Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ДВИЖЕНИИ ГИРОСКОПИЧЕСКОГО МАЯТНИКА ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ ЕГО ТОЧКИ ПОДВЕСА

А. А. Свешников

(Ленинград)

1. Движение гироскопического маятника при наличии горизонтальных составляющих ускорения A_ξ и A_η его точки подвеса исследовалось многими авторами. Если не учитывать нутационное движение, то при отсутствии демпфирования для малых угловых отклонений α и β оси маятника от вертикали эта задача, как известно [1], сводится к решению системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot\alpha - kg\beta = -kA_\eta, \qquad \dot\beta + kg\alpha = kA_\xi, \qquad k = \frac{ml}{H} \tag{1.1}$$

где g — ускорение силы тяжести, m — масса гирокамеры и ротора, H — кинетический момент ротора гироскопа.

В обычной постановке задачи A_ξ и A_η считаются заданными функциями времени и исследование системы (1.1) не представляет каких-либо принципиальных трудностей. Однако в некоторых задачах наряду с горизонтальными составляющими ускорения точки подвеса существенное влияние может оказывать и вертикальная составляющая ускорения A_ζ, а все три составляющие ускорения являются случайными функциями времени.

Примером такой задачи является исследование движения гироскопического маятника на корабле, где наличие качки вызывает случайные перемещения точки подвеса маятника. Аналогичная задача возникает при исследовании поведения гироскопического маятника, установленного на самолете, и в ряде других случаев.

Сохраняя сделанные выше допущения, для задач такого типа будем иметь следующую систему уравнений движения:

$$\dot\alpha - kg\left(1 + \frac{1}{g}A_\zeta\right)\beta = -kA_\eta, \qquad \dot\beta + kg\left(1 + \frac{1}{g}A_\zeta\right)\alpha = kA_\xi \tag{1.2}$$

где A_ξ, A_η и A_ζ, а следовательно, и $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ являются случайными функциями времени.

При наличии демпфирования, возникающего за счет сопротивления воздуха или сил вязкого трения в осях подвеса, система (1.2) заменяется системой уравнений

$$\dot\alpha - kg\left(1 + \frac{1}{g}A_\zeta\right)\beta - n\dot\beta = -kA_\eta, \quad \dot\beta + kg\left(1 + \frac{1}{g}A_\zeta\right)\alpha + n\dot\alpha = kA_\xi \tag{1.3}$$

Здесь n — отношение коэффициента демпфирования (принимаемого одинаковым для обеих осей карданова подвеса) к кинетическому моменту ротора гироскопа H.

Вводя вместо вещественных функций $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ комплексную функцию $\gamma(t)$, последнюю систему можно представить в виде одного уравнения

$$\dot{\gamma}(t) + ik_1 g[1 + Y(t)]\gamma(t) = V_1(t) + iW_1(t) \qquad (\gamma = \alpha + i\beta) \tag{1.4}$$

Здесь

$$k_1 g = \omega_1(1 - in), \qquad \omega_1 = \frac{kg}{1+n^2} = \frac{\omega}{1+n^2} \tag{1.5}$$

$$V_1(t) = \frac{1}{1+n^2}[V(t) + nW(t)], \qquad W_1(t) = \frac{1}{1+n^2}[W(t) - nV(t)] \tag{1.6}$$

$$V(t) = -kA_\eta(t), \qquad W(t) = kA_\xi(t), \qquad Y(t) = \frac{1}{g}A_\zeta(t) \tag{1.7}$$

Решение задачи при отсутствии демпфирования может быть получено из решения уравнения (1.4), если положить $n = 0$. Функция $\gamma(t)$ является случайной, и, следовательно, решение уравнения (1.4) сводится к задаче определения всех законов распределения ординат этой функции. Эта задача даже при условии нормальности случайных процессов $Y(t)$, $V(t)$ и $W(t)$ является весьма сложной. Однако для приложений достаточно знать только математические ожидания и дисперсии угловых отклонений $\alpha(t)$ и $\beta(t)$. Как будет показано ниже, моменты этих функций могут быть определены в общем виде для любой системы случайных функций $Y(t)$, $V(t)$ и $W(t)$, а для случая, когда эти функции нормальны, могут быть получены простые расчетные формулы.

Так как $|\gamma(t)| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ дает отклонение оси гиромаятника от вертикали, то непосредственный интерес представляют величины:

$$\boldsymbol{M}[\alpha(t)] = \operatorname{Re}\boldsymbol{M}[\gamma(t)], \qquad \boldsymbol{M}[\beta(t)] = \operatorname{Im}\boldsymbol{M}[\gamma(t)] \tag{1.8}$$

$$\boldsymbol{D}[|\gamma(t)|] = \boldsymbol{M}[|\gamma(t)|^2] - \{\boldsymbol{M}[|\gamma(t)|]\}^2 \tag{1.9}$$

а также и дисперсии $\alpha(t)$ и $\beta(t)$, определение которых может быть выполнено по формулам

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}[\alpha(t)] &= \tfrac{1}{2}\boldsymbol{M}[|\gamma(t)|^2] + \tfrac{1}{2}\operatorname{Re}\boldsymbol{M}[\gamma^2(t)] - \{\boldsymbol{M}[\alpha(t)]\}^2 \\ \boldsymbol{D}[\beta(t)] &= \tfrac{1}{2}\boldsymbol{M}[|\gamma(t)|^2] - \tfrac{1}{2}\operatorname{Re}\boldsymbol{M}[\gamma^2(t)] - \{\boldsymbol{M}[\beta(t)]\}^2 \end{aligned} \tag{1.10}$$

