Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ В СИСТЕМАХ С ОГРАНИЧЕННЫМИ КООРДИНАТАМИ

В. А. Троицкий

(Ленинград)

При построении оптимальных процессов управления в большинстве случаев учитываются только ограничения, накладываемые на параметры управления. Лишь в некоторых работах при решении частных задач предприняты попытки учета ограничений на координаты. В общей постановке задача оптимизации при наличии ограничений на координаты изучалась в статье [1] и в монографии [2].

Здесь излагается вариационная постановка задач оптимизации процессов управления в системах, координаты и управления которых могут быть ограниченными. Приводятся основные [2] необходимые условия минимума соответствующих функционалов, позволяющие строить решения таких задач.

1. Введение. Общая задача оптимизации процессов управления формулируется обычно для систем, описываемых дифференциальными уравнениями [2]

$$\dot{x}_s = f_s(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, t) = 0 \qquad (s = 1,\ldots, n) \tag{1.1}$$

которые будут дополняться конечными соотношениями [3,4]

$$\psi_k = \psi_k(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, t) = 0 \qquad (k = 1,\ldots, r) \tag{1.2}$$

Здесь $x_s(t)$ — координаты системы, а $u_k(t)$ — параметры управления. Производные последних не входят в уравнения задачи.

Задачи оптимизации для систем с ограниченными управлениями в вариационной постановке изучались в статьях [3, 4]. В них описаны приемы перехода к открытым областям изменения управлений и показано, что в оптимальных режимах параметры управления u_k могут принимать значения, соответствующие точкам границы замкнутой области U^* допустимых значений. Необходимость рассмотрения граничных значений управлений в этих задачах не очень сильно усложняла их решение, так как исследуемые системы и внутри и на границе области U^* описываются одинаковыми уравнениями.

В задачах оптимизации процессов управления в системах с ограниченными координатами получается аналогичный результат — координаты и управления таких систем в оптимальных режимах также могут принимать значения, соответствующие границам замкнутых областей X^* и U^* допустимых изменений координат и управлений. Однако в этом случае возможность выхода координат на границу может сильно усложнить задачу построения оптимальных режимов. Обусловлено это следующими обстоятельствами.

Поведение интегральных кривых системы с ограниченными координатами при заданных управлениях определяется уравнениями (1.1). Среди этих кривых может не оказаться таких, которые, хотя бы некоторыми своими частями, лежат на границе замкнутой области допустимых изменений координат, так как уравнения (1.1) и уравнение этой границы могут быть несовместимыми. Более того, уравнения (1.1) могут изменить вид или порядок при выходе изображающей точки на границу.

Поэтому, прежде чем заниматься построением соотношений, определяющих оптимальные режимы, следует остановиться на выяснении характера ограничений на координаты, с которыми приходится иметь дело при решении задач оптимизации.

Для определенности предполагается, что область X^* допустимых изменений координат $x_1, \ldots, x_n$ задается неравенством [1,2]

$$\vartheta(x_1, \ldots x_n) \leqslant 0 \tag{1.3}$$

Может случиться так, что это неравенство не отразит внутренние свойства системы и ее координаты в произвольных режимах движения могут выйти за пределы области X^*. Тогда можно говорить, что требование (1.3) накладывается на систему извне.

К представлению о таких ограничениях приводит рассмотрение следующего примера. Пусть построен оптимальный процесс в системе без учета ограничений на координаты и координаты в этом процессе принимают нежелательные или недопустимые значения. Тогда задачу оптимизации следует ставить заново, причем в этой новой постановке нужно отразить недопустимость определенных значений координат. В некоторых случаях это приведет к неравенству вида (1.3).

Ограничения на координаты, накладываемые на систему извне, будут в дальнейшем называться ограничениями первого типа.

Ограничения на координаты второго типа отражают наличие в системе ограничителей, таких, как упоры, зоны насыщения и т. п. В этом случае при любом движении системы ее координаты не могут выйти за пределы замкнутой области допустимых изменений координат.

С ограничениями на координаты второго типа приходится иметь дело, например, при наличии в системе непрямого управления самолетом упоров у рулей. Тогда рули не могут находиться вне интервалов, задаваемых упорами.

Аналогичные ограничения имеются в системе управления давлением в котле, при наличии предохранительных клапанов и во многих других случаях.

Следует отметить, что ограничения обоих типов могут задаваться одинаковыми неравенствами. Это может привести к ошибочному заключению, что математическое описание этих ограничений в задачах оптимизации будет одинаковым. В действительности это, конечно, не так.

Например, наличие упоров в системе управления движением самолета можно попытаться учесть при помощи ограничений на координаты рулей первого типа. Но такие ограничения выдерживают значения координат на границе независимо от упоров и эти упоры могут быть удалены. В такой постановке рули не оказывают давления на упоры. Это давление может быть учтено при помощи ограничений второго типа.

В работах [1,2] подробно изучены ограничения на координаты, накладываемые извне (первого типа), представляемые неравенством (1.3). В них установлено, что такое ограничение будет выполнено, если оптимальная траектория будет состоять из конечного числа участков, располагающихся внутри области X^* или на ее границе. Показано, что для того чтобы участок траектории на интервале $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ лежал на границе, необходимо и достаточно потребовать выполнения в момент $t = t_1$ равенства

$$\vartheta[x_1(t_1), \ldots, x_n(t_1)] = 0 \tag{1.4}$$

а во всем интервале $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ соотношения (1.5)

$$\psi_{r+1} = \psi_{r+1}(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, t) = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_s} f_s(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, t) = 0$$

Эта функция ψ_{r+1} дает проекцию фазовой скорости системы на внешнюю нормаль к границе $\vartheta = 0$ области (1.3). Так как эта проекция равна нулю и фазовая скорость касательна к границе, изображающая точка не оказывает «давления» на границу.

Равенство (1.5) накладывает на параметры управления дополнительную связь вида (1.2). Поэтому конец $t=t_2$ интервала $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ совпадает с моментом, непосредственно справа от которого при $t=t_2+0$ нет точек, в которых соотношение (1.5) может быть выполнено. Значения координат $x_s(t_2)$ в точке $t=t_2$ связаны зависимостью

$$\psi_{r+1}[x_1(t_2), \ldots, x_n(t_2), u_1(t_2), \ldots, u_m(t_2), t_2] = 0 \tag{1.6}$$

Если изображающая точка попадает на границу области X^*, соответствующей ограничению второго типа, то она будет находиться на этой границе до тех пор, пока «давление» ее на границу не переменит знак. Поэтому при ограничениях второго типа изображающая точка будет двигаться по границе все время, пока нормальная составляющая фазовой скорости будет неотрицательной

$$\psi_{r+1}(x_1, \ldots, x_n u_1, \ldots, u_m, t) \geqslant 0 \tag{1.7}$$

В точках границы выполняется равенство $\vartheta = 0$.

