Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ГИРОГОРИЗОНТКОМПАСА ПРИ НАЛИЧИИ ДИССИПАТИВНЫХ СИЛ

В. Н. Кошляков

(Москва)

В работе исследуется асимптотическая устойчивость невозмущенного движения гирогоризонткомпаса с учетом малых диссипативных сил.

Рассматриваются случаи неподвижного относительно Земли основания, движения с постоянной по величине скоростью и циркуляций.

1. При отсутствии демпфирования собственных колебаний уравнения малых движений гирогоризонткомпаса Геккелера — Аншютца приведены в работах [1,2] и имеют следующий вид:

$$\frac{Pl}{g}\frac{d}{dt}(V\alpha)-Pl\beta-\Omega 2B\sin\varepsilon^\circ\delta=0, \qquad \dot\beta+\frac{V}{R}\alpha-\Omega\gamma=0$$
$$\dot\gamma+\frac{2B\sin\varepsilon^\circ g}{PlR}\delta+\Omega\beta=0, \qquad \frac{d}{dt}(2B\sin\varepsilon^\circ\delta)-Pl\gamma+\Omega\frac{Pl}{g}V\alpha=0 \qquad (1.1)$$

Параметр ε° удовлетворяет условию

$$2B\cos\varepsilon^\circ=\frac{Pl}{g}V \qquad (1.2)$$

Это условие автономно выполняется в гирокомпасе отмеченного выше вида. Обозначения системы (1.1) те же, что и в работах [1,2,3].

Для дальнейшего удобно перейти к новым переменным α_1 и δ_1 согласно соотношениям

$$V\alpha=\alpha_1, \qquad \frac{2B\sin\varepsilon^\circ g}{Pl}\delta=\delta_1 \qquad (1.3)$$

Система (1.1) в этих переменных примет вид

$$\dot\alpha_1-g\beta-\Omega\delta_1=0, \qquad \dot\beta+\frac{\alpha_1}{R}-\Omega\gamma=0$$
$$\dot\gamma+\frac{\delta_1}{R}+\Omega\beta=0, \qquad \dot\delta_1-g\gamma+\Omega\alpha_1=0 \qquad (1.4)$$

Коэффициенты при искомых функциях системы (1.4) можно считать постоянными за исключением величины Ω, определяющейся формулой

$$\Omega=U\sin\varphi+\frac{v_E}{R}\operatorname{tg}\varphi+\frac{d\alpha^*}{dt} \qquad \left(\alpha^*=\frac{v_N}{RU\cos\varphi+v_E}\right) \qquad (1.5)$$

В общем случае движения корабля по земной сфере Ω будет непрерывной функцией t. Система (1.4) эквивалентна двум уравнениям второго порядка вида

$$\ddot\alpha_1+\lambda\alpha_1-2\Omega\dot\delta_1-\dot\Omega\delta_1=0$$
$$\ddot\delta_1+\lambda\delta_1+2\Omega\dot\alpha_1+\dot\Omega\alpha_1=0 \qquad (\lambda=\nu^2-\Omega^2) \qquad (1.6)$$

Наряду с системой (1.6) рассмотрим также систему

$$\begin{aligned} &\ddot{\alpha}_1 + 2b_1\dot{\alpha}_1 + \lambda\alpha_1 - 2\Omega\dot{\delta}_1 - \dot{\Omega}\delta_1 = 0 \\ &\ddot{\delta}_1 + 2b_2\dot{\delta}_1 + \lambda\delta_1 + 2\Omega\dot{\alpha}_1 + \dot{\Omega}\alpha_1 = 0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

где коэффициенты b_1, b_2 отражают действие указанных выше диссипативных сил; в дальнейшем будем полагать эти коэффициенты сколь угодно малыми положительными числами.

2. Рассмотрим сначала простой случай, когда Ω является постоянной величиной. При этом условии из (1.7) получаем

$$\ddot{\alpha}_1 + 2b_1\dot{\alpha}_1 + \lambda\alpha_1 - 2\Omega\dot{\delta}_1 = 0, \qquad \ddot{\delta}_1 + 2b_2\dot{\delta}_1 + \lambda\delta_1 + 2\Omega\dot{\alpha}_1 = 0 \tag{2.1}$$