2. Будем обозначать малыми буквами латинского алфавита математические ожидания случайных функций, обозначенных большими латинскими буквами того же наименования. Положим

$$\gamma(t) = \delta(t) + c, \qquad c = \frac{v_1(t) + iw_1(t)}{ik_1 g[1 + y(t)]} \tag{2.1}$$

где $\delta(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\delta}(t) + igk_1[1 + Y(t)]\delta(t) = V_1^\circ(t) + iW_1^\circ(t) \tag{2.2}$$

$$V_1^\circ(t) = \frac{1}{1+n^2}[V^\circ(t) + nW^\circ(t)], \qquad W_1^\circ(t) = \frac{1}{1+n^2}[W^\circ(t) - nV^\circ(t)] \tag{2.3}$$

а функции $V^\circ(t)$ и $W^\circ(t)$ определяются равенствами

$$\begin{aligned} V^\circ(t) &= V(t) - v(t) - \frac{v(t)}{1+y(t)}[Y(t) - y(t)] \\ W^\circ(t) &= W(t) - w(t) - \frac{w(t)}{1+y(t)}[Y(t) - y(t)] \end{aligned} \tag{2.4}$$

Уравнение (2.2) не отличается по виду от исходного уравнения (1.4), однако содержит в правой части функции, имеющие нулевые математические ожидания. Представим случайную функцию $\delta(t)$ в виде суммы

$$\delta(t) = \delta_0(t) + \delta_1(t) \tag{2.5}$$

где $\delta_0(t)$ — решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (1.4) и заданным начальным условиям α_0, β_0 для $\alpha(t)$ и $\beta(t)$, а $\delta_1(t)$ удовлетворяет (1.5) и нулевым начальным условиям. Очевидно

$$\boldsymbol{M}[\delta(t)] = \boldsymbol{M}[\delta_0(t)] + \boldsymbol{M}[\delta_1(t)] \tag{2.6}$$

Учитывая (2.1) и обозначая

$$Z(t_1) = \int_{t_1}^{t} Y(t_2)\,dt_2 \tag{2.7}$$

получим

$$\delta_0(t) = (\alpha_0 + i\beta_0 - c)\exp\{-ik_1g[t + Z(0)]\} \tag{2.8}$$

$$\delta_1(t) = \int_0^t \exp\{-ik_1g(t - t_1) - ik_1gZ(t_1)\}[V_1^\circ(t_1) + iW_1^\circ(t_1)]\,dt_1 \tag{2.9}$$

Вычисляя математическое ожидание обеих частей (2.7), получим

$$M[\delta_1(t)] = \int_0^t e^{-ik_1g(t-t_1)} M\{e^{-ik_1gZ(t_1)}[V_1^\circ(t_1) + iW_1^\circ(t_1)]\}\,dt_1 \tag{2.10}$$

Обозначим $\boldsymbol{E}(u_1, u_2)$ и $\boldsymbol{E}(u_1, u_3)$ характеристические функции систем случайных величин $Z(t)$, $V_1^\circ(t)$, и соответственно $Z(t_1)$, $W_1^\circ(t_1)$. Тогда будем иметь

$$\boldsymbol{M}\{e^{-ik_1gZ(t_1)}[V_1^\circ(t_1) + iW_1^\circ(t_1)]\} =$$

$$= \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial u_2}E(u_1, u_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}E(u_1, u_3) \quad \text{при} \begin{cases} u_1 = -k_1g \\ u_2 = u_3 = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

Ограничимся для дальнейшего рассмотрением только нормальных стационарных случайных функций $Y(t)$, $V^\circ(t)$ и $W^\circ(t)$. В этом случае нормальной также будет и функция $Z(t)$, а так как характеристическая функция $\boldsymbol{E}(u_1, \ldots, u_n)$ системы нормальных случайных величин $X_1, \ldots X_n$ однозначно выражается через элементы корреляционной матрицы $\|k_{jl}\|$ этой системы и их математические ожидания x_j по формуле [2]

$$\boldsymbol{E}(u_1, \ldots u_n) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{n} k_{jl}u_ju_l + i\sum_{j=1}^{n} u_jx_j\right) \tag{2.12}$$

то вместо (2.10) получим

$$\boldsymbol{M}[\delta_1(t)] = \frac{(1 - in)^2\omega_1}{1 + n^2} \times$$

$$\times \int_0^t \exp\left[-ik_1g(1 + y)(t - t_1) - \frac{1}{2}k_1^2g^2k_{11}\right](k_{13} - ik_{12})\,dt_1 \tag{2.13}$$

Здесь

$$k_{11} = \boldsymbol{D}[Z(t_1)], \quad k_{12} = \boldsymbol{M}\{[Z(t_1) - z(t_1)]V_1^\circ(t_1)\}$$

$$k_{13} = \boldsymbol{M}\{[Z(t_1) - z(t_1)]W_1^\circ(t_1)\} \tag{2.14}$$

Обозначив через $\boldsymbol{K}_y(\tau)$ корреляционную функцию $Y(t)$, а через $R_{vy}(\tau)$ и $R_{wy}(\tau)$ корреляционные функции связи $V^\circ(t)$ с $Y(t)$ и соответственно $W^\circ(t)$ с $Y(t)$ и положив

$$f(\tau) = 2\int_0^\tau (\tau - \tau_1)\, \boldsymbol{K}_y(\tau_1)\, d\tau_1, \qquad \varphi_1(\tau) = \int_0^\tau R_{vy}(\tau_1)\, d\tau_1, \qquad \varphi_2(\tau) = \int_0^\tau R_{wy}(\tau_1)\, d\tau_1 \tag{2.15}$$

для моментов (2.14) будем иметь

$$k_{11} = f(t - t_1), \qquad k_{12} = \frac{1}{1+n^2}[\varphi_1(t - t_1) - n\,\varphi_2(t - t_1)]$$

$$k_{13} = \frac{1}{1+n^2}[\varphi_2(t - t_1) + n\varphi_1(t - t_1)] \tag{2.16}$$