В момент $t=t_2$ фазовая скорость касается границы, так что при $t=t_2$ опять справедлива формула (1.6), причем $\psi_{r+1}(t_2+0) < 0$.

Так как при наличии ограничений второго типа изображающая точка может оказывать давление на границу области X^*, движение системы по этой границе может описываться уравнениями, отличными от уравнений движения ее внутри области X^*. В простейшей задаче такого рода, которая будет рассматриваться в дальнейшем, эти уравнения составляются при помощи уравнений движения системы внутри области X^*. Однако в общем случае это не имеет места и составление уравнений движения системы для точек границы представляет в каждой конкретной задаче предмет дополнительного исследования.

В дальнейшем будут изучаться системы с ограничениями второго типа, задаваемыми неравенствами

$$x_{s'} \leqslant 0 \tag{1.8}$$

причем будет предполагаться, что при выходе изображающей точки на границу движение системы описывается уравнениями (1.1), в которых уравнение с номером s' заменено равенством $x_{s'} = 0$.

Этим же приемом можно исследовать ограничения, характеризуемые неравенствами

$$X_{s'}^{(1)} \leqslant x_{s'}(t) \leqslant X_{s'}^{(2)} \tag{1.9}$$

2. Постановка задачи. При решении задач оптимизации процессов управления с ограниченными координатами будет использоваться следующая общая вариационная постановка.

Среди координат $x_1, \ldots, x_n$, не выходящих за пределы некоторой замкнутой области X^* их допустимых значений и управлений $u_1, \ldots, u_m$, удовлетворяющих в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ системе уравнений

$$g_s = \dot{x}_s - f_s(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, t) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

и конечным соотношениям

$$\psi_k = \psi_k(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, t) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r) \tag{2.2}$$

и связанных зависимостями

$$\varphi_l = \varphi_l\,[x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0), t_0, x_1(T), \ldots, x_n(T), T] = 0 \qquad (2.3)$$
$$(l = 1,\ldots, p \leqslant 2n+1)$$

требуется найти такие, которые сообщают функционалу

$$J = g\,[x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)\, t_0, x_1(T), \ldots, x_n(T), T] + \int\limits_{t_0}^{T} f_0(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, t)\,dt \qquad (2.4)$$

минимальное значение.

В этой формулировке особо не выделяется возможная принадлежность параметров управления u_k заданной замкнутой области их допустимых изменений. Это связано с тем, что приемы, описанные в работах [3-7], позволяют путем построения вспомогательных равенств вида (2.2) перейти к открытой области для управлений. В дальнейшем этот переход считается выполненным.

Можно попытаться аналогичными способами осуществить переход к открытой области изменения координат. Однако такой подход позволит лишь установить, что координаты системы в оптимальных режимах могут принимать значения внутри и на границе области X^*, и получить уравнения, определяющие участки оптимальных траекторий, расположенные внутри этой области.

Уравнения для участков, лежащих на границе, таким путем построить не удается. Это и неудивительно, так как при выходе координат системы на границу, как это уже указывалось, могут измениться ее уравнения движения, что таким построением не учитывается. Поэтому описанная постановка задачи нуждается в уточнении.

Будем считать, что оптимальная траектория состоит из конечного числа участков, расположенных или внутри или на границе области X^*. Для внесения определенности всем входящим в уравнения (2.1) и (2.2) функциям, соответствующим границе области X^*, будет в дальнейшем приписываться значок «нуль». Эти же функции, принадлежащие участку левее граничного, будут отмечаться значком —, а функции, соответствующие участку правее граничного, значком +.

Если рассматривается ограничение первого типа (извне), то для значений координат на границе области X^* уравнения (2.2) должны быть дополнены равенством (1.5). Кроме этого, нужно учесть условие (1.4), определяющее момент выхода координат на границу, и равенство (1.6), характеризующее момент перехода координат с границы внутрь области X^*.

Для ограничений второго типа задача усложняется, так как при выходе координат системы на границу уравнения движения ее могут измениться. В том простейшем случае, о котором мы говорили выше, на границе будут справедливы уравнения

$$g_s{}^0 = \dot{x}_s{}^0 - f_s{}^0(x_1{}^0, \ldots, x_n{}^0, u_1{}^0, \ldots, u_m{}^0, t) = 0 \quad (s \neq s'), \quad g_{s'} = x_{s'} = 0 \qquad (2.5)$$

При этом момент $t = t_1$ выхода координат системы на границу определится равенством

$$x_{s'}(t_1) = 0 \qquad (2.6)$$

а в момент $t = t_2$ перехода их с границы внутрь области будем иметь

$$f_{s'}\,[x_1(t_2), \ldots, x_n(t_2), u_1(t_2), \ldots, u_m(t_2), t_2] = 0 \qquad (2.7)$$

причем в этой точке $f_{s'}$ меняет знак. Аналогично рассматриваются неравенства другого вида.

Уравнения (2.1) и (2.2) при надлежащем выборе чисел n и r описывают поведение системы в любом из рассмотренных выше случаев.

В такой уточненной постановке задача оптимизации процессов управления в системах с ограниченными координатами становится задачей типа Майера — Больца вариационного исчисления [8]. По сравнению с рассмотренными ранее случаями [3,4] она значительно усложняется необходимостью учета различия уравнений движения на различных участках интегральных кривых. В этом отношении она напоминает задачу оптимизации процессов управления для уравнений с разрывными правыми частями [9].

В книге Г. А. Блисса [8] и в работах [4,9] описан процесс установления необходимых условий в вариационных задачах оптимизации. Соответствующие выкладки и рассуждения могут быть, конечно, распространены на рассматриваемые здесь случаи. Однако даже краткое их изложение занимает много места и в статье не приводится, хотя результаты такого распространения с надлежащими пояснениями используются в дальнейшем.

Так же, как и раньше, будут рассмотрены необходимое условие стационарности функционала J и необходимое условие Вейерштрасса его сильного минимума. При этом будет, конечно, предполагаться, что все требования, накладываемые обычно в вариационном исчислении на функции, входящие в формулировку задачи, выполнены. Сообщающие минимум функционалу J функции будут искаться среди непрерывных координат $x_s(t)$ с кусочно-непрерывными производными $\dot{x}_s(t)$ и среди кусочно-непрерывных управлений $u_k(t)$.

3. Необходимое условие стационарности функционала J. Ограничения на координаты первого типа. Для простоты будет сначала предполагаться, что в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ имеется только одна точка $t = t_1$ перехода координат системы из внутренней части области X^* на ее границу и других угловых точек нет [4]. Будем считать для определенности, что замкнутая область X^* задается неравенством (1.3). Это позволит провести сравнение получаемых ниже формул и соотношений с соответствующими результатами, установленными в работах [1,2].

В подынтервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ справедливы уравнения

$$g_s^- = \dot{x}_s^- - f_s^-(x_1^-, \ldots, x_n^-, u_1^-, \ldots, u_m^-, t) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \qquad (3.1)$$

$$\psi_k^- = \psi_k^-(x_1^-, \ldots, x_n^-, u_1^-, \ldots, u_m^-, t) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r) \qquad (3.2)$$

причем в подынтервале $t_1 \leqslant t \leqslant T$ они должны быть заменены системой

$$g_s^\circ = \dot{x}_s^\circ - f_s^\circ(x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, u_1^\circ, \ldots, u_m^\circ, t) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \qquad (3.3)$$

$$\psi_k^\circ = \psi_k(x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, u_1^\circ, \ldots, u_m^\circ, t) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r+1) \qquad (3.4)$$

в которых ψ_{r+1}° определяется соотношением (1.5).

Следует особо подчеркнуть, что при любом $r < m$ могут иметь место случаи, когда зависимости (3.4) не имеют решений относительно управлений $u_k(t)$ в допустимой области их значений. При $r = m - 1$ задача оптимизации движения системы, соответствующего границе области X^*, может также потерять смысл из-за того, что этим равенствам будет удовлетворять единственная система допустимых функций $u_k(t)$. Поэтому в дальнейшем считается, что уравнения (3.4) удовлетворяются допустимыми управлениями $u_k(t)$ неединственным способом.

В момент $t = t_1$ должно выполняться равенство (1.4) и функционал I, при помощи которого строится необходимое условие стационарности функционала J, должен быть взят в следующем виде [9]:

$$I = \varphi + \nu_1 \vartheta\,[x_1(t_1), \ldots, x_n(t_1)] + \int\limits_{t_0}^{t_1} L^- dt + \int\limits_{t_1}^{T} L^\circ dt \qquad (3.5)$$

В выражение (3.5) введены следующие обозначения:

$$\varphi = g + \sum_{l=1}^{p} \rho_l \varphi_l \tag{3.6}$$

$$L^- = f_0^- + \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^- g_s^- - \sum_{k=1}^{r} \mu_k^- \psi_k^- = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^- \dot{x}_s^- - H^- \tag{3.7}$$

$$L^\circ = f_0^\circ + \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^\circ g_s^\circ - \sum_{k=1}^{r+1} \mu_k^\circ \psi_k^\circ = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^\circ \dot{x}_s^\circ - H^\circ - \mu_{r+1}^\circ \psi_{r+1}^\circ \tag{3.8}$$

$$H^- = H_\lambda^- + H_\mu^- = \sum_{s=0}^{n} \lambda_s^- f_s^- + \sum_{k=1}^{r} \mu_k^- \psi_k^- \qquad (\lambda_0^- = -1) \tag{3.9}$$

$$H^\circ = H_\lambda^\circ + H_\mu^\circ = \sum_{s=0}^{n} \lambda_s^\circ f_s^\circ + \sum_{k=1}^{r} \mu_k^\circ \psi_k^\circ \qquad (\lambda_0^\circ = -1) \tag{3.10}$$

и $\lambda_s^-(t)$, $\lambda_s^\circ(t)$, $\mu_k^-(t)$, $\mu_k^\circ(t)$, ρ_l и ν_1 — подлежащие вычислению неопределенные множители Лагранжа.

Условие стационарности получается приравниванием нулю первой вариации функционала I и представляется равенством $\Delta I = 0$.

Подставив в соотношение (3.5) функции L^- и L° из формул (3.7) и (3.8) и составив эту вариацию, придем к выражению

$$\Delta I = \Delta\varphi + \nu_1 \Delta\vartheta + (f_0^- - f_0^\circ)_{t_1} \delta t_1 - (f_0)_{t_0} \delta t_0 + (f_0)_T \delta T +$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^- \delta \dot{x}_s^- - \delta H^- \right] dt + \int_{t_1}^{T} \left[\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^\circ \delta \dot{x}_s^\circ - \delta H^\circ - \mu_{r+1}^\circ \delta \psi_{r+1}^\circ \right] dt$$

так что после однократного интегрирования по частям стоящих под интегралами сумм и разворачивания вариаций отдельных функций будем иметь

$$\Delta I = \sum_{s=1}^{n} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_s(t_0)} - \lambda_s(t_0) \right] \Delta x_s(t_0) + \sum_{s=1}^{n} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_s(T)} + \lambda_s(T) \right] \Delta x_s(T) +$$
$$+ \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t_0} + (H_\lambda)_{t_0} \right] \delta t_0 + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial T} - (H_\lambda)_T \right] \delta T +$$
$$+ \sum_{s=1}^{n} \left[\lambda_s^-(t_1) - \lambda_s^\circ(t_1) + \nu_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial x_s(t_1)} \right] \Delta x_s(t_1) + [H_\lambda^\circ - H_\lambda^-]_{t_1} \delta t_1 -$$
$$- \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{s=1}^{n} \left(\dot{\lambda}_s^- + \frac{\partial H^-}{\partial x_s^-} \right) \delta x_s^- - \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H^-}{\partial u_k^-} \delta u_k^- \right] dt -$$
$$- \int_{t_1}^{T} \left[\sum_{s=1}^{n} \left(\dot{\lambda}_s^\circ + \frac{\partial H^\circ}{\partial x_s^\circ} + \frac{\partial \psi_{r+1}^\circ}{\partial x_s} \mu_{r+1}^\circ \right) \delta x_s^\circ + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial H^\circ}{\partial u_k^\circ} + \mu_{r+1}^\circ \frac{\partial \psi_{r+1}^\circ}{\partial u_k^\circ} \right) \delta u_k^\circ \right] dt \tag{3.11}$$

Здесь использованы уравнения (3.1) и (3.3) и обозначения (3.9) и (3.10), там, где это не вносит путаницы, опущены значки и, например, через $(f_0^-)_{t_1}$ обозначено значение функции f_0^- в точке $t = t_1$.

Вариация (3.11) должна быть равна нулю, поэтому будут равны нулю коэффициенты при всех независимых вариациях переменных. Соответствующие коэффициенты при зависимых вариациях переменных можно обратить в нуль за счет выбора лагранжевых множителей. После этих операций получается система уравнений

$$\dot{\lambda}_s^- + \frac{\partial H^-}{\partial x_s^-} = 0, \qquad \dot{\lambda}_s^\circ + \frac{\partial H^\circ}{\partial x_s^\circ} + \mu_{r+1}^\circ \frac{\partial \psi_{r+1}^\circ}{\partial x_s^\circ} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{3.12}$$

и соотношений

$$\frac{\partial H^-}{\partial u_k^-} = 0, \qquad \frac{\partial H^\circ}{\partial u_k^\circ} + \mu_{r+1}^\circ \frac{\partial \psi_{r+1}^\circ}{\partial u_k^\circ} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{3.13}$$

равенства

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_s(t_0)} - \lambda_s(t_0) = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x_s(T)} + \lambda_s(T) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_0} + (H_\lambda)_{t_0} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial T} - (H_\lambda)_T = 0 \tag{3.15}$$