Характеристическое уравнение этой системы после замены λ е значением согласно (1.6) будет

$$\begin{aligned} &D^4 + 2(b_1 + b_2)D^3 + 2(2b_1b_2 + \nu^2 + \Omega^2)D^2 + \\ &+ 2(b_1 + b_2)(\nu^2 - \Omega^2)D + (\nu^2 - \Omega^2)^2 = 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Применяя критерий Гурвитца, легко можно убедиться, что при любых положительных b_1 и b_2 все корни уравнения (2.2) будут иметь отрицательные вещественные части при выполнении неравенства

$$\Omega < \nu \tag{2.3}$$

полученного другими способами в работах [4,5]. При этом тривиальное решение системы (2.1) будет асимптотически устойчивым; если же

$$\Omega > \nu \tag{2.4}$$

(случай $\Omega = \nu$, соответствующий границе устойчивости, рассматривать не будем), то система окажется неустойчивой при наличии сколь угодно малых диссипативных сил. Действительно, система

$$\ddot{\alpha}_1 + \lambda\alpha_1 - 2\Omega\dot{\delta}_1 = 0, \qquad \ddot{\delta}_1 + \lambda\delta_1 + 2\Omega\dot{\alpha}_1 = 0 \tag{2.5}$$

получающаяся из (2.1) в предположении отсутствия демпфирования, является частным случаем системы с потенциальными и гироскопическими силами вида [9]

$$\ddot{x}_j = -\lambda_j x_j + \sum_k g_{jk}\dot{x}_k \qquad (g_{jk} = -g_{kj}) \tag{2.6}$$

Если $\Omega > \nu$, то из (1.6) имеем, что $\lambda < 0$ и система (2.5), находящаяся под действием одних только потенциальных сил, неустойчива; при этом степень неустойчивости (т. е. число отрицательных λ) является четной и равна двум.

При четной степени неустойчивости подходящим выбором гироскопических сил, выражаемых в нашем случае слагаемыми $2\Omega\dot{\delta}_1$ и $-2\Omega\dot{\alpha}_1$, можно стабилизировать систему, если при этом не добавляются силы с полной диссипацией. Однако эта стабилизация по терминологии Кельвина является «временной»: она разрушается при добавлении сколь угодно малых диссипативных сил. При работе гирогоризонткомпаса на неподвижном относительно Земли основании $\Omega \equiv U\sin\varphi = \text{const}$, $V \equiv RU\cos\varphi = \text{const}$ и условие (2.3) сводится к неравенству

$$U\sin\varphi < \nu \tag{2.7}$$

обеспечивающему при наличии диссипации асимптотическую устойчивость гирогоризонткомпаса. Неравенство (2.7) всегда выполняется, так как

$$\nu = \sqrt{g/R} \approx 1.24 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-1}, \qquad U \approx 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ сек}^{-1}$$

При движении корабля с постоянной по величине восточной составляющей v_E его собственной скорости условие (2.3) принимает вид

$$U \sin\varphi\,(1 + v_E/RU \cos\varphi) < \nu \tag{2.8}$$

Это условие на практике также выполняется.

3. Обратимся к исследованию устойчивости для случая, когда V и Ω являются переменными функциями t. Допустим, что коэффициенты диссипации b_1 и b_2 столь малы по сравнению с ν, что их различием можно пренебречь, вследствие чего положим $b_1 = b_2 = b$.

Тогда из (1.7) получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} &\ddot{\alpha}_1 + 2b\dot{\alpha}_1 + (\nu^2 - \Omega^2)\,\alpha_1 - 2\Omega\dot{\delta}_1 - \dot{\Omega}\delta_1 = 0 \\ &\ddot{\delta}_1 + 2b\dot{\delta}_1 + (\nu^2 - \Omega^2)\,\delta_1 + 2\Omega\dot{\alpha}_1 + \dot{\Omega}\alpha_1 = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Перейдем теперь в системе (3.1) к новым переменным ξ_1, ξ_2 при помощи неособенного преобразования вида [2]

$$\xi_1 = \alpha_1 \cos\theta - \delta_1 \sin\theta, \qquad \xi_2 = \alpha_1 \sin\theta + \delta_1 \cos\theta \qquad \left(\theta = \int_0^t \Omega(\tau)\,d\tau\right) \tag{3.2}$$

Отсюда

$$\alpha_1 = \xi_1 \cos\theta + \xi_2 \sin\theta, \qquad \delta_1 = -\xi_1 \sin\theta + \xi_2 \cos\theta \tag{3.3}$$

Пользуясь формулами (3.2) и (3.3), получаем систему для переменных ξ_1, ξ_2 в форме

$$\ddot{\xi}_1 + 2b\dot{\xi}_1 + \nu^2\xi_1 + 2b\Omega(t)\,\xi_2 = 0, \qquad \ddot{\xi}_2 + 2b\dot{\xi}_2 + \nu^2\xi_2 - 2b\Omega(t)\,\xi_1 = 0 \tag{3.4}$$

Если умножить второе из уравнений системы (3.4) на $-i\ (i = \sqrt{-1})$ и прибавить к первому, то получим

$$\ddot{w} + 2b\dot{w} + (\nu^2 + 2b\Omega(t)\,i)\,w = 0 \qquad (w = \xi_1 - i\xi_2) \tag{3.5}$$

4. Обратимся к случаю последовательных левых циркуляций корабля с постоянной скоростью v, начинающихся с некоторого начального курса ψ_0.