Подставив (2.16) в (2.13), отделим вещественную часть от мнимой:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}[\delta_1(t)] = \frac{\omega_1}{1+n^2}\int_0^t \exp[L(\tau)]\,\{[\varphi_2(\tau) - n\varphi_1(\tau)]\cos N(\tau) + \\ + [\varphi_1(\tau) + n\varphi_2(\tau)]\sin N(\tau)\}\, d\tau + \\ + \frac{i\omega_1}{1+n^2}\int_0^t \exp[L(\tau)]\,\{[\varphi_2(\tau) - n\varphi_1(\tau)]\sin N(\tau) + \\ + [\varphi_1(\tau) + n\varphi_2(\tau)]\cos N(\tau)\}\, d\tau\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$L(\tau) = -\omega_1\left[n(1+y)\tau + \frac{1}{2}\omega_1 f(\tau)\right], \qquad N(\tau) = \omega_1[(1+y)\tau - \omega_1 f(\tau)]$$

Математическое ожидание $\boldsymbol{M}[\delta_0(\tau)]$ может быть выражено через характеристическую функцию $\boldsymbol{E}(u)$ случайной величины $Z(0)$

$$\boldsymbol{M}[\delta_0(t)] = \{\boldsymbol{M}[\alpha_0] + i\boldsymbol{M}[\beta_0] - c\}\, e^{-ik_1 gt}\, \boldsymbol{E}(u) \quad \text{при } u = -k_1 g \tag{2.18}$$

Выразив явно $\boldsymbol{E}(u)$ через моменты $Z(0)$, получим

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}[\delta_0(t)] = \exp\left\{-\omega_1\left[n(1+y)\,t + \frac{1}{2}\omega_1(1-n^2) f(t)\right]\right\} \times \\ \times \left\{\left[\boldsymbol{M}[\alpha_0] - \frac{w}{\omega(1+y)}\right]\cos\omega_1[(1+y)\,t - n\omega_1 f(t)] + \right. \\ \left. + \left[\boldsymbol{M}[\beta_0] + \frac{v}{\omega(1+y)}\right]\sin\omega_1[(1+y)\,t - n\omega_1 f(t)]\right\} + \\ + i\exp\left\{-\omega_1\left[n(1+y)\,t + \frac{1}{2}\omega_1(1-n^2) f(t)\right]\right\} \times \\ \times \left\{\left[\boldsymbol{M}[\beta_0] + \frac{v}{\omega(1+y)}\right]\cos\omega_1[(1+y)\,t - n\omega_1 f(t)] - \right. \\ \left. - \left[\boldsymbol{M}[\alpha_0] - \frac{w}{\omega(1+y)}\right]\sin\omega_1[(1+y)\,t - n\omega_1 f(t)]\right\}\end{aligned} \tag{2.19}$$

Формулы (2.9), (2.17) и (2.19) полностью определяют математические ожидания углов $\alpha(t)$ и $\beta(t)$.

Для определения $\boldsymbol{M}[\,|\delta_1(t)|^2]$ умножим (2.9) на комплексносопряженное выражение, что дает

$$\begin{aligned}|\delta_1(t)|^2 = \int_0^t\int_0^t \exp\{-i\omega_1[(1-in)(t-t_1) - (1+in)(t-t_2) + (1-in)Z(t_1) - \\ - (1+in)Z(t_2)]\}\,[V_1^\circ(t_1) + iW_1^\circ(t_1)]\,[V_1^\circ(t_2) - iW_1^\circ(t_2)]\, dt_1 dt_2\end{aligned} \tag{2.20}$$

Рассмотрим систему нормальных случайных величин $Z(t_1)$, $Z(t_2)$, $V^\circ(t_1)$, $V^\circ(t_2)$, $W^\circ(t_1)$, $W^\circ(t_2)$, которые пронумеруем в порядке их написания, и будем обозначать аргументы $u_r\,(r=1,\ldots,6)$ характеристической функции $\boldsymbol{E}$ теми же номерами, что и случайные величины. Тогда для математического ожидания (2.20) получим

$$\boldsymbol{M}[\,|\,\delta_1(t)\,|^2] = \frac{1}{1+n^3}\int\limits_0^t\int\limits_0^t \exp\{-i\omega_1[(1-in)(t-t_1)-(1+in)(t-t_2)]\}\times$$
$$\times\left\{-\frac{\partial^2}{\partial u_3\partial u_4}\boldsymbol{E}(u_1,u_2,u_3,u_4)-\frac{\partial}{\partial u_5\partial u_6}\boldsymbol{E}(u_1,u_2,u_5,u_6)+\right.$$
$$\left.+\,i\frac{\partial^2}{\partial u_3\partial u_6}\boldsymbol{E}(u_1,u_2,u_3,u_6)-i\frac{\partial^2}{\partial u_4\partial u_5}\boldsymbol{E}(u_1,u_2,u_4,u_5)\right\}dt_1dt_2$$
$$\text{при } u_1=-\omega_1(1-in),\ u_2=\omega_1(1+in),\ u_3=u_4=u_5=u_6=0$$