и условия Эрдманна — Вейерштрасса

$$\lambda_s^-(t_1) - \lambda_s^\circ(t_1) + \nu_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial x_s(t_1)} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{3.16}$$

$$(H_{\lambda^-})_{t_1} - (H_{\lambda^\circ})_{t_1} = 0 \tag{3.17}$$

При решении задач оптимизации нужно использовать еще уравнения (3.1) — (3.4), зависимости (2.3), равенство (1.4) и условия непрерывности координат

$$x_s^-(t_1) = x_s^\circ(t_1) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{3.18}$$

Тогда число $4n + 2m + 2r + 1$ уравнений (3.1) — (3.4), (3.12), (3.13) будет совпадать с числом функций $x_s^-(t)$, $x_s^\circ(t)$, $u_k^-(t)$, $u_k^\circ(t)$, $\lambda_s^-(t)$, $\lambda_s^\circ(t)$, $\mu_k^-(t)$, $\mu_k^\circ(t)$. Решение дифференциальных уравнений (3.1), (3.3) и (3.12) содержит $4n$ постоянных интегрирования, для нахождения которых вместе с p множителями ρ_e и величинами t_0, t_1, T нужно использовать $4n + p + 3$ условий (3.14), (3.16), (3.18), (2.3), (3.15) и (3.17).

Предположим теперь, что в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ имеется только одна точка $t = t_2$ перехода координат системы с границы внутрь области X^* и других угловых точек нет.

Тогда в подынтервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_2$ справедливы уравнения (3.3) и (3.4), а в подынтервале $t_2 \leqslant t \leqslant T$ будем иметь

$$g_s^+ = \dot{x}_s^+ - f_s^+(x_1^+, \ldots, x_n^+, u_1^+, \ldots, u_m^+, t) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{3.19}$$

$$\psi_k^+ = \psi_k^+(x_1^+, \ldots, x_n^+, \quad u_1^+, \ldots, \quad u_m^+, \quad t) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r) \tag{3.20}$$

причем в момент $t = t_2$ выполняется соотношение (1.5).

В этом случае функционал I, при помощи которого строится условие стационарности, следует брать в форме

$$I = \varphi + \int_{t_0}^{t_2} L^\circ\, dt + \int_{t_2}^{T} L^+\, dt \tag{3.21}$$

(так как точка $t = t_2$ не будет угловой). Здесь φ определяется равенством (3.6), функция L° — зависимостью (3.8), в которой H° имеет выражение (3.10).

Для L^+ будем иметь формулу

$$L^+ = f_0^+ + \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^+ g_s^+ + \sum_{k=1}^{r} \mu_k^+ \psi_k^+ = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^+ \dot{x}_s^+ - H^+ \tag{3.22}$$

где

$$H^+ = H_\lambda^+ + H_\mu^+ = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^+ f_s^+ + \sum_{k=1}^{r} \mu_k^+ \psi_k^+ \qquad (\lambda_0^+ = -1) \tag{3.23}$$

и $\lambda_s^+(t)$, $\mu_k^+(t)$ — неопределенные множители Лагранжа.

Составив и приравняв нулю первую вариацию ΔI функционала I и повторив все описанные выше операции, придем к уравнениям

$$\dot{\lambda}_s^+ + \frac{\partial H^+}{\partial x_s^+} = 0, \qquad \dot{\lambda}_s^\circ + \frac{\partial H^\circ}{\partial x_s^\circ} + \mu_{r+1}^\circ \frac{\partial \overset{\circ}{\psi}_{r+1}}{\partial x_s^\circ} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial H^+}{\partial u_k^+} = 0, \qquad \frac{\partial H^\circ}{\partial u_k^\circ} + \mu_{r+1}^\circ \frac{\partial \overset{\circ}{\psi}_{r+1}}{\partial u_k^\circ} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{3.25}$$

равенствам (3.15) и (3.16) и условиям Эрдманна — Вейерштрасса

$$\lambda_s^\circ(t_2) - \lambda_s^+(t_2) = 0 \quad (s = 1, \ldots, n), \qquad (H_\lambda^\circ - H_\lambda^+)_{t_2} = 0 \tag{3.26}$$

Так же, как в предыдущем случае, проводится подсчет числа уравнений и функций и числа постоянных и условий, их определяющих.

Можно было бы с самого начала предположить, что в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ имеются две точки $t = t_1$ и $t = t_2$ описанного выше типа. Это усложнило бы выкладки, но не изменило бы их конечного результата. Не меняют результатов и более общие предположения.

Разрывы управлений $u_k(t)$, если такие имеются в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$, изучаются так же, как это делалось в статьях [4,9]. Особый случай совпадения момента разрыва управления и момента перехода координат системы на границу или с границы области X^* исследуется так же, как это делалось в статье [9].

4. Условие стационарности функционала J. Ограничения на координаты второго типа. Рассмотрим простые, но наиболее часто встречающиеся ограничения, задаваемые неравенствами (1.8). Для простоты будем сначала считать, что имеется только одно ограничение $x_1 \leqslant 0$, считая при этом $s' = 1$, что, конечно, всегда может быть сделано изменением нумерации переменных.

Предположим опять, что в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ имеется только одна точка $t = t_1$ перехода координат системы из внутренней части области X^* на ее границу. Тогда в подынтервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ нужно использовать уравнения (3.1) и (3.2), а в интервале $t_1 \leqslant t \leqslant T$ будем иметь

$$g_1^\circ = x_1^\circ = 0 \tag{4.1}$$

$$g_s^\circ = \dot{x}_s^\circ - f_s^\circ(x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, u_1^\circ, \ldots, u_m^\circ, t) = 0 \qquad (s = 2, \ldots, n) \tag{4.2}$$

$$\psi_k^\circ = \psi_k^\circ(x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, u_1^\circ, \ldots, u_m^\circ, t) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r) \tag{4.3}$$

причем в функции f_s° и ψ_k° нужно подставить $x_1^\circ = 0$. В момент $t = t_1$ выполняется равенство $x_1(t_1) = 0$. Функционал I будет иметь вид

$$I = \varphi + \nu_1 x_1(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} L^- dt + \int_{t_2}^{T} L^\circ dt \tag{4.4}$$

где φ дается равенством (3.6), L^- и H^- определяются выражениями (3.7) и (3.9), а функция L° равна

$$L^\circ = f_0^\circ - \lambda_1^\circ x_1^\circ + \sum_{s=1}^{n} \lambda_s^\circ g_s^\circ - \sum_{k=1}^{r} \mu_k^\circ \psi_k^\circ = \sum_{s=2}^{n} \lambda_s^\circ \dot{x}_s^\circ - H^\circ \tag{4.5}$$

причем

$$H^\circ = H_\lambda^\circ + H_\mu^\circ = \sum_{s=0}^{n} \lambda_s^\circ f_s^\circ + \sum_{k=1}^{r} \mu_k^\circ \psi_k^\circ \qquad (f_1^\circ = x_1^\circ = 0,\ \lambda_0^\circ = -1) \tag{4.6}$$

