Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Я. Н. Ройтенберг
(Москва)

Настоящая статья относится к вопросам теории динамического программирования [1], связанным с реализацией выбранной стратегии управления движением. В ней изучается задача о выборе управляющих сил, при помощи которых обеспечивалась бы реализация задаваемого в фазовом пространстве (или подпространстве) закона движения нелинейной управляемой системы или обеспечивалось бы прохождение нелинейной системой в определенные моменты времени прогнозируемых состояний. Для линейных систем аналогичная задача рассмотрена в предыдущей работе автора [2].

1. Уравнения движения системы непрерывного действия можно представить в следующем виде

$$\sum_{k=1}^{n} f_{jk}(D)\, y_k = x_j(t) + q_j(t) +$$

$$+ \psi_j(y_1, \dot y_1, \ldots, y_1^{(m_1-1)}, \ldots, y_n, \dot y_n, \ldots, y_n^{(m_n-1)}, t) \qquad (j=1,\ldots,n) \qquad (1.1)$$

Здесь y_k — обобщенные координаты, $x_j(t)$ — заданные внешние силы, $q_j(t)$ — добавочные внешние силы, закон изменения которых во времени необходимо выбрать так, чтобы обеспечить осуществление заданного движения. Через $f_{jk}(D)$ обозначены полиномы от D, коэффициенты которых являются заданными функциями времени; $D = d/dt$ — оператор дифференцирования по времени. Старшая степень D в полиномах $_{jk}(D)$ $(j = 1, \ldots, n)$ для данного k обозначена через m_k, т. е. m_k $(k = 1, \ldots, n)$ — порядок старшей производной от y_k по времени, встречающейся в левых частях уравнений (1.1).

Входящие в правые части уравнений (1.1) функции ψ_j $(j = 1,\ldots, n)$ — некоторые нелинейные функции своих аргументов. Будем предполагать, что эти функции непрерывны по всем своим аргументам в некоторой замкнутой области и что в этой области они удовлетворяют условиям Липшица относительно аргументов

$$y_1, \dot y_1, \ldots, y_1^{(m_1-1)}, \ldots, y_n, \qquad \dot y_n, \ldots, y_n^{(m_n-1)}$$

Заметим, что уравнения (1.1) относятся также и к системам, у которых предусмотрено наличие обычно применяемых сил, являющихся функциями от рассогласования. Необходимые для этого внешние силы входят в число заданных внешних сил $x_j(t)$, а силы, которые должны являться функциями от управляемых координат системы и их производных, учтены левыми частями уравнений (1.1), а также нелинейными функциями ψ_j.

Систему уравнений (1.1) можно представить в таком виде:

$$b_{j1}(t)\,y_1^{(m_1)}+b_{j2}(t)\,y_2^{(m_2)}+\ldots+b_{jn}(t)\,y_n^{(m_n)}=$$
$$=S_j(y_1,\dot y_1,\ldots,y_1^{(m_1-1)},\ldots,y_n,\dot y_n,\ldots,y_n^{(m_n-1)})+x_j(t)+q_j(t)+$$
$$+\psi_j(y_1,\dot y_1,\ldots,y_1^{(m_1-1)},\ldots,y_n,\dot y_n,\ldots,y_n^{(m_n-1)},t)\qquad (j=1,\ldots,n)\quad (1.2)$$

где функции S_j являются линейными функциями своих аргументов.

Предполагая, что определитель

$$\Delta^*=|b_{jk}(t)|\qquad (1.3)$$

тождественно не равен нулю, из уравнений (1.2) получим

$$y_j^{(m_j)}=\Phi_j(y_1,\dot y_1,\ldots,y_1^{(m_1-1)},\ldots,y_n,\dot y_n,\ldots,y_n^{(m_n-1)})+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{B_{kj}(t)}{\Delta^*(t)}\,[x_k(t)+q_k(t)+$$
$$+\psi_k(y_1,\dot y_1,\ldots,y_1^{(m_1-1)},\ldots,y_n,\dot y_n,\ldots,y_n^{(m_n-1)},t)]\qquad (j=1,\ldots,n)\quad (1.4)$$

Здесь Φ_j — линейные функции своих аргументов, а B_{ij} — алгебраические дополнения элементов b_{ij} в определителе (1.3).

Введем теперь новые переменные z_i при помощи соотношений

$$z_1=y_1,\ \ z_2=\dot y_1,\ \ldots,\ z_{m_1}=y_1^{(m_1-1)},\ \ldots,\ z_r=y_n^{(m_n-1)}\qquad (1.5)$$

где

$$r=m_1+m_2+\ldots+m_n\qquad (1.6)$$

Входящие в правые части уравнений (1.4) линейные комбинации внешних сил $x_k(t)$, $q_k(t)$ и линейные комбинации функций ψ_k обозначим так:

$$X_{\sigma_j}(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{B_{kj}(t)}{\Delta^*(t)}\,x_k(t),\qquad Q_{\sigma_j}(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{B_{kj}(t)}{\Delta^*(t)}\,q_k(t)$$
$$\Psi_{\sigma_j}(z_1,\ldots,z_r,t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{B_{kj}(t)}{\Delta^*(t)}\,\psi_k(z_1,\ldots,z_r,t)\qquad (\sigma_j=\sigma_1,\ldots,\sigma_n)\quad (1.7)$$

где

$$\sigma_1=m_1,\qquad \sigma_2=m_1+m_2,\ \ldots,\ \sigma_n=r\qquad (1.8)$$

Уравнения (1.4) теперь можно переписать так:

$$\begin{aligned}&\dot z_1-z_2=0\\&\cdots\cdots\\&\dot z_{m_1}-\Phi_1(z_1,\ldots,z_r)=X_{\sigma_1}(t)+Q_{\sigma_1}(t)+\Psi_{\sigma_1}(z_1,\ldots,z_r,t)\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\dot z_r-\Phi_n(z_1,\ldots,z_r)=X_{\sigma_n}(t)+Q_{\sigma_n}(t)+\Psi_{\sigma_n}(z_1,\ldots,z_r,t)\end{aligned}\qquad (1.9)$$

В силу линейности функций $\Phi_j(z_1,\ldots,z_r)$ уравнения (1.9) можно представить в виде

$$\dot z_j+\sum_{k=1}^{r}a_{jk}(t)\,z_k=X_j(t)+Q_j(t)+\Psi_j(z_1,\ldots,z_r,t)\qquad (j=1,\ldots,r)\quad (1.10)$$

В уравнениях (1.10) функции $X_\mu(t)$, $Q_\mu(t)$, $\Psi_\mu(z_1,\ldots,z_r,t)$, у которых $\mu\neq\sigma_l$ $(l=1,\ldots,n)$, тождественно равны нулю.