Выразив и здесь характеристические функции через элементы корреляционной матрицы $\|k_{jl}\|$ рассматриваемой системы случайных величин и учитывая, что $\boldsymbol{M}[Z(t_1)]=(t-t_1)y$, полvчим

$$\boldsymbol{M}[\,|\,\delta_1(t)\,|^2] = \frac{\omega_1^2}{1+n^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^t \exp\{-i\omega_1[(1-in)(t-t_1)-(1+in)(t-t_2)]-$$
$$-\,{}^1/_2\,\omega_1^2[(1-in)^2k_{11}+(1+in)^2k_{22}-2(1+n^2)k_{12}]-$$
$$-\,i\omega_1 y[(t_2-t_1)-in(2t-t_1-t_2)]\}\{-[(k_{31}-k_{32})-in(k_{31}+k_{32})]\times$$
$$\times[(k_{41}-k_{42})-in(k_{41}+k_{42})]-[(k_{51}-k_{52})-in(k_{51}+k_{52})]\times$$
$$\times[(k_{61}-k_{62})-in(k_{61}+k_{62})]+i[(k_{31}-k_{32})-in(k_{31}+k_{32})]\times$$
$$\times[(k_{61}-k_{62})-in(k_{61}+k_{62})]-i[(k_{41}-k_{42})-in(k_{41}+k_{42})]\times$$
$$\times[(k_{51}-k_{52})-in(k_{51}+k_{52})]+\omega_1^{-2}(k_{34}+k_{56}-ik_{36}+ik_{45})\}\,dt_1,dt_2$$

Используя (2.15) и обозначая через $\boldsymbol{K}_v(\tau)$ и $\boldsymbol{K}_w(\tau)$ корреляционные функции $V^\circ(t)$ и $W^\circ(t)$, последнее равенство можно представить в виде

$$\boldsymbol{M}[\,|\,\delta_1(t)\,|^2] = \int\limits_0^t\int\limits_0^t e^{-D(\tau_1,\tau_2)}\{A(\tau_1,\tau_2)\cos[C(\tau_1,\tau_2)]-$$
$$-\,B(\tau_1,\tau_2)\sin[C(\tau_1,\tau_2)]\}\,d\tau_1d\tau_2 \qquad (2.23)$$

где

$$A(\tau_1,\tau_2)=\frac{\omega_1^2}{1+n^2}[\varphi_1(\tau_2-\tau_1)\varphi_1(\tau_1-\tau_2)+\varphi_2(\tau_2-\tau_1)\varphi_2(\tau_1-\tau_2)]+$$
$$+\frac{2n\omega_1^2}{1+n^2}[\varphi_1(\tau_1-\tau_2)\varphi_2(\tau_2)+\varphi_1(\tau_2-\tau_1)\varphi_2(\tau_1)-\varphi_2(\tau_2-\tau_1)\varphi_1(\tau_1)-$$
$$-\,\varphi_2(\tau_1-\tau_2)\varphi_1(\tau_2)]+\frac{2n^2\omega_1^2}{1+n^2}[2\varphi_1(\tau_1)\varphi_1(\tau_2)+2\varphi_2(\tau_1)\varphi_2(\tau_2)-$$
$$-\,\varphi_1(\tau_1-\tau_2)\varphi_1(\tau_2)-\varphi_1(\tau_2-\tau_1)\varphi_1(\tau_1)-\varphi_2(\tau_2-\tau_1)\varphi_2(\tau_1)-$$
$$-\,\varphi_2(\tau_1-\tau_2)\varphi_2(\tau_2)]+\frac{1}{1+n^2}[K_v(\tau_2-\tau_1)+K_w(\tau_2-\tau_1)] \qquad (2.24)$$

$$B(\tau_1,\tau_2)=\frac{2n\omega_1^2}{1+n^2}\{[2\varphi_1(\tau_1-\tau_2)\varphi_1(\tau_2)+2\varphi_2(\tau_1-\tau_2)\varphi_2(\tau_2)+$$
$$+\,\varphi_1(\tau_2-\tau_1)\varphi_2(\tau_1-\tau_2)]-[2\varphi_1(\tau_2-\tau_1)\varphi_1(\tau_1)+2\varphi_2(\tau_2-\tau_1)\varphi_2(\tau_1)+$$
$$+\,\varphi_1(\tau_1-\tau_2)\varphi_2(\tau_2-\tau_1)]+n[2\varphi_1(\tau_2)-\varphi_1(\tau_2-\tau_1)][2\varphi_2(\tau_1)-\varphi_2(\tau_1-\tau_2)]-$$
$$-\,n[2\varphi_1(\tau_1)-\varphi_1(\tau_1-\tau_2)][2\varphi_2(\tau_2)-\varphi_2(\tau_2-\tau_1)]\} \qquad (2.25)$$

$$C(\tau_1, \tau_2) = \omega_1 [(\tau_2 - \tau_1) - n\omega_1 f(\tau_2) + n\omega_1 f(\tau_1) + (\tau_2 - \tau_1) y] \tag{2.26}$$

$$D(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2} \omega_1^2 [(1 + n^2) f(\tau_2 - \tau_1) - 2n^2 f(\tau_1) - 2n^2 f(\tau_2)] + \\ + \omega_1 n (\tau_1 + \tau_2)(1 + y) \tag{2.27}$$

Из (2.5) следует, что

$$\boldsymbol{M} [\,|\,\delta(t)\,|^2] = \boldsymbol{M} [\,|\,\delta_0(t)\,|\,] + \boldsymbol{M} [\,|\,\delta_1(t)\,|^2] + 2 \operatorname{Re} \boldsymbol{M} [\delta_0(t)\, \delta_1(t)] \tag{2.28}$$