Первая вариация ΔI функционала I представится равенством

$$\Delta I = \Delta\varphi + \nu_1 \Delta x_1(t_1) + (f_0^-)_{t_1}\delta t_1 - (f_0)_{t_0}\delta t_0 + (f_0)_T \delta T - (f_0^\circ)_{t_1}\delta t_1 + $$
$$+ \int_{t_0}^{t_1} \Big(\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^- \delta \dot{x}_s^- - \delta H^-\Big) dt + \int_{t_1}^{T} \Big(\sum_{s=2}^{n} \lambda_s^\circ \delta \dot{x}_s^\circ - \delta H^\circ\Big) dt$$

так что после преобразований, аналогичным выше, получим

$$\Delta I = \sum_{s=1}^{n} \Big[\frac{\partial\varphi}{\partial x_s(t_0)} - \lambda_s(t_0)\Big] \Delta x_s(t_0) + \sum_{s=1}^{n} \Big[\frac{\partial\varphi}{\partial x_s(T)} + \lambda_s(T)\Big] \Delta x_s(T) +$$
$$+ \sum_{s=2}^{n} [\lambda_s^-(t_1) - \lambda_s^\circ(t_1)]\, \Delta x_s(t_1) + [\lambda_1(t_1) + \nu_1]\, \Delta x_1(t_1) + \Big[\frac{\partial\varphi}{\partial t_0} + (H_\lambda)_{t_0}\Big] \delta t_0 +$$
$$+ \Big[\frac{\partial\varphi}{\partial T} - (H_\lambda)_T\Big] \delta T + [H_\lambda^\circ - H_\lambda^-]_{t_1} \delta t_1 - \int_{t_0}^{t_1} \Big[\sum_{s=1}^{n} \Big(\dot\lambda_s^- + \frac{\partial H^-}{\partial x_s^-}\Big) \delta x_s^- +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H^-}{\partial u_k^-} \delta u_k^-\Big] dt - \int_{t_1}^{T} \Big[\sum_{s=2}^{n} \Big(\dot\lambda_s^\circ + \frac{\partial H^\circ}{\partial x_s^\circ}\Big) \delta x_s^\circ + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H^\circ}{\partial u_k^\circ} \delta u_k^\circ\Big] dt \tag{4.7}$$

Приравняв опять нулю коэффициенты при независимых вариациях и выбрав лагранжевы множители так, чтобы обратились в нуль коэффициенты при зависимых вариациях переменных, найдем уравнения

$$\dot\lambda_s^- + \frac{\partial H^-}{\partial x_s^-} = 0, \quad (s = 1, \ldots, n), \qquad \dot\lambda_s^\circ + \frac{\partial H^\circ}{\partial x_s^\circ} = 0 \quad (s = 2, \ldots, n) \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial H^-}{\partial u_k^-} = 0, \qquad \frac{\partial H^\circ}{\partial u_k^\circ} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{4.9}$$

концевые условия

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_s(t_0)} - \lambda_s(t_0) = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_s(T)} + \lambda_s(T) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t_0} + (H_\lambda)_{t_0} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial T} - (H_\lambda)_T = 0 \tag{4.11}$$

и условия Эрдманна — Вейерштрасса

$$\lambda_s^-(t_1) = \lambda_s^\circ(t_1), \quad (s = 2, \ldots, n), \qquad \lambda_1^-(t_1) + \nu_1 = 0 \tag{4.12}$$

$$(H_\lambda^- - H_\lambda^\circ)_{t_1} = 0 \tag{4.13}$$

Для решения задачи к ним нужно добавить уравнения (3.1), (3.2), (4.1), (4.2), (4.3) и условия (2.3) и (3.19) при $s \neq 1$ и равенство $x_1(t_1) = 0$.

Аналогичным способом рассматривается случай наличия в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$ одного момента $t = t_2$ перехода координат с границы внутрь области X^*. Точка $t = t_2$ должна в этом случае удовлетворять условию

$$f_1[x_1(t_2), \ldots, x_n(t_2), u_1(t_2), \ldots, u_m(t_2), t_2] = 0 \tag{4.14}$$

Поэтому после соответствующих выкладок придем к уравнениям

$$\dot{\lambda}_s^\circ + \frac{\partial H^\circ}{\partial x_s^\circ} = 0 \quad (s = 2, \ldots, n), \qquad \dot{\lambda}_s^+ + \frac{\partial H^+}{\partial x_s^+} = 0 \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{4.15}$$

$$\frac{\partial H^\circ}{\partial u_k^\circ} = 0, \qquad \frac{\partial H^+}{\partial u_k^+} = 0 \quad (k = 1, \ldots, m) \tag{4.16}$$

Концевые условия сохранят свой вид (4.10) и (4.11), а условия Эрдманна — Вейерштрасса запишутся в форме

$$\lambda_s^\circ(t_2) - \lambda_s^+(t_2) = 0 \quad (s = 2, \ldots, n), \qquad -\lambda_1^+(t_2) = 0 \tag{4.17}$$

$$(H_\lambda^\circ - H_\lambda^+)_{t_2} = 0 \tag{4.18}$$

Еще раз отметим, что предположения более общего типа, чем те, которые были сделаны выше, не изменят результатов, но могут заметно усложнить процесс их получения. Точки разрыва управлений изучаются так же, как это делалось в работе [4]. Аналогично изложенному в статье [9] рассматриваются моменты разрыва управлений $u_k(t)$ и перехода изображающей точки на границу или внутрь области X^*. Соответствующие соотношения в этом случае совпадают с приведенными в этом пункте.

Аналогичными способами строится развернутая форма условия стационарности при задании области X^* несколькими неравенствами вида (1.8). Здесь придется рассмотреть различные части границы области X^*, определяемые различными равенствами типа $x_{s'} = 0$, соответствующие указанным выше неравенствам, а также случаи одновременного выполнения нескольких из этих равенств, определяющих границу.

Заметных усложнений не вносит также переход к замкнутым областям X^*, задаваемым неравенствами (1.9). В этом случае $f_{s'} \geqslant 0$ при $x_{s'} = X_{s'}^{(2)}$ и $f_{s'} \leqslant 0$ при $x_{s'} = X_{s'}^{(1)}$. Все остальные результаты остаются в силе.

5. Необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума функционала *J*. Если повторить рассуждения и выкладки, описанные в книге Г. А. Блисса [8] и изложенные в применении к задачам оптимизации с ограничениями на управления в работе [4], то в изучаемом здесь случае ограниченных координат необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума функционала J представится неравенством

$$E \geqslant 0 \tag{5.1}$$

в котором E — функция Вейерштрасса, составленная по формуле

$$\begin{aligned} E = {} & L(x_1, \ldots, x_n, \dot{X}_1, \ldots, \dot{X}_n, U_1, \ldots, U_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_r, t) - \\ & - L(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, u_1, \ldots, u_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_r t) - \\ & - \sum_s (\dot{X}_s - \dot{x}_s) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s} \end{aligned} \tag{5.2}$$

Здесь x_s и u_k — функции, сообщающие минимум функционалу J, а X_s и U_k — любые допустимые функции, удовлетворяющие уравнениям задачи.

