Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ РАВНОМЕРНО ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ВОЗМУЩЕНИЯ КООРДИНАТ

М. Ф. Притуло

(Москва)

При отыскании приближенных решений дифференциальных уравнений, содержащих некоторый параметр ε, применяется метод, состоящий в разложении точного решения в ряд по степеням ε и вычислении его нескольких первых коэффициентов. Аналогичным образом поступают и тогда, когда малый параметр входит не в дифференциальное уравнение, а только в граничные условия. Довольно часто решение нулевого порядка имеет внутри интересующей нас области особые поверхности, которые не свойственны точному решению уравнения. В решениях более высокого порядка эти особенности не только сохраняются, но и становятся даже более резко выраженными. Вследствие этого вблизи таких особых поверхностей ряд по степеням ε расходится и метод малого параметра решения не дает. Указанные трудности могут быть исключены, если в ряды по степеням ε разлагать не только искомую функцию, но и независимые переменные.

Новые (возмущенные) координаты выбираются из условия построения равномерно точного решения дифференциального уравнения и определяются одновременно с решением задачи [1]. К числу недостатков такого метода следует отнести его громоздкость.

В работе показано, что равномерно точное решение может быть найдено не из дифференциального уравнения в возмущенных координатах, а по степенному ряду, полученному в результате применения обычного метода малого параметра.

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Рассмотрим некоторое обыкновенное дифференциальное уравнение, содержащее малый параметр ε

$$L\left(\frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ku}{dx^k}, u, x, \varepsilon\right) = 0 \tag{1.1}$$

Его решение будем искать в виде

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x) \tag{1.2}$$

Подставив (1.2) в дифференциальное уравнение (1.1), запишем его также в виде степенного ряда по ε. Приравнивая нулю каждый коэффициент этого ряда, получим систему дифференциальных уравнений для определения $u_0(x)$, $u_1(x), \ldots, u_n(x), \ldots$

В дальнейшем будем считать, что все коэффициенты ряда (1.2), за исключением, быть может, $u_0(x)$, удовлетворяют линейным уравнениям. Именно при этом условии метод оказывается эффективным. Он позволяет заменить нелинейное дифференциальное уравнение системой более простых уравнений.

Уравнения, которым удовлетворяют $u_0(x)$, $u_1(x), \ldots, u_n(x), \ldots$, запишем следующим образом:

$$L_0\left(\frac{du_0}{dx}, \frac{d^2u_0}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ku_0}{dx^k}, u_0, x\right) = 0$$
$$L_1\left(\frac{du_n}{dx}, \frac{d^2u_n}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ku_n}{dx^k}, u_n, x\right) = f_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1.3}$$

Здесь f_n — функция, зависящая от x, u_0, $u_1, \ldots, u_{n-1}$ и их производных. Таким образом, правая часть уравнения для u_n известна, если найдены решения предыдущих уравнений системы (1.3).

Положим теперь, что в рассматриваемой области решение нулевого порядка имеет особые точки, вблизи которых ряд (1.2) перестает существовать. Применительно к этому случаю Лайтхиллом [1] был разработан метод, позволяющий получить разложения, обладающие во всей области равномерной точностью. Основным в методе является то, что в ряд по степеням ε разлагаются не только зависимая переменная u, но и независимая переменная x. Следуя работе [1], введем новую переменную z по формуле

$$x = z + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m x_m(z) = z + \delta \tag{1.4}$$

где $x_m(z)$ — некоторая функция переменной z. К уравнению (1.1), записанному в новой переменной, применим метод малого параметра, т. е. положим

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n U_n(z) \tag{1.5}$$

Вместо системы уравнений (1.3) в новых координатах для определения коэффициентов ряда (1.5) получим

$$L_0\left(\frac{dU_0}{dz}, \frac{d^2U_0}{dz^2}, \ldots, \frac{d^kU_0}{dz^k}, U_0, z\right) = 0$$
$$L_1\left(\frac{dU_n}{dz}, \frac{d^2U_n}{dz^2}, \ldots, \frac{d^kU_n}{dz^k}, U_n, z\right) = F_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1.6}$$

где F_n зависит от z, U_0, $U_1, \ldots, U_{n-1}$ и их производных по z. Начиная с $n = 1$, дифференциальное уравнение для определения U_n будет уже не тем, что в переменной x. Различными будут правые части уравнений. Функция F_n содержит $x_1(z)$, $x_2(z), \ldots, x_n(z)$ и их производные, т. е. правые части уравнений зависят теперь от коэффициентов ряда (1.4). В методе Лайтхилла на F_n налагаются ограничения так, чтобы с ростом числа приближений порядок особенности не усиливался. Ограничения, налагаемые на F_n, приводят, вообще говоря, к дифференциальным уравнениям для определения $x_n(z)$. В переменной z более громоздкой, вообще говоря, становится также сама система уравнений (1.6).