Система скалярных дифференциальных уравнений (1.10) может быть заменена матричным дифференциальным уравнением

$$\dot{z} + a(t)z = X(t) + Q(t) + \Psi(z_1, \ldots, z_r, t) \tag{1.11}$$

где z, $a(t)$, $X(t)$, $Q(t)$ и $\Psi(z_1, \ldots, z_r, t)$ — следующие матрицы:

$$\begin{gathered} z = \|z_j\|, \quad a(t) = \|a_{jk}(t)\|, \quad X(t) = \|X_j(t)\|, \quad Q(t) = \|Q_j(t)\| \\ \Psi(z_1, \ldots, z_r, t) = \|\Psi_j(z_1, \ldots, z_r, t)\| \end{gathered} \tag{1.12}$$

Через $z(t_0) = \|z_j(t_0)\|$ обозначим матрицу значений искомых функций $z_j(t)$ в начальный момент времени $t = t_0$.

Обозначая через $\theta(t)$ фундаментальную матрицу для матричного дифференциального уравнения

$$\dot{z} + a(t)z = 0 \tag{1.13}$$

можно перейти от нелинейного матричного дифференциального уравнения (1.11) к нелинейному матричному интегральному уравнению

$$\begin{gathered} z(t) = N(t, t_0)z(t_0) + \int_{t_0}^{t} N(t, \tau)[X(\tau) + Q(\tau)]\,d\tau + \\ + \int_{t_0}^{t} N(t, \tau)\Psi(z_1(\tau), \ldots, z_r(\tau), \tau)\,d\tau \end{gathered} \tag{1.14}$$

где

$$N(t, \tau) = \theta(t)\theta^{-1}(\tau) \tag{1.15}$$

есть функция веса для матричного дифференциального уравнения (1.13). Через $\theta^{-1}(t)$ в выражении (1.15) обозначена обратная матрица.

Так как функции $X_\mu(t)$, $Q_\mu(t)$, $\Psi_\mu(z_1, \ldots, z_r, t)$, у которых $\mu \neq \sigma_l$ $(l = 1, \ldots, n)$, тождественно равны нулю, то система скалярных интегральных уравнений, эквивалентных матричному уравнению (1.14), будет иметь следующий вид

$$\begin{gathered} z_j(t) = \sum_{k=1}^{r} N_{jk}(t, t_0)z_k(t_0) + \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} N_{j\sigma_i}(t, \tau)[X_{\sigma_i}(\tau) + Q_{\sigma_i}(\tau)]\,d\tau + \\ + \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} N_{j\sigma_i}(t, \tau)\Psi_{\sigma_i}(z_1(\tau), \ldots, z_r(\tau), \tau)\,d\tau \qquad (j = 1, \ldots, r) \end{gathered} \tag{1.16}$$

Подставляя в (1.16) выражения (1.7), которыми определены $X_{\sigma_i}(t)$, $Q_{\sigma_i}(t)$ и $\Psi_{\sigma_i}(z_1, \ldots, z_r, t)$, получим

$$\begin{gathered} z_j(t) = \sum_{k=1}^{r} N_{jk}(t, t_0)z_k(t_0) + \int_{t_0}^{t} \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} N_{j\sigma_i}(t, \tau)\frac{B_{li}(\tau)}{\Delta^*(\tau)}[x_l(\tau) + q_l(\tau) + \\ + \psi_l(z_1(\tau), \ldots, z_r(\tau), \tau)]\,d\tau \qquad (j = 1, \ldots, r) \end{gathered} \tag{1.17}$$

Обозначая

$$W_{jl}(t, \tau) = \sum_{i=1}^{n} N_{j\sigma_i}(t, \tau)\frac{B_{li}(\tau)}{\Delta^*(\tau)} \qquad \begin{pmatrix} j = 1, \ldots, r \\ l = 1, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

$$g_j(t) = \sum_{k=1}^{r} N_{jk}(t, t_0)z_k(t_0) + \sum_{l=1}^{n} \int_{t_0}^{t} W_{jl}(t, \tau)x_l(\tau)\,d\tau \qquad (j = 1, \ldots, r) \tag{1.19}$$

представим систему интегральных уравнений (1.17) в таком виде:

$$z_j(t) = g_j(t) + \sum_{l=1}^{n} \int_{t_0}^{t} W_{jl}(t, \tau)\, q_l(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} \int_{t_0}^{t} W_{jl}(t, \tau)\, \psi_l(z_1(\tau), \ldots, z_r(\tau), \tau)\, d\tau \qquad (j = 1, \ldots, r) \qquad (1.20)$$

Потребуем теперь, чтобы некоторые фазовые координаты системы z_{p_ν} $(\nu = 1, \ldots, m)$ приняли к моменту времени t_1 наперед заданные значения r_{p_ν}. Если число m фазовых координат, значения которых в момент времени t_1 заранее предписаны, меньше числа n возможных добавочных сил, то полагаем

$$q_{\alpha_1}(t) \equiv q_{\alpha_2}(t) \equiv \ldots \equiv q_{\alpha_{n-m}}(t) \equiv 0 \qquad (1.21)$$

Добавочные силы $q_{s_1}(t), q_{s_2}(t), \ldots, q_{s_m}(t)$, которые необходимо определить так, что бы удовлетворялись условия

$$z_{p_\nu}(t_1) = r_{p_\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, m) \qquad (1.22)$$

примем ступенчатыми, сохраняющими неизменными свои значения на интервале (t_0, t_1)

$$q_{s_i}(t) \equiv q_{s_i}(t_0) \qquad (t_0 \leqslant t < t_1) \qquad (i = 1, \ldots, m) \qquad (1.23)$$

Такой выбор функций $q_{s_i}(t)$ $(i=1, \ldots, m)$, вообще говоря, возможен потому, что предписаны лишь значения, которые должны принять фазовые координаты z_{p_ν} $(\nu = 1, \ldots, m)$ в момент времени $t = t_1$, а на закон изменения функций $z_{p_\nu}(t)$ $(\nu = 1, \ldots, m)$ на интервале (t_0, t_1) ограничений не наложено. Случаи, когда какое-либо уравнение или группа уравнений в системе (1.1) оказываются независимыми от остальных уравнений и т. п., из рассмотрения исключаются.