Соотношение (5.2) справедливо при наличии ограничений на координаты любого типа и внутри области X^* и на ее границе. При вычислениях в выражение для E нужно подставлять функцию L с соответствующим значком минус (—), плюс (+) или нуль (0), для чего следует воспользоваться приведенными в предыдущих двух пунктах выражениями. Эти значки в равенстве (5.2) опущены так же, как пределы у суммы, стоящей в его правой части. Следует также помнить, что число множителей λ_s и μ_k в различных случаях может быть различным.

Подставив в (5.2) выражение L и использовав неравенство (5.1), придем к следующей форме необходимого условия Вейерштрасса:

$$H_\lambda(x_1, \ldots, x_n, U_1, \ldots, U_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, t) \leqslant$$
$$\leqslant H_\lambda(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, t) \qquad (5.3)$$

где учтено тождество $H_\mu \equiv 0$ и равенство $\psi_{r+1}^{\circ} = 0$.

Полученные здесь результаты для систем с ограничениями на координаты первого типа могут быть сформулированы в виде, аналогичном приведенному в работах [1,2], где соответствующая задача решалась приемами, использующими построения принципа максимума Л. С. Понтрягина.

Приведенные выше уравнения и соотношения выписывались в форме, несколько более сложной, чем это нужно для рассматриваемых задач. Это незначительное усложнение (введение значков нуль (0), минус (—) и плюс (+)) дает возможность изучать более сложные задачи, такие, как задача оптимизации процессов управления в системах с ограниченными координатами, описываемых уравнениями с разрывными правыми частями. Описанные выше результаты справедливы в этих случаях без каких-либо заметных изменений. В работе [9] они использованы при расчете оптимальных режимов работы вибротранспортеров.

6. О синтезе оптимальных систем. Общая математическая формулировка задачи синтеза оптимальных систем с ограниченными управлениями описана в работах [2,10]. Она ставится как задача построения функций $v_k = v_k(x_1, \ldots, x_n, t)$, определяющих значения управлений в каждой точке пространства $x_1, \ldots, x_n, t$ таким образом, что движение системы, описываемое уравнениями (2.1) и (2.2) при $u_k = v_k$ сообщает минимум функционалу J при любых начальных значениях координат.

Такая постановка при учете ограничений на координаты и зависимостей (2.3) без каких-либо существенных изменений распространяется на изучаемые здесь задачи. В этом пункте отмечаются некоторые особенности задачи синтеза оптимальных систем с ограниченными координатами и управлениями, отличающие ее от аналогичной задачи при наличии ограничений только на управления. Поэтому будем различать задачу синтеза оптимальных управлений для системы с ограничениями на координаты и управления и аналогичную задачу, получающуюся из нее путем перехода к открытой области изменения координат. Результаты решения последней, если оно существует и может быть построено, остаются справедливыми для любых оптимальных траекторий, целиком лежащих внутри области X^* и даже касающихся границы этой области в конечном числе точек.

Для траекторий, имеющих участки, целиком принадлежащие границе области X^*, задача синтеза значительно усложняется. Так, например, при наличии ограничений на координаты первого типа и при движении системы по границе к уравнениям, описывающим поведение ее внутри области X^*, нужно добавить уравнение вида (1.5); функции u_k могут этому уравнению не удовлетворять. Поэтому синтезирующие функции должны строиться в этом случае отдельно для участков оптимальных траекторий, лежащих внутри области X^*, и для участков на ее границе.

То же самое нужно повторитть и для общей постановки задач оптимизации при наличии ограничений на координаты второго типа. Однако в этом случае, по-видимому, существует достаточно широкий класс систем, решение задачи синтеза которых доставляется решением соответствующей задачи без ограничений на координаты.

Это будет иметь место тогда, когда участкам оптимальных траекторий, лежащим внутри области X^*, можно сопоставить оптимальные траектории задачи без ограничения на координаты, целиком их содержащие, и когда параметры управления на границе области X^* меняются так же, как в открытой области для координат. Такое совпадение законов изменения управлений, по-видимому, может встретиться в задачах оптимизации при наличии замкнутых областей изменения управлений, в которых параметры управления в оптимальных режимах принимают только граничные значения.

7. Пример. В качестве примера, поясняющего некоторые из сформулированных выше общих положений, рассмотрим задачу оптимизации длительности перехода из состояния $\varphi(0)=\varphi^\circ$, $\xi(0)=\xi^\circ$ в положение равновесия $\varphi(T)=\xi(T)=0$ простой системы непрямого управления астатическим объектом, описываемой уравнениями

$$T_a\dot{\varphi}=\xi, \qquad T_s\dot{\xi}=u \qquad (|u|\leqslant 1) \tag{7.1}$$

в которых φ — выходная координата объекта, ξ — координата органа управления, $|u|\leqslant 1$ — входная величина усилителя (параметр управления).

