, \ldots, l) \tag{3.2}$$

Обозначим через Σ_ε многосвязную область комплексной плоскости p, определенную неравенством

$$|p - p_{k_0, k_1, \ldots, k_l}| \geqslant \varepsilon > 0 \qquad (k_q = 0, 1, 2, \ldots,\ q = 0, 1, \ldots, l) \tag{3.3}$$

Если $p \in \Sigma_\varepsilon$ и $\operatorname{Re} p \geqslant b_2 = \text{const}$, то из условия (2.12), (2.6) следует, что ряд (2.13) сходится абсолютно и равномерно. Из (3.1), (2.8) следует, что полюсы слагаемых, входящих в (2.13), могут находиться лишь в точках $p_{k_0, k_1, \ldots, k_l}$ (3.2) и иметь конечный порядок. Рассмотрим вектор-функцию (r — целое достаточно большое число)

$$H_j(p) = F_j(p)(p - p_{k_0, k_1, \ldots, k_l})^r \tag{3.4}$$

При достаточно малом $\varepsilon > 0$ вектор $H_j(p)$ регулярен в круге $C_\varepsilon |p - p_{k_0, k_2, \ldots, k_l}| \leqslant \varepsilon$ и последовательность $H_j(p)$ сходится на границе круга C_ε равномерно. В силу теоремы Вейерштрасса последовательность $H_j(p)$ сходится равномерно внутри круга C_ε, коэффициенты разложения $H_j(p)$ в точке $p = p_{k_0, k_1, \ldots, k_l}$ в ряд Тейлора сходятся к определенным конечным значениям. Окончательно получили теорему.

Теорема 3.1. Пусть в системе уравнений (1.1) $\alpha_0 \equiv 0$, $\operatorname{Re} \alpha_q > 0$ $(q = 1, \ldots, l)$, $\Phi(t) \equiv 0$. В этом случае изображение (2.1) по Лапласу $F(p)$ решения $Y(t)$ представимо в виде ряда (2.13). Мероморфный вектор $F(p)$ может иметь полюсы конечной кратности лишь в точках $p_{k_0, k_1, \ldots, k_l}$, определенных (3.2). Коэффициенты разложения $F(p)$ в ряд Лорана в точках $p = p_{k_0, k_1, \ldots, k_l}$ сходятся к соответствующим коэффициентам разложения вектора $F(p)$.

Последнее утверждение теоремы 3.1 позволяет получить разложение решения $Y(t)$ в асимптотический ряд при больших значениях t

$$Y(t) \sim \sum_{k_0, k_1, \ldots, k_l = 0}^{\infty} \operatorname{res} (F(p) e^{pt}) |_{p = p_{k_0, k_1, \ldots, k_l}} \tag{3.5}$$

Из свойств преобразования Лапласа [2] вытекает следующее асимптотическое свойство:

$$\left(Y(t) - \sum_{\operatorname{Re} p_{k_0, k_1, \ldots, k_l} > b} \operatorname{res} (F(p) e^{pt}) |_{p = p_{k_0, k_1, \ldots, k_l}} \right) e^{-bt} \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.6}$$

Из теоремы (3.1) и свойства (3.5) следует теорема.

Теорема 3.2. Пусть в системе уравнений (1.1)

$$\alpha_0 \equiv 0, \qquad \operatorname{Re} \alpha_q > 0 \qquad (q = 1, \ldots, l)$$

Тогда:

(1) Решения системы уравнений (1.1) асимптотически устойчивы, если $\operatorname{Re} \rho_k < 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$.

(2) Решения системы уравнений (1.1) неустойчивы, если хоть для одного ρ_{k_0}, $\operatorname{Re} \rho_{k_0} > 0$.

(3) Пусть $\operatorname{Re} \rho_k \leqslant 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Решения системы (1.1) устойчивы тогда и только тогда, если для всех корней ρ_k, лежащих на мнимой оси, элементы матрицы $L_0^{-1}(p)$ (2.3) имеют полюсы первой кратности.

Выводы теоремы 3.2 можно переформулировать.

Теорема 3.3. Пусть в системе уравнений (1.1) $\alpha_0 \equiv 0$ $\operatorname{Re} \alpha_q > 0$ $(q = 1, \ldots, l)$, $\Phi(t) \equiv 0$. Для устойчивости всех решений системы уравнений (1.1) необходимо и достаточно устойчивость всех решений укороченной системы уравнений (1.1), а именно

$$A_{0n} \frac{d^n Y(t)}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-h}^{0} dA_{0k}(\vartheta) \frac{d^k Y(t + \vartheta)}{dt^k} = 0 \tag{3.7}$$

Замечание 3.1. Если рассматривать решения систем уравнений (1.1) и (3.7) с определенными начальными условиями (1.7), то их поведение при $t \to +\infty$ может различаться. Например, решение системы будет стремиться к нулю, а решение системы уравнений (3.7) с теми же начальными условиями будет неограниченным.