Искомые функции $z_j(t)$ $(j = 1, \ldots, r)$ на интервале (t_0, t_1) и неизвестные величины $q_{s_i}(t_0)$ $(i = 1, \ldots, m)$ будут в соответствии с (1.20), (1.22) и (1.23) определяться следующей системой уравнений

$$z_j(t) = g_j(t) + \sum_{i=1}^{m} F_{js_i}(t)\, q_{s_i}(t_0) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} \int_{t_0}^{t} W_{jl}(t, \tau)\, \psi_l(z_1(\tau), \ldots, z_r(\tau), \tau)\, d\tau \qquad \begin{pmatrix} t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \\ j = 1, \ldots, r \end{pmatrix}$$

$$r_{p_\nu} - g_{p_\nu}(t_1) = \sum_{i=1}^{m} F_{p_\nu s_i}(t_1)\, q_{s_i}(t_0) + \qquad (1.24)$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} W_{p_\nu l}(t_1, \tau)\, \psi_l(z_1(\tau), \ldots, z_r(\tau), \tau)\, d\tau \qquad (\nu = 1, \ldots, m)$$

Здесь через $F_{js_i}(t)$ обозначены известные нам функции

$$F_{js_i}(t) = \int_{t_0}^{t} W_{js_i}(t, \tau)\, d\tau \qquad \begin{pmatrix} j = 1, \ldots, r \\ i = 1, \ldots, m \end{pmatrix} \qquad (1.25)$$

Уравнения (1.24) можно преобразовать следующим образом. Из второй группы уравнений (1.24) следует, что

$$q_{s_i}(t_0)=\frac{1}{\Delta(t_1)}K_{s_i}(t_1)- \tag{1.26}$$

$$-\frac{1}{\Delta(t_1)}\sum_{\mu=1}^{m}A_{p_\mu s_i}(t_1)\int_{t_0}^{t_1}\sum_{l=1}^{n}W_{p_\mu l}(t_1,\tau)\,\psi_l(z_1(\tau),\ldots,z_r(\tau),\tau)\,d\tau$$

$$(i=1,\ldots,m)$$

где

$$\Delta(t_1)=\begin{vmatrix} F_{p_1s_1}(t_1) & F_{p_1s_2}(t_1)\ldots & F_{p_1s_m}(t_1)\\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots\\ F_{p_ms_1}(t_1) & F_{p_ms_2}(t_1)\ldots & F_{p_ms_m}(t_1)\end{vmatrix} \tag{1.27}$$

$$K_{s_i}(t_1)=\sum_{\mu=1}^{m}A_{p_\mu s_i}(t_1)\,[r_{p_\mu}-g_{p_\mu}(t_1)] \qquad (i=1,\ldots,m) \tag{1.28}$$

а $A_{p_\mu s_i}(t_1)$ $(\mu,\ i=1,\ldots,m)$ — алгебраические дополнения элементов $F_{p_\mu s_i}$ в определителе (1.27). Обозначая

$$k_{s_i}(t_1)=\frac{1}{\Delta(t_1)}K_{s_i}(t_1) \qquad (i=1,\ldots,m) \tag{1.29}$$

$$U_{s_il}(t_1,\tau)=\frac{1}{\Delta(t_1)}\sum_{\mu=1}^{m}A_{p_\mu s_i}(t_1)\,W_{p_\mu l}(t_1,\tau) \qquad \begin{pmatrix} i=1,\ldots,m\\ l=1,\ldots,n\end{pmatrix} \tag{1.30}$$

приведем выражения (1.26) к виду

$$q_{s_i}(t_0)=k_{s_i}(t_1)-\sum_{l=1}^{n}\int_{t_0}^{t_1}U_{s_il}(t_1,\tau)\,\psi_l(z_1(\tau),\ldots,z_r(\tau),\tau)\,d\tau \qquad (i=1,\ldots,m) \tag{1.31}$$

Подставляя найденные для $q_{s_i}(t_0)$ выражения (1.31) в первую группу уравнений (1.24), придем к следующей системе нелинейных интегральных уравнений:

$$z_j(t)=G_j(t)-\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}F_{js_i}(t)\int_{t_0}^{t_1}U_{s_il}(t_1,\tau)\,\psi_l(z_1(\tau),\ldots,z_r(\tau),\tau)\,d\tau+$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\int_{t_0}^{t}W_{jl}(t,\tau)\,\psi_l(z_1(\tau),\ldots,z_r(\tau),\tau)\,d\tau \qquad \begin{pmatrix} t_0\leqslant t\leqslant t_1\\ j=1,\ldots,r\end{pmatrix} \tag{1.32}$$

где

$$G_j(t)=g_j(t)+\sum_{i=1}^{m}F_{js_i}(t)\,k_{s_i}(t_1) \qquad (j=1,\ldots,r) \tag{1.33}$$

Заметим, что число уравнений, образующих систему (1.32), уменьшится, если нелинейные функции $\psi_l(z_1,\ldots,z_r,t)$ $(l=1,\ldots,n)$ не будут зависеть от некоторых фазовых координат системы z_ρ. Так, например, если под знак нелинейных функций ψ_l $(l=1,\ldots,n)$ входит лишь одна фазовая координата z_k

$$\psi_l=\psi_l(z_k(t),t) \qquad (l=1,\ldots,n) \tag{1.34}$$

то в соответствии с (1.32) потребуется решить следующее нелинейное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $z_k(t)$:

$$z_k(t) = G_k(t) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} F_{ks_i}(t)\int_{t_0}^{t_1} U_{s_i l}(t_1, \tau)\,\psi_l(z_k(\tau), \tau)\,d\tau + \sum_{l=1}^{n}\int_{t_0}^{t} W_{kl}(t, \tau)\,\psi_l(z_k(\tau), \tau)\,d\tau \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1) \tag{1.35}$$