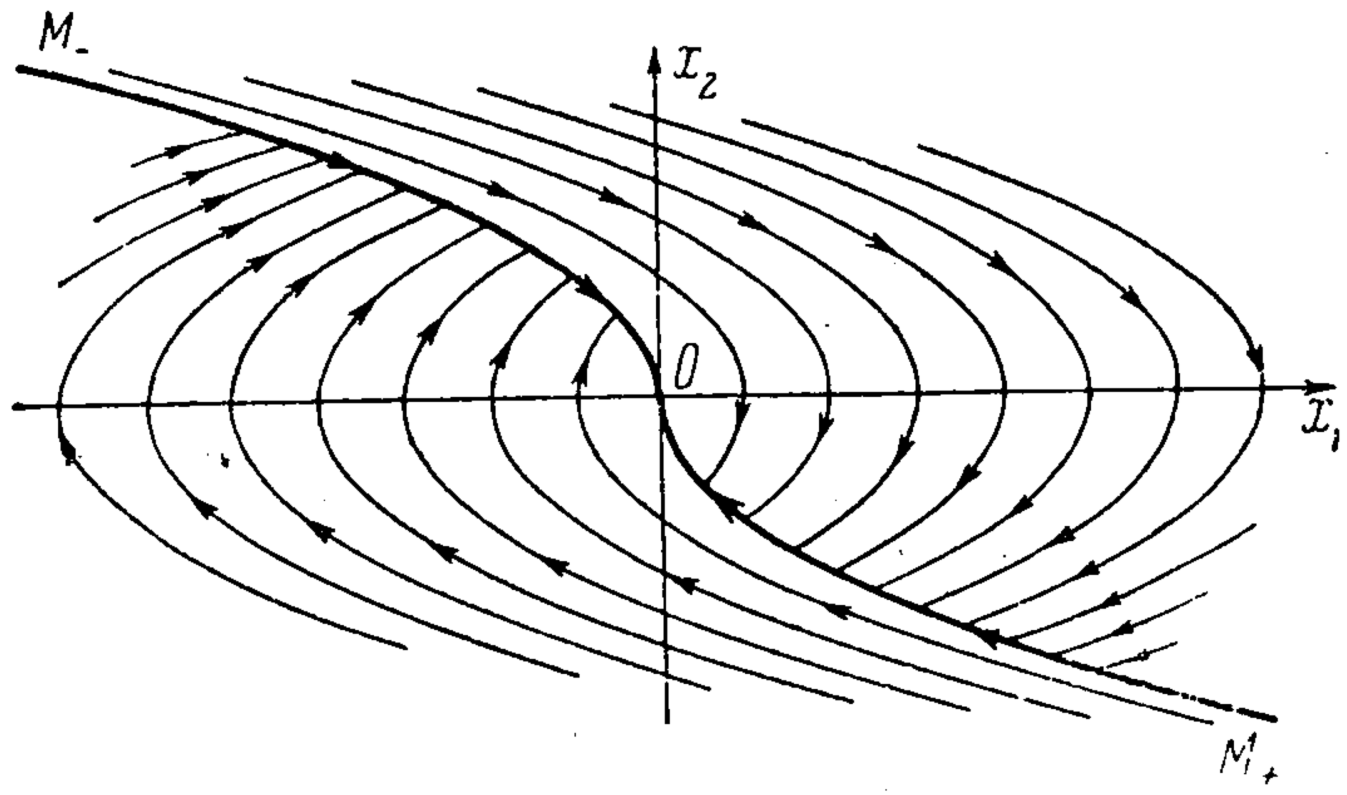

Рис. 1

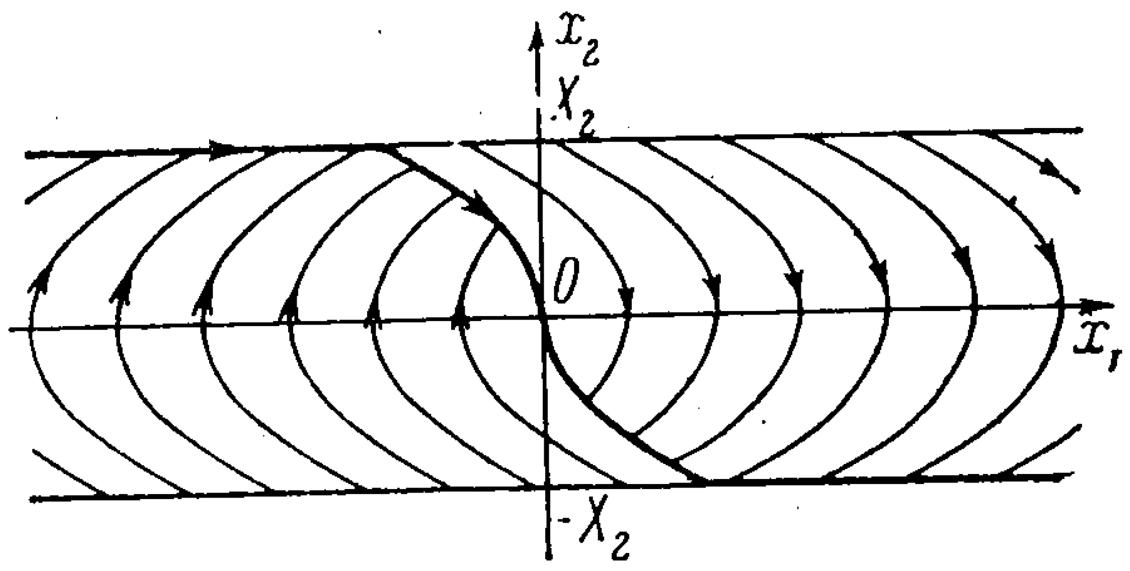

Рис. 2

Введем обозначения $x_1=T_aT_s\varphi$, $x_2=T_s\xi$ и сформулируем задачу оптимизации следующим образом. Среди функций x_1, x_2, u и v, удовлетворяющих уравнениям

$$g_1=\dot{x}_1-x_2=0, \qquad g_2=\dot{x}_2-u=0, \qquad \psi=u^2+v^2-1=0 \tag{7.2}$$

и зависимостям $\varphi_1=x_1(T)=0$, $\varphi_2=x_2(T)=0$, выбрать сообщающие функционалу $J=T$ минимальное значение.

Здесь, для того чтобы избавиться от лишних лагранжевых множителей ρ_l, левый конец траектории считается фиксированным [3] и введена функция ψ, осуществляющая переход к открытой области изменения u и дополнительного управления v. Эта задача без ограничений на координаты достаточно хорошо изучена [2,11].

Составляем функции H и φ

$$H=H_\lambda+H_\mu=\lambda_1x_2+\lambda_2u+\mu(u^2+v^2-1) \tag{7.3}$$

$$\varphi=T+\rho_1x_1(T)+\rho_2x_2(T) \tag{7.4}$$

при помощи которых строим уравнения

$$\dot{\lambda}_1=0, \qquad \dot{\lambda}_2=-\lambda_1, \qquad \lambda_2+2\mu u=0, \qquad 2\mu v=0 \tag{7.5}$$

и условия Эрдманна — Вейерштрасса [3]

$$\lambda_1^+(t^*)=\lambda_1^-(t^*), \qquad \lambda_2^+(t^*)=\lambda_2^-(t^*) \qquad (H_\lambda^-)_{t^*}=(H_\lambda^+)_{t^*} \tag{7.6}$$

справедливые в открытой области изменения координат, и равенства

$$\lambda_1(T)=-\rho_1, \qquad \lambda_2(T)=\rho_2 \tag{7.7}$$

Решение дифференциальных уравнений (7.5), удовлетворяющее условиям (7.7), имеет вид

$$\lambda_1=-\rho_1, \qquad \lambda_2=\rho_1(t-T)-\rho_2 \tag{7.8}$$

так что функция $\mu=-\lambda_2$ в интервале $t_0\leqslant t\leqslant T$ меняет знак не более одного раза. Далее имеем $v=0$ при $\mu\neq 0$. Следовательно, $u=\pm 1$ всюду, кроме единственной точки $t=t^*$, в которой $\lambda_2(t^*)=0$.

Дальнейшее решение задачи проводится так же, как это делалось, например, в работах [2,11]. В результате получится семейство оптимальных траекторий, показанное на фиг. 1.

Пусть, например, координата x_2 ограничена неравенством $|x_2|\leqslant X_2$. Оно выделит на фазовой плоскости полосу шириной $2X_2$, показанную на фиг. 2. Оптимальные траектории, расположенные внутри этой полосы, будут состоять из двух парабол. В такой системе могут иметь место и режимы с выходами на границу $x_2 = \pm X_2$; последний этап движения будет происходить по ветвям парабол M_-O и M_+O, проходящим через начало координат.