Тогда северная и восточная составляющие собственной скорости корабля будут соответственно определяться выражениями

$$v_N = v \cos(\psi_0 - \omega t), \qquad v_E = v \sin(\psi_0 - \omega t) \qquad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right) \tag{4.1}$$

где ω — круговая частота циркуляции, T — период циркуляции. При этих условиях V и Ω будут периодическими функциями с периодом T.

В случае, например, циркуляции с южного курса в формулах (4.1) следует положить $\psi_0 = 180°$ и тогда $v_N = -v \cos\omega t$, $v_E = v \sin\omega t$.

Как показано в работе [3], при циркуляциях корабля в выражении (1.5) можно ограничиться учетом лишь главной части последнего слагаемого, отражающего скорость изменения скоростной девиации.

Для циркуляций с южного курса имеем, в связи с этим

$$\Omega = \mu\omega \sin \omega t \qquad (\mu = v \,/\, RU \cos \varphi) \tag{4.2}$$

Далее, согласно (3.2), получаем

$$\theta = \mu\omega \int_0^t \sin \omega\tau \, d\tau = \mu (1 - \cos \omega t) \tag{4.3}$$

При исследовании устойчивости гирогоризонткомпаса на циркуляции воспользуемся сначала методом усреднения в предположении, что Ω определяется формулой (4.2). Заменяя величину Ω ее средним значением за период циркуляции, равным в силу (4.2) нулю, придем к системе усредненных уравнений, соответствующих системе (3.4)

$$\ddot{u}_1 + 2b\dot{u}_1 + \nu^2 u_1 = 0, \qquad \ddot{u}_2 + 2b\dot{u}_2 + \nu^2 u_2 = 0 \tag{4.4}$$

Уравнения (4.4) при $b < \nu$ имеют решения в форме

$$\begin{aligned} u_1 &= e^{-bt} (C_1 \cos qt + C_2 \sin qt) \\ u_2 &= e^{-bt} (C_3 \cos qt + C_4 \sin qt) \end{aligned} \qquad (q = \sqrt{\nu^2 - b^2}, \quad C_j = \text{const}) \tag{4.5}$$

Корни характеристических уравнений усредненной системы, соответствующей (3.4), имеют отрицательные вещественные части при $b > 0$; поэтому применение метода усреднения имеет законное основание [7].

При циркуляции корабля характеристические показатели системы (3.1) в случае слабого демпфирования можно определить вытекающими из (4.4) выражениями

$$\varkappa_{1,2} = -b \pm \nu i, \qquad \varkappa_{3,4} = -b \pm \nu i \tag{4.6}$$

которые при $b = 0$ переходят в значения характеристических показателей, данных в работе [2].

Таким образом, при сколь угодно слабой диссипации решения системы (3.4) в случае циркуляции будут асимптотически устойчивыми.

Если вместо ξ_1 и ξ_2 воспользоваться соответственно решениями (4.5), полученными методом усреднения, то по формулам (3.3) имеем

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= e^{-bt} (C_1 \cos qt + C_2 \sin qt) \cos \theta + e^{-bt} (C_3 \cos qt + C_4 \sin qt) \sin \theta \\ \delta_1 &= -e^{-bt} (C_1 \cos qt + C_2 \sin qt) \sin \theta + e^{-bt} (C_3 \cos qt + C_4 \sin qt) \cos \theta \end{aligned} \tag{4.7}$$

Если демпфирование очень слабое, то можно положить здесь $q \approx \nu$ и тогда будет

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= e^{-bt} (C_1 \cos \nu t + C_2 \sin \nu t) \cos \theta + e^{-bt} (C_3 \cos \nu t + C_4 \sin \nu t) \sin \theta \\ \delta_1 &= -e^{-bt} (C_1 \cos \nu t + C_2 \sin \nu t) \sin \theta + e^{-bt} (C_3 \cos \nu t + C_4 \sin \nu t) \cos \theta \end{aligned} \tag{4.8}$$

Асимптотическая устойчивость на циркуляции будет также сопутствовать и исходным уравнениям гирогоризонткомпаса (1.1), так как переход к новым переменным согласно (1.3) и (3.2) является в сущности их неособенным линейным переобразованием с периодическими коэффициентами.