Остальные фазовые координаты z_ρ $(\rho = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, r)$ будут выражены в квадратурах

$$z_\rho(t) = G_\rho(t) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} F_{\rho s_i}(t)\int_{t_0}^{t_1} U_{s_i l}(t_1, \tau)\,\psi_l(z_k(\tau), \tau)\,d\tau + \sum_{l=1}^{n}\int_{t_0}^{t} W_{\rho l}(t, \tau)\,\psi_l(z_k(\tau), \tau)\,d\tau \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1) \tag{1.36}$$

При этом, интересующие нас добавочные внешние силы

$$q_{s_i}(t) \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

согласно (1.23) и (1.31) будут (1.37)

$$q_{s_i}(t) \equiv q_{s_i}(t_0) = k_{s_i}(t_1) - \sum_{l=1}^{n}\int_{t_0}^{t_1} U_{s_i l}(t_1, \tau)\,\psi_l(z_k(\tau), \tau)\,d\tau \qquad \begin{pmatrix} t_0 \leqslant t < t_1 \\ i = 1, \ldots, m \end{pmatrix}$$

2. Рассмотрим теперь случай, когда число добавочных внешних сил, реализация которых возможна в управляемой системе, меньше числа фазовых координат, которые должны принять к некоторому наперед заданному моменту времени t_1 предписанные значения.

Пусть для определенности мы располагаем лишь одной добавочной внешней силой $q_s(t)$, которой надо распорядиться так, чтобы удовлетворялись условия (1.22)

$$z_{p_\nu}(t_1) = r_{p_\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, m)$$

Для решения задачи разобьем интервал времени (t_0, t_1) на m равных или неравных подынтервалов (t_0, T_1), (T_1, T_2), $\ldots$, (T_{m-1}, t_1).

Примем функцию $q_s(t)$ ступенчатой и обозначим через

$$q_s(T_0),\ q_s(T_1),\ \ldots,\ q_s(T_{m-1})$$

ее значения на каждом из этих подынтервалов соответственно.

Уравнения (1.20), определяющие закон движения системы, примут вид

$$z_j(t) = g_j(t) + \sum_{i=0}^{m-1} q_s(T_i)\,1(t - T_i)\int_{T_i}^{\sigma_i} W_{js}(t, \tau)\,d\tau + \sum_{l=1}^{n}\int_{t_0}^{t} W_{jl}(t, \tau)\,\psi_l(z_1(\tau), \ldots, z_r(\tau), \tau)\,d\tau \qquad \begin{pmatrix} t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \\ j = 1, \ldots, r \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

где

$$T_0 = t_0, \qquad T_m = t_1 \tag{2.2}$$

$$\sigma_i = t + (T_{i+1} - t)\,1(t - T_{i+1}) \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1) \tag{2.3}$$

$$1(\xi) = \begin{cases} 0 & (\xi < 0) \\ 1 & (\xi \geqslant 0) \end{cases} \tag{2.4}$$

Условия (1.22) приводятся теперь к виду

$$r_{p_\nu} - g_{p_\nu}(t_1) = \sum_{i=0}^{m-1} V_{p_\nu s}(T_i)\, q_s(T_i) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} W_{p_\nu l}(t_1, \tau)\, \psi_l(z_1(\tau), \ldots, z_r(\tau), \tau)\, d\tau \qquad (\nu = 1, \ldots, m) \tag{2.5}$$

где

$$V_{p_\nu s}(T_i) = \int_{T_i}^{T_{i+1}} W_{p_\nu s}(t_1, \tau)\, d\tau \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, \ldots, m \\ i = 0, 1, \ldots, m-1 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Из уравнений (2.5) следует, что (2.7)

$$q_s(T_i) = \varkappa_i(t_1) - \sum_{l=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} \Xi_{il}(t_1, \tau)\, \psi_l(z_1(\tau), \ldots, z_r(\tau), \tau)\, d\tau \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1)$$

где

$$\varkappa_i(t_1) = \frac{1}{\Lambda} \sum_{\mu=1}^{m} C_{p_\mu i}[r_{p_\mu} - g_{p_\mu}(t_1)] \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1) \tag{2.8}$$

$$\Xi_{il}(t_1, \tau) = \frac{1}{\Lambda} \sum_{\mu=1}^{m} C_{p_\mu i} W_{p_\mu l}(t_1, \tau) \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots, m-1 \\ l = 1, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

$$\Lambda = \begin{vmatrix} V_{p_1 s}(T_0) & V_{p_1 s}(T_1) & \ldots & V_{p_1 s}(T_{m-1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ V_{p_m s}(T_0) & V_{p_m s}(T_1) & \ldots & V_{p_m s}(T_{m-1}) \end{vmatrix}, \tag{2.10}$$

а через $C_{p_\mu i}$ ($\mu = 1, \ldots, m$; $i = 0, 1, \ldots, m-1$) обозначены алгебраические дополнения элементов $V_{p_\mu s}(T_i)$ в определителе (2.10).

Подставляя найденные для $q_s(T_i)$ выражения (2.7) в уравнения (2.1), получим следующую систему нелинейных интегральных уравнений, определяющую закон изменения фазовых координат $z_j(t)$:

$$z_j(t) = \Gamma_j(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{l=1}^{n} \chi_{ji}(t) \int_{t_0}^{t_1} \Xi_{il}(t_1, \tau)\, \psi_l(z_1(\tau), \ldots, z_r(\tau), \tau)\, d\tau +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} \int_{t_0}^{t} W_{jl}(t, \tau)\, \psi_l(z_1(\tau), \ldots, z_r(\tau), \tau)\, d\tau \qquad \begin{pmatrix} t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \\ j = 1, \ldots, r \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

где

$$\Gamma_j(t) = g_j(t) + \sum_{i=0}^{m-1} \varkappa_i(t_1)\, \chi_{ji}(t) \qquad (j = 1, \ldots, r) \tag{2.12}$$

$$\chi_{ji}(t) = 1(t - T_i) \int_{T_i}^{\sigma_i} W_{js}(t, \tau)\, d\tau \qquad \begin{pmatrix} j = 1, \ldots, r \\ i = 0, 1, \ldots, m-1 \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

