

Формула (32) справедлива при $k_2 > k_1$,

Когда пространство заполнено однородной средой, из (32) следует

$$|R| = \exp[-k^2 a^2 / 2], \quad \text{или} \quad |R| = 1 - k^2 a^2 / 2$$

что находится в согласии с [7, 9, 10].

Интересно отметить, что согласно (32) в случае нагретой струи и холодного окружающего газа, когда $c_1 / \gamma_1 > c_2 / \gamma_2$, излучение из открытого конца трубы больше (коэффициент отражения меньше), чем излучение в однородной среде независимо от того, характеризуется ли эта среда параметрами 1 или 2.

Авторы считают своим долгом поблагодарить С. С. Григоряна и Ю. Л. Якимова за обсуждение результатов.

Поступила 25 XII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. К р о к к о Л., Ч ж е н ь С и н ь - и. Теория неустойчивости горения в жидкостных ракетных двигателях. ИИЛ, 1958.
2. Р а у ш е н б а х Б. В. Вибрационное горение. Физматгиз, 1961.
3. Н о в и к о в С. С., Р ы з а н ц е в Ю. С. Об одной модели неустойчивого горения. ДАН СССР, 1961, т. 140, № 2.
4. В а й н ш т е й н Л. А. Об отражении звуковой волны в трубе от открытого конца. ДАН СССР, 1947, т. 58.
5. В а й н ш т е й н Л. А. Теория звуковых колебаний в открытых трубах. ЖТФ, 1949, т. 19, вып. 8.
6. В а й н ш т е й н Л. А. Дифракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода. Изд-во Сов. радио, 1953.
7. L e v i n e Н., S c h w i n g e r I. On the radiation of sound from unflanged circular pipe. Phys. Rev., 1948, vol., 73, № 4.
8. C a r r i e r G. F. Sound transmission from tube with flow Quart. Appl. Math, 1956, vol. 13.
9. Р ж е в к и н С. Н. Курс лекций по теории звука. Изд-во МГУ, 1960.
10. М о р з Ф. Колебания и звук. Гостехтеориздат, 1949.
11. В а т с о н Г. Теория бесселевых функций. ИИЛ, 1949.
12. М о р с Ф. Н., Ф е ш б а х Г. Методы теоретической физики. ИИЛ, 1960.

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДВУМЕРНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

А. Ф. Сидоров (Челябинск)

В работах [1, 2] исследовались нестационарные двумерные течения политропного газа, имеющие в пространстве x_1, x_2, t прямолинейные характеристики (компоненты вектора скорости u_1, u_2 и c — скорость звука постоянны вдоль прямых).

В работе [3] исследовалось определение решений в этом классе течений при наличии ударных волн в предположении, что движение за фронтом волны изэнтропично. Основным свойством ударных волн в указанном классе течений будет постоянство их интенсивности как для изотермического, так и для адиабатического газов. Форма же фронта ударных волн может быть, вообще говоря, произвольной (фон, по которому распространяется ударная волна, предполагается покоящимся политропным газом с постоянными ненулевыми плотностью и давлением).

Предлагаемая заметка является продолжением работы [3]. В ней методы, изложенные в [3], применяются для построения некоторых конкретных решений уравнений двумерной газовой динамики. Отметим здесь, что в работе [3] имеется неточность. Для рассмотренного в [3] примера, когда ударная волна имеет в некоторый момент времени форму эллипса, ошибочно указано, что построенное локальное решение справедливо в области за волной, распространяющейся по постоянному фону. В действительности же построенное решение для гиперболического случая определяет некоторый переменный фон перед ударной волной, двигающейся таким образом, что за ней остается область покоя.

В п. 1 настоящей статьи рассматриваются вопросы нахождения решений в области между криволинейной ударной волной и подпирающим ее криволинейным поршнем, давление вдоль которого постоянно во времени. Получено обобщение известного автомо-

дельного решения Л. И. Седова задачи о расширении с постоянной скоростью цилиндрического поршня в газе [4].

В п. 2 изучаются течения за расходящимися криволинейными нормальными детонационными волнами, причем полученные решения справедливы в некоторой области за детонационной волной, ограниченной с одной стороны линией фронта детонационной волны, а с другой стороны либо линией слабого разрыва (подобно тому, как это имеет место в одномерном автомодельном случае в решении Я. Б. Зельдовича [5]), либо предельной линией, являющейся линией вырождения годографа скоростей. Устойчивость и единственность решений в настоящей заметке не рассматриваются.

Система уравнений, которая описывает рассматриваемый класс течений, имеет вид (эта система уравнений в несколько другой форме получена в работе [3]):

$$\Delta_1 = \left(r + \frac{\gamma-1}{2} \theta \theta' \right) \cos \varphi, \quad \Delta_2 = \left(r + \frac{\gamma-1}{2} \theta \theta' \right) \sin \varphi \quad (0.1)$$

$$r^2 \frac{\partial^2 \Phi^\circ}{\partial r^2} + (1 - \theta'^2) \left(\frac{\partial^2 \Phi^\circ}{\partial \varphi^2} + r \frac{\partial \Phi^\circ}{\partial r} \right) = 0 \quad (0.2)$$

$$(\gamma - 1) \theta (\theta' + r \theta'' - \theta'^3) + r (\gamma - 3) \theta'^2 + 4r = 0 \quad (0.3)$$

$$x_i - \Delta_i t = \alpha_i \quad (i = 1, 2) \quad (0.4)$$

Здесь Φ — потенциал скоростей, γ — показатель адиабаты,

$$\theta = \frac{2}{\gamma-1} c, \quad u_1 = r \cos \varphi, \quad u_2 = r \sin \varphi$$

$$\Phi^\circ = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 - \Phi, \quad \frac{\partial \Phi^\circ}{\partial u_1} = \alpha_1, \quad \frac{\partial \Phi^\circ}{\partial u_2} = \alpha_2$$