Чтобы избежать дополнительных усложнений задачи, вызванных введением преобразования (1.4), попытаемся установить связь непосредственно между решениями систем уравнений (1.3) и (1.6). Функции u_n и U_n в разложениях (1.2) и (1.5) являются различными функциями своих аргументов. Сравним их между собой. Для этого, заменив x по формуле (1.4), каждый коэффициент ряда (1.2) представим рядом по степеням δ

$$u_n(x) = u_n(z+\delta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \delta^k \frac{d^k u_n(z)}{dz^k} \tag{1.7}$$

С другой стороны

$$\delta^k = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m x_m(z)\right)^k = \varepsilon^k \sum_{m=0}^{\infty} c_m \varepsilon^m \tag{1.8}$$

где

$$c_0 = [x_1(z)]^k, \qquad c_m = \frac{1}{mx_1} \sum_{p=1}^{m} (pk - m + p)\, x_{p+1} c_{m-p}$$

Подставляя (1.7) в ряд (1.2) и принимая во внимание равенство (1.8), получим

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{n-k} c_{n-m-k} \frac{1}{k!} \frac{d^k u_m(z)}{dz^k} \tag{1.9}$$

$$c_0 = x_1{}^k, \qquad c_{n-m-k} = \frac{1}{(n-m-k)\, x_1} \sum_{p=1}^{n-m-k} (pk - n + m + k + p)\, x_{p+1} c_{n-m-k-p}$$

Функция $u_m(z)$ в разложении (1.9) также зависит от z, как и $u_m(x)$ зависит от x.

Это позволяет сравнить между собой U_n и u_n при одинаковых аргументах. Из (1.5) и (1.9) следует, что

$$U_0(z) = u_0(z), \qquad U_n(z) = u_n(z) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=0}^{n-k} c_{n-m-k} \frac{1}{k!} \frac{d^k u_m(z)}{dz^k} \qquad (n \geqslant 1) \tag{1.10}$$

В формулу (1.10) входят только производные функций $u_0(z)$, $u_1(z), \ldots$ $\ldots, u_{n-1}(z)$, так как $c_m = 0$ при $k = 0$, $m \geqslant 1$.

Пользуясь формулой (1.10), можно определить решение системы (1.6), если известны $u_n(x)$. С другой стороны, при помощи (1.10) могут быть вычислены $u_n(z)$ по $U_n(z)$.

Для этого формулу (1.10) удобно представить в виде

$$u_n(z) = U_n(z) - \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=0}^{n-k} c_{n-m-k} \frac{1}{k!} \frac{du_m(z)}{dz^k} \tag{1.11}$$

Равенство (1.11) является рекуррентной формулой для вычисления u_n по U_n. При $n-1$ это же равенство позволяет выразить u_{n-1} через U_{n-1}, u_{n-2}, $u_{n-3}, \ldots, u_0$ и затем исключить u_{n-1} из правой части формулы (1.11). Применяя последовательно такую операцию, все входящие под знак суммирования слагаемые представим в виде функций U_{n-1}, $U_{n-2}, \ldots, U_0$ и коэффициентов c_m.

Полученный результат запишем следующим образом:

$$u_n(z) = U_n(z) - \Phi_n(U_0, U_1, \ldots, U_{n-1}) \tag{1.12}$$

Формулу (1.12) можно рассматривать как такое преобразование искомых функций, которое приводит систему уравнений (1.6) к системе дифференциальных уравнений (1.3). Действительно, если вместо U_n ввести новую искомую функцию $U_n - \Phi_n(U_0, U_1, \ldots, U_{n-1})$, то в силу (1.12) разность $U_n - \Phi_n$ должна удовлетворять тому же дифференциальному уравнению, что и $u_n(z)$, т. е.

$$L_1\left(\frac{d\,(U_n-\Phi_n)}{dz}, \quad \frac{d^2\,(U_n-\Phi_n)}{dz^2}, \ldots, \frac{d^k\,(U_n-\Phi_n)}{dz^k}, \quad (U_n-\Phi_n), z\right) = f_n \tag{1.13}$$

где f_n — та же функция от z, U_0, $U_1 - \Phi_1, \ldots, U_{n-1} - \Phi_{n-1}$, что и ранее от x, u_0, $u_1, \ldots, u_{n-1}$ соответственно.

Инвариантность системы дифференциальных уравнений (1.3) относительно преобразований (1.4) и (1.12) доказана выше в предположении сходимости рядов, использованных при выводе формул (1.10) и (1.11). Но, очевидно, в переменной z уравнение для U_n может быть приведено к виду (1.13) путем непосредственного вычисления F_n и, следовательно, независимо от того, сходится или нет вблизи некоторой точки ряд (1.2).