В случае, когда нелинейные функции ψ_l ($l = 1, \ldots, n$) не зависят от некоторых фазовых координат системы z_ρ, число нелинейных интегральных уравнений, образующих систему (2.11), уменьшается. Если, например, функции ψ_l имеют вид (1.34)

$$\psi_l = \psi_l(z_k(t), t) \qquad (l = 1, \ldots, n)$$

то в соответствии с (2.11) будем иметь следующее нелинейное интегральное уравнение осносительно неизвестной функции $z_k(t)$:

$$z_k(t) = \Gamma_k(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{l=1}^{n} \chi_{ki}(t) \int_{t_0}^{t_1} \Xi_{il}(t_1, \tau)\, \psi_l(z_k(\tau), \tau)\, d\tau +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} \int_{t_0}^{t} W_{kl}(t, \tau)\, \psi_l(z_k(\tau), \tau)\, d\tau \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1) \tag{2.14}$$

Остальные фазовые координаты будут выражены в квадратурах

$$z_\rho(t) = \Gamma_\rho(t) - \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{l=1}^{n} \chi_{\rho i}(t) \int_{t_0}^{t_1} \Xi_{il}(t_1, \tau)\, \psi_l(z_k(\tau), \tau)\, d\tau +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} \int_{t_0}^{t} W_{\rho l}(t, \tau)\, \psi_l(z_k(\tau), \tau)\, d\tau \qquad \left(\begin{matrix} t_0 \leqslant t \leqslant t_1 \\ \rho = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots r \end{matrix}\right) \tag{2.15}$$

Значения добавочной внешней силы $q_s(t)$, являющейся ступенчатой функцией, на интервалах времени (T_i, T_{i+1}) $(i = 0, 1, \ldots, m-1)$ согласно (2.7) будут

$$q_s(T_i) = \varkappa_i(t_1) - \sum_{l=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} \Xi_{il}(t_1, \tau)\, \psi_l(z_k(\tau), \tau)\, d\tau \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1) \tag{2.16}$$

Описываемый метод позволяет реализовать задаваемый в m-мерном фазовом подпространстве $(z_{p_1}, \ldots, z_{p_m})$ закон движения, причем, если число добавочных сил $q_{s_i}(t)$ меньше чем m, то условия типа (1.22) будут выполняться в дискретных точках $t_1, t_2, \ldots$

Для решения интегральных уравнений (1.32) или (2.11), на основе которых, согласно (1.31) и (2.7), определяются добавочные внешние силы $q_{s_i}(t)$, необходимо применить численные методы [3,4,5].

3. В частном случае, когда предписано значение лишь одной фазовой координаты z_p, а в уравнения движения входит одна нелинейная функция

$$\psi_\lambda = \psi_\lambda(z_k(t), t) \tag{3.1}$$

добавочная внешняя сила $q_s(t)$ должна быть выбрана так, чтобы выполнялось условие

$$z_p(t_1) = r_p \tag{3.2}$$

В рассматриваемом здесь случае уравнения (1.24) принимают вид

$$\begin{gathered} z_j(t) = g_j(t) + F_{js}(t)\, q_s(t_0) + \int_{t_0}^{t} W_{j\lambda}(t, \tau)\, \psi_\lambda(z_k(\tau), \tau)\, d\tau \qquad (j = 1, \ldots, r) \\ r_p - g_p(t_1) = F_{ps}(t_1)\, q_s(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} W_{p\lambda}(t_1, \tau)\, \psi_\lambda(z_k(\tau), \tau)\, d\tau \end{gathered} \tag{3.3}$$

где согласно (1.25)

$$F_{js}(t) = \int_{t_0}^{t} W_{js}(t, \tau)\, d\tau \qquad (j = 1, \ldots, r) \tag{3.4}$$

Из последнего уравнения (3.3) следует, что

$$q_s(t_0) = \frac{1}{F_{ps}(t_1)} \left[r_p - g_p(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} W_{p\lambda}(t_1, \tau)\, \psi_\lambda(z_k(\tau), \tau)\, d\tau \right] \tag{3.5}$$

При этом первая группа уравнений (3.3) принимает вид

$$z_j(t) = g_j(t) + \frac{F_{js}(t)}{F_{ps}(t_1)}\left[r_p - g_p(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} W_{p\lambda}(t_1, \tau)\psi_\lambda(z_k(\tau), \tau)d\tau\right] + \\ + \int_{t_0}^{t} W_{j\lambda}(t, \tau)\psi_\lambda(z_k(\tau), \tau)\,d\tau \qquad (j = 1, \ldots r) \tag{3.6}$$

В соответствии с (3.6) будем иметь следующее нелинейное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $z_k(t)$:

$$z_k(t) = g_k(t) + \frac{F_{ks}(t)}{F_{ps}(t_1)}\left[r_p - g_p(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} W_{p\lambda}(t_1, \tau)\psi_\lambda(z_k(\tau), \tau)\,d\tau\right] + \\ + \int_{t_0}^{t} W_{k\lambda}(t, \tau)\psi_\lambda(z_k(\tau), \tau)\,d\tau \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1) \tag{3.7}$$

Остальные фазовые координаты $z_\rho\,(\rho = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, r)$ будут выражены в квадратурах

$$z_\rho(t) = g_\rho(t) + \frac{F_{\rho s}(t)}{F_{ps}(t_1)}\left[r_p - g_p(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} W_{p\lambda}(t_1, \tau)\psi_\lambda(z_k(\tau), \tau)\,d\tau\right] + \\ + \int_{t_0}^{t} W_{\rho\lambda}(t, \tau)\psi_\lambda(z_k(\tau), \tau)\,d\tau \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1) \tag{3.8}$$

Добавочная внешняя сила $q_s(t)$ согласно (1.23) и (3.5) будет

$$q_s(t) \equiv q_s(t_0) = k_s(t_1) - \frac{1}{F_{ps}(t_1)}\int_{t_0}^{t_1} W_{p\lambda}(t_1, \tau)\psi_\lambda(z_k(\tau), \tau)\,d\tau \qquad (t_0 \leqslant t < t_1) \tag{3.9}$$

где

$$k_s(t_1) = \frac{1}{F_{ps}(t_1)}[r_p - g_p(t_1)] \tag{3.10}$$

4. Рассмотрим теперь приложение изложенных методов к задаче об ускоренном приведении в меридиан гироскопического компаса, при наличии у этого прибора нелинейной восстанавливающей силы.