При ограничениях первого типа $u = 0$; при ограничениях второго типа управление может быть любым и может принимать значение, соответствующее предыдущему этапу движения. Движение по границе в обоих случаях будет описываться уравнением $\dot{x}_1 = \pm X_2$, где нижний знак соответствует границе $x_2 = -X_2$, а верхний — равенству $x_2 = X_2$.

Если интервал допустимых изменений координаты x_1, задается неравенством $|x_1| \leqslant X_1$, то задача решается аналогично предыдущей. Соответствующие построения показаны на фиг. 3. Они выполнены для ограничения второго типа. Для ограничений первого типа условию $\dot{x}_1 = 0$ ($x = \mp X_1$) нельзя удовлетворить.

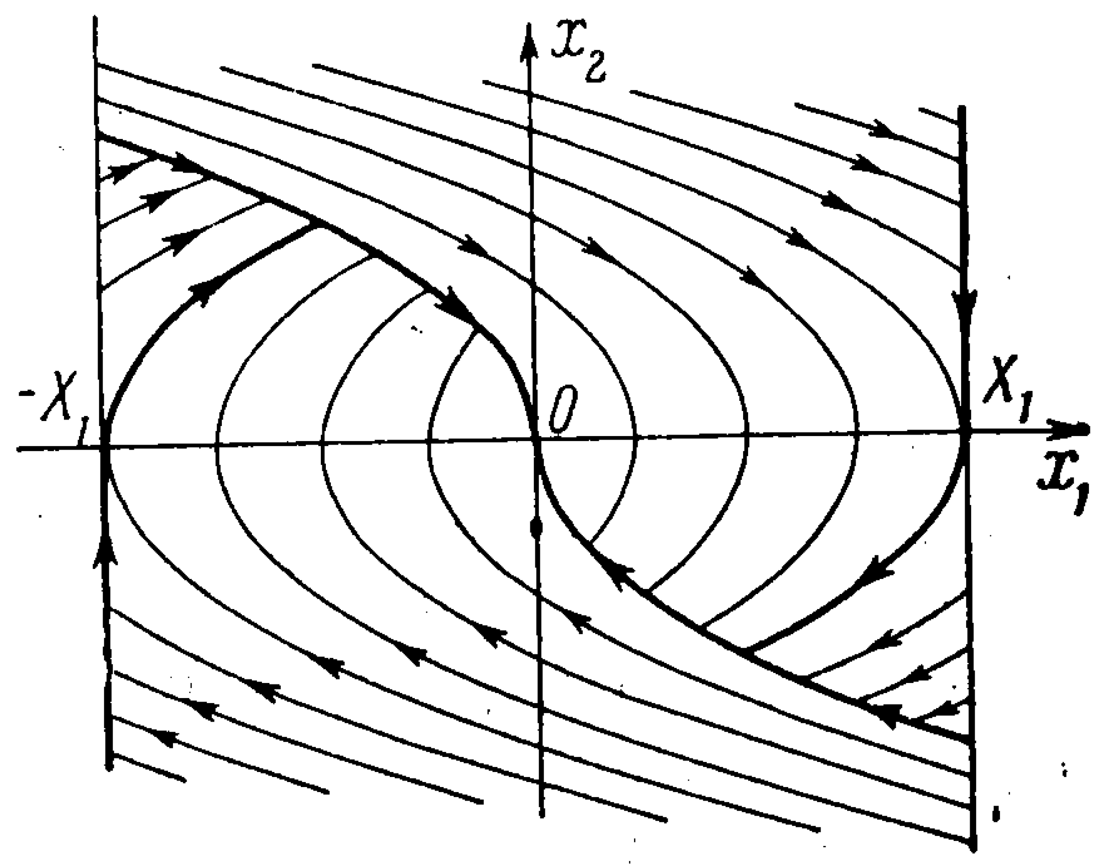

Рис. 3

Движение по границе описывается уравнением $\dot{x}_2 = u$, где $u = \pm 1$; так как для точек границы

$$H^\circ = \lambda_2^\circ u^\circ + \mu^\circ(u^2 + u^2 - 1)$$

и, следовательно,

$$\lambda_2^\circ = 0 \qquad \mu^\circ = -\frac{\lambda_2^\circ}{2u}, \qquad 2\mu^\circ u^\circ = 0$$

или

$$\mu_2^\circ = \mathrm{const}, \quad u = 0$$

Это движение происходит до момента обращения в нуль координаты x_2, что и показано на фиг. 3. В соответствии с условием Эрдманна — Вейерштрасса $\lambda_2^\circ = \lambda_2^-(t_1)$. Следовательно, по условию Вейерштрасса знак управления u не будет меняться при выходе на границу области $|x| \leqslant X_1$.

В обоих рассмотренных случаях «переключение» управления происходит на кривых M_-O и M_+O, которые определяют переключения управлений в системе без ограничений на управления. Следовательно, при наличии ограничений второго типа синтезирующие функции будут находиться из решения задачи с ограничениями только на управления.

Поступила 6 II 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Гамкрелидзе Р. В. Оптимальные процессы управления при ограниченных фазовых координатах. Изв. АН СССР, сер. матем., 1960, т. 24, № 3, стр. 315—366.
2. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.
3. Троицкий В. А. Задача Майера — Больца вариационного исчисления и теория оптимальных систем. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 4, стр. 668—679.
4. Троицкий В. А. О вариационных задачах оптимизации процессов управления. ПММ, 1962, т. XXIV, вып. I, стр. 29—38.
5. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. Ч. I, Автоматика и телемеханика, 1960, т. XXI, № 4, стр. 436—441. Ч. 2, Автоматика и телемеханика, 1960, т. XXI, № 5, стр. 661—668. Ч. 3, Автоматика и телемеханика, 1960, т. XXI, № 6, стр. 661—665.
6. Miele A. General Variational Theory of the flight Paths of Rocket Powered Aircraft, Missiles, and Satellite Carriers. Astronaut. acta, 1958, № 4, 264—288.
7. Leitmann G. On a class of Variational Problems in Rocket flight. Journal of aero/space sciences, 1959, 9, 586—591.
8. Блисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению. ИИЛ, 1950.
9. Троицкий В. А. Вариационные задачи оптимизации процессов управления для уравнений с разрывными правыми частями. ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 2.
10. Розоноэр Л. И. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем. Ч. 1, Автоматика и телемеханика, 1959, № 10, стр. 1320—1334. Ч. 2, Автоматика и телемеханика, 1959, т. XX, № 11, стр. 1441—1453. Ч. 3, Автоматика и телемеханика, 1959, т. XX, № 12, стр. 1561—1578.
11. Фельдбаум А. А. Вычислительные устройства в автоматических системах. Физматгиз, 1959.