# ЗАМЕЧАНИЕ К РАБОТЕ Г. ЛЕЙТМАННА «ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЯХ РАКЕТ»

А. И. Лурье

(Ленинград)

В указанной работе, опубликованной в ПММ, 1961, т. XXV, вып. 6, стр. 978—982, не отмечено важное обстоятельство, лишающее последний раздел («Решение» на стр. 982) предположенного значения.

Автор упустил из виду, что проекция силы тяги на горизонтальную плоскость, в которой движется центр инерции ракеты, сохраняет неизменное направление в этой плоскости, т. е. что угол $\varphi+\gamma$ остается постоянным. Это легко проверить, основываясь на первом и втором уравнениях (7), первом и втором уравнениях (8) и формулах (14). Действительно, цифференцируя первое соотношение (14) и используя второе, имеем

$$V\lambda_V (\lambda_\gamma^2 + V^2\lambda_V^2)^{-1/2}\,\dot\varphi = -\lambda_\gamma V\lambda_V (\lambda_\gamma^2 + V^2\lambda_V^2)^{-3/2} (V\dot\lambda_V + \dot V\lambda_V)$$

или

$$\dot\varphi = -\frac{\lambda_\gamma}{\lambda_\gamma^2 + \lambda_V^2 V^2}\sqrt{\left(\frac{c\beta}{m}\right)^2 - g^2}\left(\frac{\lambda_\gamma}{V}\sin\varphi + \lambda_V\cos\varphi\right).$$

Снова применив (14), получим

$$\dot\varphi = \mp\frac{\lambda_\gamma V^{-1}}{\sqrt{\lambda_\gamma^2 + \lambda_V^2 V^2}}\sqrt{\left(\frac{c\beta}{m}\right)^2 - g^2} = -\frac{\sin\varphi}{V}\sqrt{\left(\frac{c\beta}{m}\right)^2 - g^2} = -\dot\gamma$$

Итак,

$$\dot\varphi + \dot\gamma = 0, \qquad \varphi + \gamma = \text{const} \tag{1}$$

что и требовалось.

Уравнение движения центра инерции ракеты в векторном обозначении имеет вид

$$\dot{\mathbf v} = \sqrt{\frac{c^2\beta_{\max}^2}{(m_i - \beta_{\max} t)^2} - g^2}\,\mathbf e, \qquad \mathbf e\cdot\mathbf e = 1 \tag{2}$$

где $\mathbf e$ — единичный вектор постоянного направления. Из него получаем

$$\mathbf v(t_f) = \mathbf v(t_i) + \mathbf e\int_{t_i}^{t_f}\sqrt{\frac{c^2\beta_{\max}^2}{(m_i - \beta_{\max} t)^2} - g^2}\,dt \tag{3}$$

Отсюда, по заданному начальному $\mathbf v(t_i)$ и конечному $\mathbf v(t_f)$ значениям вектора скорости определяются $\mathbf e$ и минимальное время $t_f - t_i$ (или максимальная конечная масса $m_f$).

Мне представляется неудачной исходная запись дифференциальных уравнений движения в «натуральной» форме (проекциях на касательную и главную нормаль), так как это и затруднило обнаружение свойства (1) искомого оптимального движения. Его сразу же легко заметить, исходя из уравнения движения в форме

$$\dot{\mathbf v} = \sqrt{\left(\frac{c\beta}{m}\right)^2 - g^2}\,\mathbf e, \qquad \mathbf e\cdot\mathbf e = 1$$

и вводя при решении вариационной задачи лагранжев вектор $\boldsymbol\lambda_v$.

Поступила 2 I 1962