Уравнения прецессионного движения гирокомпаса можно представить в следующем виде

$$\begin{gathered} -H\dot{\alpha} + lP\beta + lP(1-\rho)\vartheta = HU\sin\varphi + Q(t) \\ H\dot{\beta} + HU\cos\varphi\cdot\alpha + M\alpha^3 + 0, \quad \dot{\vartheta} + F\vartheta + F\beta = 0 \end{gathered} \tag{4.1}$$

Здесь α — угол поворота гирокомпаса в азимуте, β — угол подъема северного диаметра гиросферы над горизонтальной плоскостью, ϑ — угол наклона зеркала жидкости в гидравлическом успокоителе над плоскостью экватора гиросферы. Через H обозначен результирующий кинетический момент гироскопов, установленных в гиросфере, lP — статический момент гиросферы, U — угловая скорость суточного вращения земного шара, φ — широта места наблюдения.

В уравнения (4.1) входит нелинейная восстанавливающая обобщенная сила $-M\alpha^3$, представляющая собой накладываемый вокруг вертикального диаметра гиросферы момент, предназначенный для более быстрого приведения гирокомпаса в меридиан; эта восстанавливающая сила эффективна при больших отклонениях гирокомпаса, так как приводит к снижению периода собственных колебаний гирокомпаса при больших значениях α.

Через $Q(t)$ обозначена добавочная обобщенная внешняя сила, представляющая собой момент относительно восточного диаметра гиросферы, накладываемый для приведения гирокомпаса в меридиан к заданному моменту времени. Закон изменения во времени этой внешней силы подлежит определению.

Обозначая

$$z_1 = \alpha, \qquad z_2 = \beta - \frac{HU \sin\varphi}{\rho l P}, \qquad z_3 = \vartheta + \frac{HU \sin\varphi}{\rho l P}, \qquad k^2 = \frac{lPU \cos\varphi}{H}$$

$$q_1(t) = -\frac{Q(t)}{H}, \qquad \psi_2(z_1) = -\zeta z_1^3, \qquad \zeta = \frac{M}{H} \tag{4.2}$$

можно привести уравнения (4.1) к следующему виду

$$\dot{z}_1 - \frac{k^2}{U\cos\varphi} z_2 - \frac{k^2(1-\rho)}{U\cos\varphi} z_3 = q_1(t)$$

$$\dot{z}_2 + U\cos\varphi\, z_1 = \psi_2(z_1), \qquad \dot{z}_3 + Fz_2 + Fz_3 = 0 \tag{4.3}$$

Систему скалярных дифференциальных уравнений (4.3) можно заменить матричным уравнением

$$\dot{z} + az = q(t) + \psi(z_1, z_2, z_3) \tag{4.4}$$

где

$$z = \begin{Vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Vmatrix}, \qquad a = \begin{Vmatrix} 0 & -\frac{k^2}{U\cos\varphi} & -\frac{k^2(1-\rho)}{U\cos\varphi} \\ U\cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & F & F \end{Vmatrix}$$

$$q(t) = \begin{Vmatrix} q_1(t) \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \qquad \psi(z_1, z_2, z_3) = \begin{Vmatrix} 0 \\ \psi_2(z_1) \\ 0 \end{Vmatrix} \tag{4.5}$$

Через $N(t) = \|N_{jk}(t)\|$ обозначим функцию веса для матричного дифференциального уравнения

$$\dot{z} + az = 0 \tag{4.6}$$

Так как элементы матрицы a являются постоянными величинами, то функция $N(t)$ будет определяться операционным соотношением

$$\frac{p\Phi(p)}{\Delta(p)} \doteq N(t) \tag{4.7}$$

Здесь $\Phi(p)$ — присоединенная матрица для матрицы $e(p)$, а через $\Delta(p)$ обозначен определитель матрицы $e(p)$, причем матрица $e(p)$ имеет следующий вид

$$e(p) = Ep + a \tag{4.8}$$

где E — единичная матрица.

Матричному уравнению (4.4) вместе с начальными условиями эквивалентно матричное интегральное уравнение (4.9)

$$z(t) = N(t)\, z(0) + \int_0^t N(t-\tau)\, q(\tau)\, d\tau + \int_0^t N(t-\tau)\, \psi(z_1(\tau)),\ z_2(\tau),\quad z_3(\tau))\, d\tau$$

Матричное интегральное уравнение (4.9) можно заменить системой скалярных интегральных уравнений, которая в соответствии с (4.5) будет иметь вид

$$z_j(t) = \sum_{k=1}^{3} N_{jk}(t)\, z_k(0) + \int_0^t N_{j1}(t\,\tau)\ q_1(\tau)\, d\tau + \int_0^t N_{j2}(t-\tau)\, \psi_2(z_1(\tau))\, d\tau$$

$$(j = 1, 2, 3) \tag{4.10}$$

Потребуем теперь, чтобы к моменту времени $t = t_1$ гирокомпас был приведен в меридиан, т. е. чтобы выполнялись условия

$$z_j(t_1) = 0 \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{4.11}$$

В соответствии с (4.10), условия (4.11) принимают вид

$$\int_0^{t_1} N_{j1}(t_1-\tau)\, q_1(\tau)\, d\tau = -\sum_{k=1}^{3} N_{jk}(t_1)\, z_k(0) - \int_0^{t_1} N_{j2}(t_1-\tau)\, \psi_2(z_1(\tau))\, d\tau$$

$$(j = 1, 2, 3) \tag{4.12}$$

Интервал времени $(0, t_1)$ разобьем на три равных подынтервала $(0, T_1)$, (T_1, T_2), (T_2, t_1). Примем функцию $q_1(t)$ ступенчатой и обозначим через $q_1(T_0)$, $q_1(T_1)$, $q_1(T_2)$ ее значения на каждом из этих подынтервалов соответственно. Заметим, что, согласно (2.2), здесь

$$T_0 = 0, \qquad T_3 = t_1 \tag{4.13}$$

Интегральные уравнения (4.10), определяющие закон движения системы, примут теперь вид

$$z_j(t) = g_j(t) + \sum_{i=0}^{2} q_1(T_i)\, 1\,(t - T_i) \int_{T_i}^{\sigma_i} N_{j1}(t-\tau)\, d\tau + \int_0^t N_{j2}(t-\tau)\, \psi_2(z_1(\tau))\, d\tau$$

$$(0 \leqslant t \leqslant t_1;\ j = 1, 2, 3) \tag{4.14}$$

Здесь

$$g_j(t) = \sum_{k=1}^{3} N_{jk}(t)\, z_k(0) \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{4.15}$$

Величины σ_i, согласно (2.3), определяются формулами

$$\sigma_i = t + (T_{i+1} - t)\, 1\,(t - T_{i+1}) \qquad (i = 0, 1, 2) \tag{4.16}$$

а через $1\,(\xi)$, так же как и выше (2.4), обозначена единичная функция.