Входящие в последнее равенство математические ожидания могут быть найдены тем же методом, что и $\boldsymbol{M} [\,|\,\delta_1(t)\,|^2]$. Считая для простоты, что α_0 и β_0 взаимно независимы, имеют нулевые математические ожидания и не зависят от $Y(t)$, $V^\circ(t)$ и $W^\circ(t)$, получим

$$\boldsymbol{M} [\,|\,\delta_0(t)\,|^2] = \{\boldsymbol{D}[\alpha_0] + \boldsymbol{D}[\beta_0]\} \exp[-2n\omega_1 t + 2n^2\omega_1^2 f(t)]$$

$$\operatorname{Re} \boldsymbol{M} [\delta_0(t)\, \delta_1(t)] = 0 \tag{2.29}$$

Аналогично формуле (2.23) из (2.9) следует

$$\operatorname{Re} \boldsymbol{M} [\delta_1^2(t)] = \int_0^t \int_0^t e^{-D_1(\tau_1, \tau_2)} \{[(1-n^2) A_1(\tau_1,\tau_2) + 2nB_1(\tau_1,\tau_2)] \cos C_1(\tau_1,\tau_2) + \\ + [(1 - n^2) B_1(\tau_1, \tau_2) - 2nA_1(\tau_1, \tau_2)] \sin C_1(\tau_1, \tau_2)\}\, d\tau_1 d\tau_2 \tag{2.30}$$

где

$$A_1(\tau_1, \tau_2) = \boldsymbol{K}_w(\tau_2 - \tau_1) - \boldsymbol{K}_v(\tau_2 - \tau_1) + \omega_1^2 (1 - n^2) \times \\ \times [\Phi_{2,2}(\tau_1, \tau_2) - \Phi_{1,1}(\tau_1, \tau_2)] + 2\omega_1^2 n [\Phi_{1,2}(\tau_1, \tau_2) + \Phi_{1,2}(\tau_2, \tau_1)] \tag{2.31}$$

$$B_1(\tau_1, \tau_2) = -R_{vw}(\tau_1 - \tau_2) - R_{vw}(\tau_2 - \tau_1) - (1 - n^2)\, \omega_1 \times \\ \times [\Phi_{1,2}(\tau_1, \tau_2) + \Phi_{1,2}(\tau_2, \tau_1)] - 2n\omega_1^2 [\Phi_{2,2}(\tau_1, \tau_2) + \Phi_{1,1}(\tau_1, \tau_2)] \tag{2.32}$$

$$C_1(\tau_1, \tau_2) = \omega_1 \{(\tau_1 + \tau_2) - n\omega_1 [3f(\tau_1) + 3f(\tau_2) - f(\tau_2 - \tau_1)]\} \tag{2.33}$$

$$D_1(\tau_1, \tau_2) = \omega_1 \{n(\tau_1 + \tau_2) + \frac{1}{2}(1 - n^2)\, \omega_1 [3f(\tau_1) + 3f(\tau_2) - f(\tau_2 - \tau_1)]\}$$

$$\Phi_{j,l}(\tau_p, \tau_q) = [2\varphi_j(\tau_p) - \varphi_j(\tau_p - \tau_q)]\, [2\varphi_l(\tau_q) - \varphi_l(\tau_q - \tau_p)] \tag{2.34}$$

$$(j, l, p, q = 1, 2) \tag{2.35}$$

а $R_{vw}(\tau)$ — корреляционная функция связи $V^\circ(t)$ и $W^\circ(t)$. Таким же образом из (2.8) получим

$$\operatorname{Re} \boldsymbol{M} [\delta_0^2(t)] = \{\boldsymbol{D}[\alpha_0] - \boldsymbol{D}[\beta_0] + c^2\} \exp[-2n\omega_1 t - 2(1 - n^2)\, \omega_1^2 f(t)] \times \\ \times \cos\{2\omega_1 [t - 2\omega_1 n f(t)]\} \tag{2.36}$$

Наконец, учитывая предположения о начальных условиях, получим

$$\operatorname{Re} \boldsymbol{M} [\delta^2(t)] = \operatorname{Re} \boldsymbol{M} [\delta_0^2(t)] + \operatorname{Re} \boldsymbol{M} [\delta_1^2(t)] \tag{2.37}$$

т. е. будем иметь все необходимые формулы для вычисления дисперсий $\alpha(t)$ и $\beta(t)$, определяемых равенствами (1.10).

3. Проведем анализ полученных результатов. Рассмотрим сперва движение гиромаятника при отсутствии демпфирования. Положив в

(2.17) и (2.19) $n = 0$ и учитывая, что в этом случае $\omega_1 = \omega$, для математических ожиданий угловых отклонений оси, получим

$$\boldsymbol{M}[\alpha(t)] = F(t)\left\{\left[\boldsymbol{M}[\alpha_0] - \frac{w}{\omega(1+y)}\right]\cos[\omega(1+y)t] + \right.$$

$$\left. + \left[\boldsymbol{M}[\beta_0] + \frac{v}{\omega(1+y)}\right]\sin[\omega(1+y)t]\right\} + \omega\int_0^t F(\tau)\varphi_2(\tau)\cos[\omega(1+y)\tau]\,d\tau +$$

$$+ \omega\int_0^t F(\tau)\varphi_1(\tau)\sin[\omega(1+y)\tau]\,d\tau \qquad (3.1)$$

$$\boldsymbol{M}[\beta(t)] = F(t)\left\{\left[\boldsymbol{M}[\beta_0] + \frac{v}{\omega(1+y)}\right]\cos[\omega(1+y)t] - \right.$$

$$\left. - \left[\boldsymbol{M}[\alpha_0] - \frac{w}{\omega(1+y)}\right]\sin[\omega(1+y)t]\right\} + \omega\int_0^t F(\tau)\varphi_2(\tau)\sin[\omega(1+y)\tau]\,d\tau +$$

$$+ \omega\int_0^t F(\tau)\varphi_1(\tau)\cos[\omega(1+y)\tau]\,d\tau \qquad (3.2)$$

где обозначено

$$F(t) = \exp\left[-\tfrac{1}{2}\omega^2 f(t)\right]$$

Обращаясь к формулам (2.15), видим, что при больших значениях t функцию $f(t)$ можно считать линейной функцией времени, так как

$$f(t) = 2t\int_0^t \boldsymbol{K}_y(\tau)\,d\tau - 2\int_0^t \tau\boldsymbol{K}_y(\tau)\,d\tau \approx 2t\int_0^\infty \boldsymbol{K}_y(\tau)\,d\tau -$$

$$-2\int_0^\infty \tau\boldsymbol{K}_y(\tau)\,d\tau = at - b, \qquad a = 2\pi S_y(0) \qquad (3.3)$$

Здесь $S_y(\omega)$ — спектральная плотность $Y(t)$ и, следовательно, коэффициент a не может быть отрицательным и обращается в нуль только в том случае, если $S_y(0) = 0$, что будет, например, если $Y(t)$ является производной от стационарной случайной функции.