5. Рассмотрим другой способ исследования устойчивости гирогоризонткомпаса, не связанный с методом усреднения. Полагая в (3.5)

$$w = e^{-bt} y \tag{5.1}$$

получим

$$\ddot{y} + (\nu^2 - b^2 + 2ib\Omega(t))\, y = 0 \tag{5.2}$$

Допустим, что корабль совершает равномерную циркуляцию с южного курса; пользуясь формулой (4.2), получаем

$$\ddot{y} + (\nu^2 - b^2 + 2i\mu b\omega \sin \omega t)\, y = 0 \tag{5.3}$$

Полагая затем $\omega t = 2iz$, приходим к модифицированному уравнению Матье от мнимого аргумента

$$\frac{d^2y}{dz^2} - (p^2 - 2k^2 \operatorname{sh} 2z)\, y = 0 \qquad \left(p^2 = \frac{4(\nu^2 - b^2)}{\omega^2}, \quad k^2 = 4\mu \frac{b}{\omega}\right) \tag{5.4}$$

Если ввести новый аргумент $\zeta = ike^z$, то уравнение (5.4) преобразуется к виду

$$\frac{d^2y}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta}\frac{dy}{d\zeta} + \left(1 - \frac{p^2}{\zeta^2} - \frac{k^4}{\zeta^4}\right) y = 0 \tag{5.5}$$

Уравнение (5.5) при $k \to 0$ и при нецелом p имеет асимптотическое решение в следующей форме [8]

$$y = C_1' J_p(ke^z) + C_2' J_{-p}(ke^z) \qquad (C_1',\ C_2' = \mathrm{const}) \tag{5.6}$$

Отсюда согласно (5.1) получаем

$$w = e^{-bt}(C_1' J_p(ke^z) + C_2' J_{-p}(ke^z)) \tag{5.7}$$

Останавливаясь на случае слабого демпфирования, положим $p \approx 2\nu/\omega$ в силу (5.4).

Воспользовавшись далее асимптотическими формулами функций $J_p(x)$ и $J_{-p}(x)$ для малых значений аргумента, имеющими вид (6)

$$J_p(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^p}{2^p\Gamma(1+p)}, \qquad J_{-p}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^{-p}}{2^{-p}\Gamma(1-p)} \tag{5.8}$$

получаем

$$\begin{aligned} J_p(ke^z) &\sim \left(\frac{k}{2}\right)^p \frac{1}{\Gamma(1+p)} (\cos \nu t - i \sin \nu t) \\ J_{-p}(ke^z) &\sim \left(\frac{k}{2}\right)^{-p} \frac{1}{\Gamma(1-p)} (\cos \nu t + i \sin \nu t) \end{aligned} \tag{5.9}$$

Отсюда, пользуясь решением (5.7), будем иметь

$$w = e^{-bt}(D_1 \cos \nu t + iD_2 \sin \nu t) \tag{5.10}$$

где

$$D_1 = C_1'\left(\frac{k}{2}\right)^p \frac{1}{\Gamma(1+p)} + C_2'\left(\frac{k}{2}\right)^{-p} \frac{1}{\Gamma(1-p)}$$

$$D_2 = C_2'\left(\frac{k}{2}\right)^{-p} \frac{1}{\Gamma(1-p)} - C_1'\left(\frac{k}{2}\right)^p \frac{1}{\Gamma(1+p)} \tag{5.11}$$

Полагая, далее

$$D_1 = K_1 - iK_3, \qquad D_2 = -(K_4 + iK_2) \tag{5.12}$$

и пользуясь (3.5), имеем

$$\xi_1 = e^{-bt}(K_1 \cos \nu t + K_2 \sin \nu t), \qquad \xi_2 = e^{-bt}(K_3 \cos \nu t + K_4 \sin \nu t) \tag{5.13}$$

По формулам обратного преобразования (3.3) получаем окончательно (5.14)

$$\alpha_1 = e^{-bt}(K_1 \cos \nu t + K_2 \sin \nu t)\cos\theta + e^{-bt}(K_3 \cos \nu t + K_4 \sin \nu t)\sin\theta$$

$$\delta_1 = -e^{-bt}(K_1 \cos \nu t + K_2 \sin \nu t)\sin\theta + e^{-bt}(K_3 \cos \nu t + K_4 \sin \nu t)\cos\theta$$

где постоянные K_j определяются по начальным условиям. Эти выражения, как легко видеть, совпадают с ранее полученными другим методом формулами (4.7).

Поступила 13 II 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. К теории гирогоризонткомпаса. ПММ, 1956, т. XX, вып. 4.
2. Кошляков В. Н. О приводимости уравнений движения гирогоризонткомпаса. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 5.
3. Кошляков В. Н. К теории гирокомпасов. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 5.
4. Жбанов Ю. К. Исследование свободных колебаний в системе автономного определения координат движущегося объекта. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 6.
5. Меркин Д. Р. Об устойчивости движения гирорамы. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 6.
6. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М., ГИТТЛ, 1953.
7. Демидович Б. П. О характеристических показателях систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Уч. зап. МГУ, 1952, т. VI, вып. 163.
8. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье. ИИЛ, 1953.
9. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М., ГИТТЛ, 1955.