Условия (4.12) можно теперь привести к следующему виду

$$\sum_{i=0}^{2} V_{j1}(T_i)\, q_1(T_i) = -g_j(t_1) - \int_0^{t_1} N_{j2}(t_1-\tau)\, \psi_2(z_1(\tau))\, d\tau \quad (j = 1, 2, 3) \tag{4.17}$$

где

$$V_{j1}(T_i) = \int_{T_i}^{T_{i+1}} N_{j1}(t_1-\tau)\, d\tau \qquad (j = 1, 2, 3;\ i = 0, 1, 2) \tag{4.18}$$

Из уравнений (4.17) следует, что

$$q_1(T_i) = \varkappa_i(t_1) - \int\limits_0^{t_1} \Xi_{i2}(t_1-\tau)\,\psi_2(z_1(\tau))\,d\tau \qquad (i=0,1,2) \tag{4.19}$$

где

$$\varkappa_i(t_1) = -\frac{1}{\Lambda}\sum_{\mu=1}^{3} C_{\mu i}g_\mu(t_1) \qquad (i=0,1,2) \tag{4.20}$$

$$\Xi_{i2}(t_1-\tau) = \frac{1}{\Lambda}\sum_{\mu=1}^{3} C_{\mu i}N_{\mu 2}(t_1-\tau) \qquad (i=0,1,2) \tag{4.21}$$

$$\Lambda = \begin{vmatrix} V_{11}(T_0) & V_{11}(T_1) & V_{11}(T_2) \\ V_{21}(T_0) & V_{21}(T_1) & V_{21}(T_2) \\ V_{31}(T_0) & V_{31}(T_1) & V_{31}(T_2) \end{vmatrix} \tag{4.22}$$

а через $C_{\mu i}(\mu = 1, 2, 3;\ i = 0, 1, 2)$ обозначены алгебраические дополнения элементов $V_{\mu 1}(T_i)$ в определителе (4.22).

Подставляя в (4.14) найденные для $q_1(T_i)\,(i=0,1,2)$ выражения (4.19), получим следующее интегральное уравнение относительно неизвестной функции $z_1(t)$:

$$z_1(t) = \Gamma_1(t) - \sum_{i=0}^{2}\chi_{1i}(t)\int\limits_0^{t_1}\Xi_{i2}(t_1-\tau)\,\psi_2(z_1(\tau))\,d\tau + \\ + \int\limits_0^{t} N_{12}(t-\tau)\,\psi_2(z_1(\tau))\,d\tau \qquad (0 \leqslant t \leqslant t_1) \tag{4.23}$$

Обобщенные координаты $z_2(t)$ и $z_3(t)$ будут выражены в квадратурах

$$z_v(t) = \Gamma_v(t) - \sum_{i=0}^{2}\chi_{vi}(t)\int\limits_0^{t_1}\Xi_{i2}(t_1-\tau)\,\psi_2(z_1(\tau))\,d\tau + \\ + \int\limits_0^{t} N_{v2}(t-\tau)\,\psi_2(z_1(\tau))\,d\tau \qquad (0 \leqslant t \leqslant t_1;\quad v=2,3) \tag{4.24}$$

Здесь

$$\Gamma_j(t) = g_j(t) + \sum_{i=0}^{2}\varkappa_i(t_1)\,\chi_{ji}(t) \qquad (j=1,2,3) \tag{4.25}$$

$$\chi_{ji}(t) = 1\,(t-T_i)\int\limits_{T_i}^{\sigma_i} N_{j1}(t-\tau)\,d\tau \qquad (j=1,2,3;\ i=0,1,2) \tag{4.26}$$

Определив из интегрального уравнения (4.23) закон изменения функции $z_1(t)$ на интервале времени $0 < t < t_1$, найдем из формул (4.19) значения $q_1(T_i)\,(i = 0, 1, 2)$, т. е. получим закон изменения во времени добавочной внешней силы $q_1(t)$, при котором обеспечивается приведение гирокомпаса в меридиан к моменту времени $t = t_1$.

Интегральное уравнение (4.23) было решено на электронной вычислительной машине (автор пользуется случаем принести благодарность В. А. Чепрасову за составление программы вычислений) для следующих значений параметров