С другой стороны, формулы (2.15) показывают, что

$$\lim\varphi_1(t) = c_1, \qquad \lim\varphi_2(t) = c_2 \quad \text{при } t\to\infty \qquad (3.4)$$

Пусть $a = 0$. Если в этом случае $c_1 = 0$ и $c_2 = 0$, то из (3.1) и (3.2) следует, что при достаточно большом t среднее положение оси маятника начинает прецессировать с постоянной угловой скоростью $\omega(1+y)$, причем амплитуда этого прецессионного движения зависит не только от математических ожиданий начальных условий (первые слагаемые в формулах), но и от корреляционных функций связи между вертикальной и горизонтальными составляющими ускорения точки подвеса (вторые слагаемые). Ось прецессии при этом не будет совпадать с вертикалью, так как, помимо гармонических членов, $\boldsymbol{M}[\alpha(t)]$ и $\boldsymbol{M}[\beta(t)]$ будут содержать слагаемые вида

$$\omega\int_0^t [F(\tau)\varphi_j(\tau) - c_jF(\infty)]\,{\cos \atop \sin}\,[\omega(1+y)\tau]\,d\tau \quad (j = 1,\ 2)$$

которые при большем t можно считать постоянными.

При $a > 0$ прецессия $\boldsymbol{M}[\alpha(t)]$ и $\boldsymbol{M}[\beta(t)]$, зависящая от начальных условий, затухнет со временем, так как соответствующие члены (3.1) и (3.2) содержат множитель $F(t)$, а $\lim f(t) = 0$ при $t \to \infty$. По той же причине затухнет и прецессия, вызванная наличием корреляционной связи между составляющими ускорения.

Затухание прецессионного движения при отсутствии демпфирования вследствие наличия случайной функции $Y(t)$ в левой части (1.4) отличает рассматриваемый случай от движения гироскопического маятника при отсутствии вертикальных случайных перемещений его точки подвеса.

При наличии демпфирования, как ясно из формул (2.17) и (2.19), затухание прецессионного движения будет иметь место и при $S_y(0) \neq 0$, а после затухания прецессионного движения $\boldsymbol{M}[\alpha(t)]$ и $\boldsymbol{M}[\beta(t)]$ будут отличны от нуля.

Рассмотрим общий характер изменения дисперсии углового отклонения оси маятника, причем ограничимся рассмотрением $\boldsymbol{D}[\alpha_1(t)]$ и $\boldsymbol{D}[\beta_1(t)]$, т. е. дисперсий отклонений, не связанных с начальными условиями.

При отсутствии демпфирования формула (2.23) принимает вид

$$\boldsymbol{M}[|\delta_1(t)|^2] = \omega^2 \int_0^t \int_0^t F(\tau_2 - \tau_1) \Big\{ \varphi_1(\tau_1 - \tau_2)\varphi_1(\tau_2 - \tau_1) + \\ + \varphi_2(\tau_1 - \tau_2)\varphi_2(\tau_2 - \tau_1) + \frac{1}{\omega^2}[\boldsymbol{K}_v(\tau_2 - \tau_1) + \boldsymbol{K}_w(\tau_2 - \tau_1)] \Big\} d\tau_1 d\tau_2 \quad (3.5)$$

Под знаком интеграла стоит четная функция разности $\tau = \tau_2 - \tau_1$. Поэтому одно интегрирование можно выполнить

$$\boldsymbol{M}[|\delta_1(t)|^2] = 2\omega^2 \int_0^t (t - \tau) F(\tau) \Big\{ \varphi_1(\tau)\varphi_1(-\tau) + \\ + \varphi_2(\tau)\varphi_2(-\tau) + \frac{1}{\omega^2}[\boldsymbol{K}_v(\tau) + \boldsymbol{K}_w(\tau)] \Big\} d\tau \quad (3.6)$$

При $n = 0$ выражение (2.30) принимает вид

$$\operatorname{Re} \boldsymbol{M}[\delta_1^2(\tau)] = \omega^2 \int_0^t \int_0^t F^3(\tau_1) F^3(\tau_2) F^{-1}(\tau_2 - \tau_1) \Big\{ \Phi_{2,2}(\tau_1, \tau_2) - \Phi_{1,1}(\tau_1, \tau_2) + \\ + \frac{1}{\omega^2}[\boldsymbol{K}_w(\tau_2 - \tau_1) - \boldsymbol{K}_v(\tau_2 - \tau_1)] \Big\} d\tau_1 d\tau_2 \quad (3.7)$$

Если $a = 0$, $c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$, то (3.4) будет расти с ростом времени, а (3.7) не будет содержать членов, растущих при $t \to \infty$. Следовательно, дисперсии $\alpha_1(t)$ и $\beta_1(t)$ будут расти со временем.

Если $a > 0$, то и (3.6) и (3.7) с ростом t стремятся к постоянным и, следовательно, к постоянным будут стремиться и дисперсии угловых отклонений оси гиромаятника.