Замечание 3.2. В теоремах 3.2, 3.3 основные утверждения следуют из уже известных результатов, например, [4].

Если $\Phi(t)$ в (1.1) имеет вид (1.6), то из (2.13), (2.8), (2.4), (1.6) следует, что вектор $F(p)$ будет иметь дополнительные полюсы в точках

$$\omega_{j, k_1, \ldots, k_l} = \omega_j - k_1\alpha_1 - k_2\alpha_2 - \ldots - k_l\alpha_l \qquad (j = 1, \ldots, \lambda, \; k_q = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.8}$$

Пример 3.1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) + be^{-t}y(t-\tau) = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y(t) \equiv 0 \qquad (t < 0) \tag{3.9}$$

Имеем из (2.3), (2.4)

$$L_0(p) = p + a, \qquad L_1(p) = be^{-p\tau}, \qquad R(p) = 1 \tag{3.10}$$

Для изображения $f(p)$ решения $y(t)$ уравнения (3.9) имеем

$$f(p) = (p+a)^{-1} - be^{(-p+1)\tau}(p+a)^{-1}f(p+1) \tag{3.11}$$

Ряд (2.13) принимает вид

$$f(p) = \frac{1}{p+a} - \frac{be^{-(p+1)\tau}}{(p+a)(p+a+1)} + \frac{b^2e^{-(2p-3)\tau}}{(p+a)(p+a+1)(p+a+2)} + \ldots \tag{3.12}$$

Из (3.12) получаем асимптотическое разложение (3.5)

$$y(t) \sim e^{-at}\left(1 - \frac{be^{\tau(a-1)}}{1!} + \frac{b^2e^{\tau(2a+3)}}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{b^n e^{\tau(na-n(n+1)/2)}}{n!} + \ldots\right) \times$$
$$\times \left(1 + \frac{be^{\tau(-a)}}{1!}e^{-t} + \frac{b^2e^{\tau(1-2a)}}{2!}e^{-2t} + \ldots + \frac{b^n e^{\tau(n(n-1)/2-na)}}{n!}e^{-nt} + \ldots\right) \tag{3.13}$$

Пример 3.2. Найдем асимптотическое разложение (3.5) решения $y(t)$ уравнения

$$dy/dt + y(t-\pi)e^{-t} = 0, \qquad y(t) = \sin t, \qquad t \in [-\pi, 0] \tag{3.14}$$

Для изображения $f(p)$ решения $y(t)$ имеем разностное уравнение

$$f(p) = (e^{-\pi(p+1)} + 1)[(p+1)^2 + 1]p^{-1} - p^{-1}e^{-\pi(p+1)}f(p+1) \tag{3.15}$$

Из формул (2.13), (3.5) получаем разложение

$$y(t) \sim \left(\frac{1+e^{-\pi}}{(1+1^2)} - \frac{(1+e^{-2\pi})e^{-\pi}}{(1+2^2)1!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{(1+e^{-n\pi})e^{-n(n-1)\pi/2}}{(1+n^2)(n-1)!} + \ldots\right) \times$$
$$\times \left(1 + e^{-t} + \frac{e^{\pi}}{2!}e^{-2t} + \frac{e^{3\pi}}{3!}e^{-3t} + \ldots + \frac{e^{n(n-1)\pi/2}}{n!}e^{-nt} + \ldots\right) \tag{3.16}$$

Ряд (3.16), так же как и ряд (3.13), расходится при всех значениях t, но хорошо определяет асимптотическое поведение $y(t)$ при $t \to \infty$. Например, если взять первые пять членов ряда в первой скобке в (3.16), то получим предельное значение $y(+\infty)$ с точностью до 10^{-22}. Применяя другой порядок группировки при отыскании оригинала, можно убедиться, что соответствующий ряд для $y(t)$ сходится при всех конечных значениях t. Так, если искать оригинал $y(t)$ в примере 3.1 в виде разложения по степеням b, то это будет соответствовать обычному решению «по шагам», при этом разложение будет сходиться при всех конечных значениях t.

4. Чтобы разъяснить название «регулярный случай», отметим, что задача построения решения системы линейных дифференциальных уравнений в окрестности регулярной особой точки, как правило, простой заменой приводится к регулярной системе (1.1), но без запаздывания аргумента [1]. Предложенный в п. 3 способ решения является одним из наиболее удобных приемов построения решения системы линейных дифференциальных уравнений в окрестности регулярной особой точки. В особенности это относится к различным критическим случаям.