Пользуясь инвариантностью системы (1.3) относительно преобразований (1.4) и (1.12), укажем более простой, чем в работе [1], способ определения ряда (1.5).

Используя обычный метод малого параметра, найдем решение уравнения (1.1), т. е. вычислим коэффициенты ряда (1.1). Затем изменим в этих коэффициентах обозначения — вместо x в $u_n(x)$ запишем z. Функция $u_n(z)$ есть решение уравнения (1.13). При помощи формулы (1.10) по $u_n(z)$ найдем $U_n(z)$ — решение системы уравнений (1.6). c_{n-m-k}, а следовательно, и $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ выберем так, чтобы определяемые формулой (1.11) $U_n(z)$ имели бы особенности не более высокого порядка, чем U_0. Тогда ряд (1.5) будет представлять собой равномерно точное решение уравнения (1.1). В области сходимости рядов (1.2) и (1.5), переходя к координате x по формуле (1.4), получим исходное решение уравнения (1.1), т. е. то, которое было найдено обычным методом малого параметра.

Если граничные условия заданы в той области, где ряд (1.2) сходится, то в качестве исходного решения может быть взято частное решение системы уравнений (1.3), удовлетворяющее заданным граничным условиям.

Тогда формула (1.10) наряду с преобразованием (1.4) позволяет продолжить решение уравнения (1.1) в область, где первоначально найденный ряд (1.2) расходился. Пользуясь сначала рядом (1.2), вблизи особой точки найдем затем и $U_n(z)$ для той же самой интегральной кривой.

Если же граничные условия заданы там, где ряд (1.2) расходится, то при помощи формулы (1.10) и преобразования (1.4) из граничных условий для коэффициентов ряда (1.5) могут быть получены граничные условия для коэффициентов ряда (1.2), что опять позволит использовать ряд (1.2) при анализе полученного решения.

В заключение отметим, что условия, необходимые для построения равномерно точного решения, налагаются теперь непосредственно на интегралы системы дифференциальных уравнений (1.6), а не на правые части этих уравнений. В формулу (1.10) не входят производные x_n по z. Коэффициенты ряда (1.4) находятся весьма просто и их определение не связано больше с необходимостью решать дифференциальные уравнения.

2. Дифференциальные уравнения в частных производных. Аналогично тому, как это было сделано в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, может быть также упрощен процесс построения равномерно точных решений уравнений в частных производных. Пусть функция u, удовлетворяющая дифференциальному уравнению в частных производных, зависит от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Решение поставленной задачи зависит от малого параметра ε, который может входить как в дифференциальное уравнение, так и в граничные условия.

Решение дифференциального уравнения разыскивалось в виде степенного ряда по ε

$$u = \sum_{0}^{\infty} \varepsilon^n u_n (x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2.1}$$

При этом оказалось, что в рассматриваемой области изменения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ решение нулевого порядка имеет особые поверхности, вблизи которых радиус сходимости ряда (2.1) стремится к нулю. Для построения равномерно точного решения вводится преобразование координат

$$x_1 = z_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n f_n (z_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2.2}$$

а u представляется степенным рядом по ε с коэффициентами, зависящими от новых координат $z_1, x_2, \ldots, x_n$

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n U_n (z_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2.3}$$

Точно так же, как и для функции одной переменной, для функций нескольких переменных может быть записана формула, позволяющая определить $U_n(z_1, x_2, \ldots, x_n)$ по коэффициентам ряда (2.1). Она имеет вид (2.4)

$$U_0 (z_1, x_2, \ldots, x_n) = u_0 (x_1, \ldots, x_n) \big|_{x_1=z_1}$$

$$U_n (z_1, x_2, \ldots, x_n) = u_n (x_1, \ldots, x_n)\big|_{x_1=z_1} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=0}^{n-k} c_{n-m-k} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k u_m(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1{}^k}\bigg|_{x_1=z_1}$$

$$c_0 = f_1{}^k, \qquad c_{n-m-k} = \frac{1}{(n-m-k) f_1} \sum_{p=1}^{n-m-k} (pk + m + k - n + p) f_{p+1} c_{n-m-k-p}$$

Решение, полученное обычным методом малого параметра при помощи формулы (2.4), может быть продолжено в область особых поверхностей нулевого приближения. Метод продолжения решения ничем не отличается от изложенного в предыдущем разделе.

Поступила 8 I 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Lighthill M. I. A Technique for Rendering Approximate Solutions to Physical Problems Uniformly Valid. Philosophical Magazine, 1949, vol. 40, № 311.