При наличии демпфирования остаются в силе общие формулы (2.23) и (2.30). Так как в этом случае показатели степени $-\boldsymbol{D}(\tau_1, \tau_2)$ и $-\boldsymbol{D}(\tau_1, \tau_2)$ стремятся к $-\infty$ при росте своих аргументов, а все остальные множители в подынтегральных выражениях или ограничены, или убывают, то при $t \to \infty$ дисперсии $\alpha_1(t)$ и $\beta_1(t)$ стремятся к постоянным независимо от значения a.

4. В качестве примера рассмотрим поведение гиромаятника, установленного на корабле, причем в отличие от [4] будем учитывать и вертикальную составляющую ускорения точки подвеса маятника, а качку корабля будем считать нерегулярной. Пусть маятник расположен в диаметральной плоскости корабля на расстоянии x_c от плоскости мидельшпангоута и имеет превышение (при равновесном положении корабля) над центром тяжести корабля, равное z_c.

Предположим для простоты, что орбитальное движение центра тяжести корабля и рыскание отсутствуют, и будем учитывать только бортовую и килевую качку, характеризуемую углом крена $\theta(t)$ и углом дифферента $\Psi(t)$. В этом случае составляющие ускорения точки подвеса маятника

$$A_\xi = -x_c(\dot{\Psi}^2 + \ddot{\Psi}\Psi) + z_c\ddot{\Psi}, \qquad A_\eta = -z_c\ddot{\Theta}, \qquad A_\zeta = -x_c\ddot{\Psi} - z_c(\dot{\Psi}^2 + \dot{\Theta}^2) \tag{4.1}$$

Углы качки с достаточной точностью можно считать стационарными, не связанными нормальными функциями [3], причем корреляционные функции угловых скоростей $\Omega_1 = \dot{\Theta}$ и $\Omega_1 = \dot{\Psi}$ могут быть представлены в виде

$$K_j(\tau) = \sigma_j^2 e^{-\mu_j|\tau|}\left(\cos\lambda_j\tau + \frac{\mu_j}{\lambda_j}\sin\lambda_j|\tau|\right) \qquad (j = 1, 2) \tag{4.2}$$

где λ_1 и λ_2 близки к собственным частотам бортовой и соответственно килевой качки, а μ_1 и μ_2 зависят от характера волнения и параметров корабля. Примем для расчетов

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0.075\ 1/\textit{сек}, \quad \mu_1 = 0.05\ 1/\textit{сек}, \quad \mu_2 = 0.10\ 1/\textit{сек}, \quad \lambda_1 = 0.75\ 1/\textit{сек}$$
$$\lambda_2 = 1.50\ 1/\textit{сек}, \quad x_c = 28\ \textit{м}, \quad z_c = 14\ \textit{м}, \quad H = 1.708\cdot 10^5\ \textit{гсм сек}, \quad mgl = 1250\ \textit{гсм}$$

Удержим сперва в (4.1) только члены первого порядка малости. В этом случае

$$A_\xi = z_c\ddot{\Psi}, \qquad A_\eta = -z_c\ddot{\Theta}, \qquad A_\zeta = -x_c\ddot{\Psi}, \qquad a_\xi = a_\eta = a_\zeta = 0$$

$$Y(t) = -\frac{x_c}{g}\ddot{\Psi}, \qquad V(t) = kz_c\ddot{\Theta}, \qquad W(t) = kz_c\ddot{\Psi}, \qquad v = w = 0 \tag{4.3}$$

что с учетом (2.15) дает

$$f(t) = \frac{2x_c^2\sigma_2^2}{g^2}\left[1 - e^{-\mu_2|\tau|}\left(\cos\lambda_2\tau + \frac{\mu_2}{\lambda_2}\sin\lambda_2|\tau|\right)\right] \tag{4.4}$$

$$\varphi_1(t) = 0, \qquad \varphi_2(t) = -\frac{kx_cz_c\sigma_2^2(\mu_2^2 + \lambda_2^2)}{g\lambda_2}e^{-\mu_2|t|}\sin\lambda_2|t|$$

Считая начальные условия нулевыми, а демпфирование отсутствующим, в соответствии с (2.17) получим

$$M[\alpha(t)] = -\frac{g^2z_c\varkappa(\mu_2^2 + \lambda_2^2)}{\lambda_2x_c}e^{-\varkappa}\int_0^t \exp\left[-\mu_2\tau + \varkappa e^{-\mu_2\tau}\left(\cos\lambda_2\tau + \frac{\mu_2}{\lambda_2}\sin\lambda_2\tau\right)\right]\times$$
$$\times\sin\lambda_2\tau\cos\omega\tau d\tau \tag{4.5}$$

$$M[\beta(t)] = \frac{g^2z_c\varkappa(\mu_2^2 + \lambda_2^2)}{\lambda_2x_c}e^{-\varkappa}\int_0^t \exp\left[-\mu_2\tau + \varkappa e^{-\mu_2\tau}\left(\cos\lambda_2\tau + \frac{\mu_2}{\lambda_2}\sin\lambda_2\tau\right)\right]\times$$
$$\times\sin\lambda_2\tau\sin\omega\tau d\tau$$

где

$$\varkappa = k^2x_c^2\sigma_2^2$$

Для принятых числовых значений $\varkappa = 1.25\cdot 10^{-6}$. Поэтому показательные функции под знаком интеграла в (4.5) можно разложить в ряд по степеням $\varkappa$ и сохранить только первый член разложения.