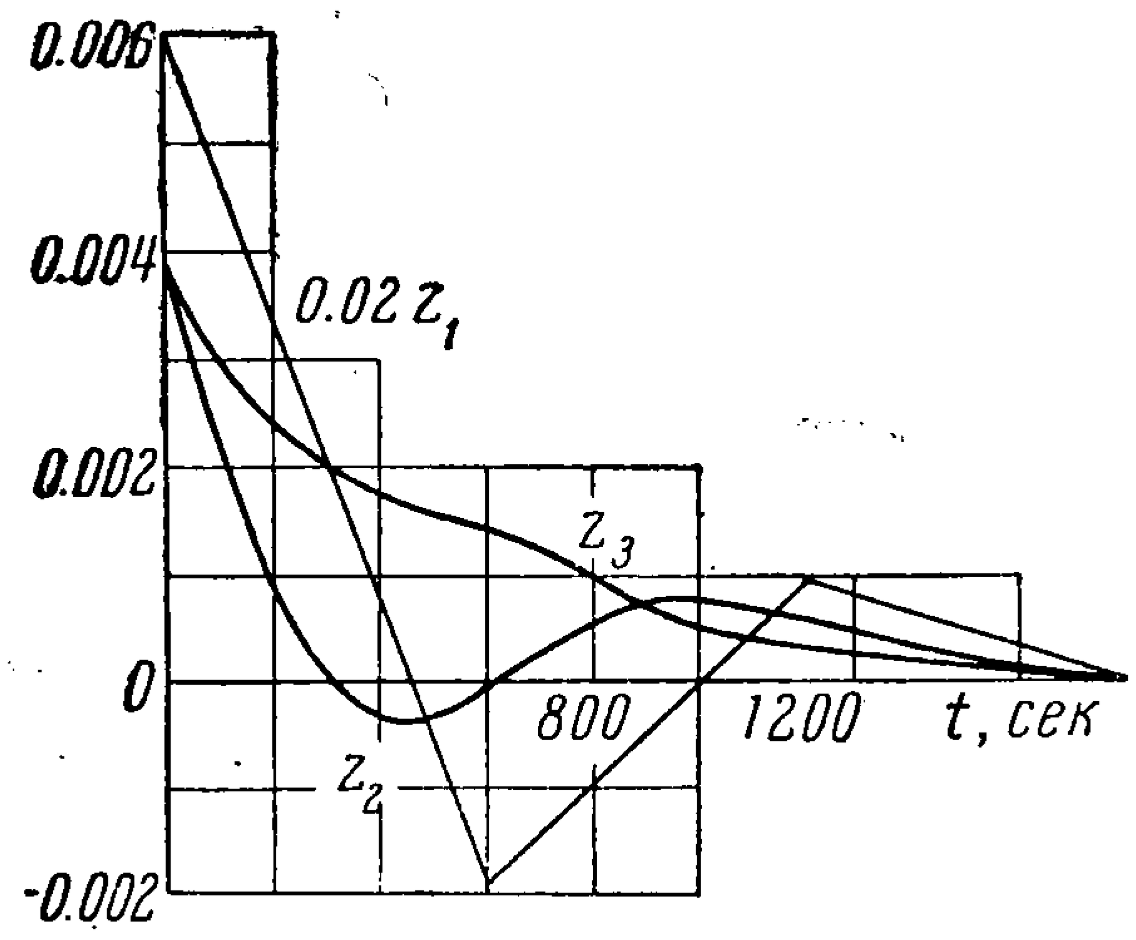
$$k^2 = 1.53921\cdot 10^{-6}\ \textit{сек}^{-2},\quad \rho = 0.38,\quad F = 1.5\cdot 10^{-3}\ \textit{сек}^{-1}$$
$$U\cos\varphi = 4.11368\cdot 10^{-5}\ \textit{сек}^{-1},\quad \zeta = 0.4\cdot 10^{-3}\ \textit{сек}^{-1}$$

t сек.	z_1	$10^3 z_2$	$10^3 z_3$	$t_{сек}$	z_1	$10^3 z_2$	$10^3 z_3$
0	0.30000	4.0000	4.0000	950	—0,01466	0,7333	0.6473
50	0.27385	2.9349	3.4620	1000	—0.00262	0.7511	0,5467
100	0.24531	2.0490	3.0332	1050	0.00917	0.7444	0.4530
150	0.21483	1.3304	2.6933	1100	0.02089	0.7134	0,3675
200	0.18280	0.7628	2.4241	1150	0.03244	0.6581	0.2913
250	0.14956	0.3279	2.2105	1200	0.04378	0.5786	0.2254
300	0.11539	0.0080	2.0394	1250	0.04093	0.4899	0.1706
350	0.08054	—0.2130	1.9001	1300	0.03786	0.4076	0.1259
400	0.04521	—0.3478	1.7837	1350	0.03459	0.3321	0.0902
450	0.00957	—0.4048	1.6824	1400	0.03116	0.2638	0.0622
500	—0.02621	—0.3875	1.5899	1450	0.02758	0.2028	0.0409
550	—0.06200	—0.2949	1.5001	1500	0.02386	0.1496	0.0253
600	—0.09764	—0.1200	1.4072	1550	0.02004	0.1042	0.0144
650	—0.08621	0.0848	1.3065	1600	0.01614	0.0668	0.0072
700	—0.07455	0,2606	1.1994	1650	0.01216	0.0377	0.0030
750	—0.06272	0.4083	1.0883	1700	0.00813	0.0168	0.0009
800	—0.05076	0.5287	0.9756	1750	0.00407	0.0042	0.0001
850	—0.03873	0.6226	0.8633	1800	0.00000	0.0000	0.0000
900	—0.02668	0.6906	0.7533				

Промежуток времени, в течение которого гирокомпас должен быть приведен в меридиан $t_1 = 1800$ *сек* (фигура). Начальные отклонения

$$z_1(0) = 0.3, \quad z_2(0) = 0.004, \quad z_3(0) = 0.004$$

Решение уравнения (4.23) было найдено методом последовательных приближений. В качестве нулевого приближения принято



$$z_1^{(0)}(t) = \Gamma_1(t).$$

Последовательные приближения $z_1^{(n)}(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, в соответствии с (4.23), определялись выражениями

$$z_1^{(n)}(t) = \Gamma_1(t) - \\ -\sum_{i=0}^{2} \chi_{1i}(t) \int_0^{t_1} \Xi_{i2}(t_1 - \tau)\, \psi_2(z_1^{(n-1)}(\tau))\, d\tau + \\ + \int_0^t N_{12}(t-\tau)\, \psi_2(z_1^{(n-1)}(\tau))\, d\tau$$

$$(0 \leqslant t \leqslant t_1) \tag{4.27}$$

Для приведенных выше данных значения $q_1(T_0)$, $q_1(T_1)$, $q_1(T_2)$ оказываются следующими

$$q_1(T_0) = -0.73856 \cdot 10^{-3}\ сек^{-1}$$
$$q_1(T_1) = 0.19759 \cdot 10^{-3}\ сек^{-1}$$
$$q_1(T_2) = -0.08157 \cdot 10^{-3}\ сек^{-1}$$

Процесс приведения гирокомпаса в меридиан представлен таблицей значений функций $z_1'(t)$, $z_2(t)$, $z_3(t)$ и графиками этих функций на фигуре.

Поступила 2 I 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Bellman R., Dynamic Programming. Princeton Univ. Press, 1957.
2. Ройтенберг Я. Н. Некоторые задачи теории динамического программирования. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 4.
3. Смирнов Н. С. Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений. ОНТИ, 1936.
4. Канторович Л. В., Акилов Т. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959, стр. 650.
5. Канторович Л. В. Некоторые дальнейшие применения метода Ньютона для функциональных уравнений. Вестн. Ленинградского ун-та, 1957, № 7, серия математики, механики и астрономии, вып. 2, стр. 68—103.