Пример 4.1. Найдем фундаментальную нормированную матрицу решений системы дифференциальных уравнений (часто встречающейся в задачах регулирования)

$$x\,dZ/dx = (A - xB)Z(x), \qquad Z(1) = E, \qquad x \in [1, 0) \tag{4.1}$$

в окрестности регулярной особой точки $x = 0$. Замена переменных по формулам $x = e^{-t}$, $Z(x) \equiv Y(t) = Y(-\ln x)$ приводит к системе уравнений

$$dY/dt + AY(t) = e^{-t}BY(t), \qquad Y(0) = E, \qquad t \in [0, \infty) \tag{4.2}$$

Система разностных уравнений (2.2) принимает вид

$$(Ep + A)\,F(p) = E + BF(p+1) \tag{4.3}$$

Получим ее решение в виде ряда (2.13)

$$F(p) = (Ep+A)^{-1} + (Ep+A)^{-1}B\,(E(p+1)+A)^{-1} + $$
$$+ (Ep+A)^{-1}B\,(E(p+1)+A)^{-1}B\,(E(p+2)+A)^{-1} + \ldots \tag{4.4}$$

Обозначим через $p_1, p_2, \ldots, p_m$ корни уравнения $\operatorname{Det}(Ep + A) = 0$. Рассмотрим наиболее простой случай, когда

$$p_j - p_h \neq k \qquad (j, h = 1, 2, \ldots, m;\ j \neq h;\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{4.5}$$

Пусть имеем разложение на простейшие дроби

$$(Ep + A)^{-1} = C_1(p-p_1)^{-1} + C_2(p-p_2)^{-1} + \ldots + C_m(p-p_m)^{-1} \tag{4.6}$$

Будем обозначать некоммутативное произведение матриц обычным образом

$$\prod_{k=1}^{n} A_k = A_1, A_2, \ldots, A_n \tag{4.7}$$

Оригинал $Y(t)$ находим по (3.5) и, вспоминая замену переменных, получаем

$$Z(x) = \sum_{j=1}^{m} x^{-p_j}\left\{E + \sum_{k=1}^{\infty} x^k \prod_{s=1}^{k}\left[(E(p_j - k + 1 + s) + A)^{-1}B\right]\right\} C_j \times$$
$$\times \left\{E + \sum_{k=1}^{\infty}\prod_{s=1}^{k}\left[B\,(E\,(p_j+s)+A)^{-1}\right]\right\} \tag{4.8}$$

Пример 4.2. Найдем решение при $x \in [1,0)$ дифференциального уравнения с регулярной особой точкой $x = 0$

$$x\frac{d^2z(x)}{dx^2} + \frac{dz(x)}{dx} - z(x) = 0, \qquad \frac{dz}{dx}(1) = -1, \qquad z(1) = 0 \tag{4.9}$$

Сделаем здесь замену $x = e^{-t}$, $t \in [0, \infty)$, $z(x) \equiv y(t)$; получим

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - e^{-t}\,y(t) = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad \frac{dy}{dt}(0) = 1 \tag{4.10}$$

Разностное уравнение (2.2) и его решение (2.13) имеют вид

$$p^2 f(p) = 1 + f(p+1), \quad f(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2(p+1)^2} + \frac{1}{p^2(p+1)^2(p+2)^2} + \ldots \tag{4.12}$$

Имеем критический случай для уравнения (4.10), в этом случае изображение имеет полюсы порядка выше первого. Ищем оригинал по обычным правилам, отыскивая главную часть разложения $f(p)$ в полюсах $p = 0, -1, -2, \ldots$. Вводя две постоянные величины a и b, получим решение в виде ряда

$$y(t) = (at + 2b)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-kt}}{(k!)^2} + 2a\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-kt}}{(k!)^2}\sum_{s=1}^{k}\frac{1}{s} \qquad \left(a = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}\right) \tag{4.13}$$

$$z(x) = (2b - a\ln x)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{(k!)^2} + 2a\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{(k!)^2}\sum_{s=1}^{k}\frac{1}{s} \qquad \left(b = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left(\sum_{s=1}^{k}\frac{1}{s}\right)\right) \tag{4.14}$$

Поступила 5 II 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Валеев К. Г. О решении и характеристических показателях решений некоторых систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 4.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.
3. Шилов Г. Е. Математический анализ. Специальный курс. М., Физматгиз, 1960.
4. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения, ГИФМЛ, М., 1959