Выполнив после этого интегрирование и пренебрегая членами, содержащими множитель $\exp(-\mu_2t)$, и учитывая, что для принятых числовых значений $\omega \ll \lambda_2$, $\omega \ll \mu_2$, получим

$$M[\alpha(t)] \approx -\varkappa\frac{z_c}{x_c} \quad \text{или} \quad M[\alpha(t)] \approx -6.2\cdot 10^{-7} = -0.13''$$

В данном случае, несмотря на то, что $a=0$, регулярная прецессия не возникает, так как $c_1=c_2=0$, вследствие вида зависимости между A_ξ, A_η, A_ζ.

Подставляя (4.4) в (3.6) и пользуясь теми же приближениями, получим

$$\boldsymbol{M}[\,|\gamma(t)|^2] = \boldsymbol{M}[\,|\delta_1(t)|^2] \approx \frac{\varkappa^2 z_c^2(\mu_2^2+\lambda_2^2)}{2\mu_2 x_c^2}\,t + 2\varkappa\frac{z_c^2}{x_c^2}\left(1+\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)$$

Подставляя числовые значения, получим

$$\boldsymbol{M}[\,|\gamma(t)|^2] = 4.4\cdot 10^{-12}\,t + 1.25\cdot 10^{-6}$$

Вычисляя аналогичным образом $\operatorname{Re}\boldsymbol{M}[\delta_1^2(t)]$, можно убедиться, что $\operatorname{Re}\boldsymbol{M}[\delta_1^2(t)] \ll \boldsymbol{M}[\,|\delta_1(t)|^2]$, а так как $\boldsymbol{M}[\beta(t)]=0$, а $\boldsymbol{M}[\alpha(t)]$ мало, то для средних квадратических отклонений углов $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ получим

$$\sigma_\alpha \approx \sigma_\beta \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\boldsymbol{M}[\,|\gamma_1(t)|^2]} = 10^{-3}\sqrt{0.62+2.2\cdot 10^{-6}t}$$

что дает, например, для $t=10$ *м* и $t=24$ *ч* $\sigma_\alpha \approx \sigma_\beta \approx 2.7'$ и $\sigma_\alpha \approx \sigma_\beta \approx 3.1'$.

При наличии демпфирования числовые результаты также просто могут быть получены, если считать n малым и в формулах для математических ожиданий и дисперсий произвести разложения по $\varkappa$ и n.

Если в исходных выражениях (4.1) учесть отброшенные члены второго порядка малости, то функции $Y(t)$, $V(t)$ и $W(t)$ уже не будут нормальными и все формулы, полученные для моментов случайных величин $\alpha(t)$ и $\beta(t)$, нуждаются в уточнении, так как при их выводе использовались характеристические функции нормальных случайных величин. Это уточнение может быть сделано, если воспользоваться выражением для характеристической функции, соответствующей разложению закона распределения в ряд Эджворта [2], учитывающему более высокие моменты случайных величин. В данном примере отступление от нормального закона вызывается членами второго порядка малости и не является значительным. Поэтому, считая все выведенные выше формулы приемлемыми и в данном случае, учтем только изменения значений математических ожиданий и дисперсий $Y(t)$, $V(t)$ и $W(t)$.

Сохраняя нелинейные члены в (4.1), получим

$$y = -\frac{z_c}{g}(\sigma_1^2+\sigma_2^2), \qquad v = w = 0 \qquad \boldsymbol{K}_y(\tau) = -\frac{x_c^2}{g^3}\ddot{\boldsymbol{K}}_2(\tau) + \frac{2z_c^2}{g^2}[\boldsymbol{K}_2^2(\tau)+\boldsymbol{K}_1^2(\tau)]$$

$$\boldsymbol{K}_v(\tau) = -z_c^2\ddot{\boldsymbol{K}}_1(\tau), \qquad \boldsymbol{K}_w(\tau) = -k^2 z_c^2\ddot{\boldsymbol{K}}_2(\tau) + 2kx_c^2\frac{d^4}{d\tau^4}\boldsymbol{K}_\psi^2(\tau)$$

$$f(\tau) = \frac{2x_c^2}{g^2}[\boldsymbol{K}_2(0)-\boldsymbol{K}_2(\tau)] + \frac{4z_c^2}{g^2}\int_0^t (t-\tau)[\boldsymbol{K}_1^2(\tau)+\boldsymbol{K}_2^2(\tau)]\,d\tau$$

$$R_{vy}(\tau) = 0, \qquad R_{wy}(\tau) = \frac{ky_c z_c}{g}\ddot{\boldsymbol{K}}_2(\tau) + \frac{2kx_c z_c}{g}\frac{d}{d\tau}\left[\dot{\boldsymbol{K}}_\psi(\tau)\ddot{\boldsymbol{K}}_\psi\omega\right]$$

Вследствие наличия в выражении для $\boldsymbol{K}_y(\tau)$ второго слагаемого функция $f(t)$ при больших t будет зависеть от времени, однако хотя корреляционные функции связи $R_{vy}(\tau)$ и $R_{wy}(\tau)$ и изменились, но постоянные c_1 и c_2 по-прежнему будут равны нулю. Поэтому общий характер движения маятника останется прежним, но только вследствие того, что $a>0$, затухание прецессионного движения будет идти быстрее, а $D[\,|\gamma(t)|\,]$ будет стремиться к постоянному значению.

Учет в выражениях характеристических функций более высоких моментов ординат функций $Y(t)$, $V(t)$ и $W(t)$, как это было отмечено выше, не связано с принципиальными трудностями, но, естественно, усложняет процесс вычисления.

Поступила 11 XII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов. ГИТТЛ, 1955.
2. Крамер Г. Математические методы статистики. ИИЛ, 1948.
3. Свешников А. А. О теории бортовой качки корабля на нерегулярном волнении. Тр. I Межвузовской конференции по гироскопии, 1956. Изд-во ЛИТМО 1960.
4. Кудревич Б. И. Избр. труды. Изд-во нач. гидр. службы ВМФ, 1959.