Для обыкновенного уравнения (0.3) ставится задача Коши, причем θ_0' и θ_0 на фронте ударной волны определяются из условий Гюго-ио (Жуге) и условия

$$D = \pm \frac{u_1 \Delta_1 + u_2 \Delta_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} = \text{const} \quad (0.5)$$

Здесь D — нормальная скорость фронта ударной волны.

Линию фронта ударной волны будем задавать уравнением

$$\alpha_2 = f(\alpha_1) \quad (0.6)$$

где α_1 и α_2 — параметры, характеризующие размещение прямолинейных характеристик в пространстве $x_1 x_2 t$. Начальные условия для уравнения (0.2) следующие:

$$\frac{\partial \Phi^\circ}{\partial r} = \cos \varphi f'^{-1} (-\text{ctg} \varphi) + \sin \varphi f [f'^{-1} (-\text{ctg} \varphi)] = l(\varphi) \quad \text{при } r = u_{1n} \quad (0.7)$$

$$r \frac{\partial \Phi^\circ}{\partial r} - \Phi^\circ = 0 \quad \text{при } r = u_{1n} \quad (0.8)$$

Здесь u_{1n} — скорость газа на фронте волны, f'^{-1} — функция, обратная к f' . После разделения переменных в (0.2), полагая $\Phi^\circ = \psi(\varphi) \chi(r)$, для ψ и χ получим

$$\psi'' + \lambda \psi = 0, \quad r^2 \chi'' - r(\theta'^2 - 1) \chi' + \lambda(\theta'^2 - 1) \chi = 0 \quad (0.9)$$

Здесь λ — произвольная постоянная. Начальные условия для (0.9) должны выбираться в соответствии с (0.7), (0.8).

Заметим еще, что уравнение (0.3) можно вывести из уравнений цилиндрического автомодельного движения, если имеет место интеграл адиабатичности (см. [4]).

1. Уравнение линии поршня, подпирающего ударную волну, будем брать в виде

$$\alpha_2 = \sigma(\alpha_1) \quad (1.1)$$

Разрешая условия Гюго-ио на фронте ударной волны, заданной уравнением (0.6), получим

$$a = |u_{1n}| = \frac{2(D^2 - \gamma)}{(\gamma + 1)D}, \quad p = \frac{2}{\gamma + 1} D^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad \rho = \frac{(\gamma + 1)D^2}{(\gamma - 1)D^2 + 2\gamma} \quad (1.2)$$

Здесь $|u_{1n}|$ — модуль скорости на фронте волны, а для фона перед волной положено $p = \rho = 1$, $u_1 = u_2 = 0$. Беря в формуле (0.5) знак плюс, для функции θ получим следующие начальные условия:

$$\theta = \frac{2}{\gamma - 1} \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}, \quad \theta' = \frac{2(D - a)}{(\gamma - 1)\theta(a)} \quad \text{при } r = a \quad (1.3)$$

Таким образом, функция $\theta(r)$ однозначно определяется из уравнения (0.3), как только заданы D и γ . Отметим, что уравнение (0.2) в окрестности линии фронта волны эллиптического типа. Действительно, для эллиптичности необходимо выполнение условия $1 - \theta'^2 > 0$. Из (1.2) и (1.3) можно получить

$$\theta'^2 = \frac{(\gamma - 1)D^2 + 2\gamma}{\gamma(2D^2 - \gamma + 1)} \quad (1.4)$$

и $\theta'^2 < 1$ при условии $D^2 > \gamma$, что всегда выполняется, так как $\sqrt{\gamma}$ — скорость звука в невозмущенном газе.

Для того чтобы линия $\alpha_2 = \sigma(\alpha_1)$ изображала линию поршня, необходимо и достаточно выполнение условия

$$D_{\Pi} = u_{\Pi} \quad (1.5)$$

где D_{Π} — нормальная скорость поршня, u_{Π} — проекция вектора скорости на нормаль к линии поршня. Пользуясь (0.6) и (1.1), условие (1.5) можно записать в виде

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial t} - \sigma' \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} = -u_1 \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \sigma' \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \right) - u_2 \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} - \sigma' \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} \right) \quad (1.6)$$

При помощи метода, примененного в работах [1, 2] для анализа основной системы, легко показать, что уравнение (1.6) эквивалентно двум уравнениям:

$$u_2 - \Delta_2 + \sigma'(\Delta_1 - u_1) = 0 \quad (1.7)$$

$$p_{21}(u_1 - \Delta_1) - \sigma' p_{12}(u_2 - \Delta_2) - p_{11}(u_2 - \Delta_2) + \sigma' p_{22}(u_1 - \Delta_1) = 0, \quad p_{ij} = \frac{\partial \Delta_i}{\partial \alpha_j} \quad (1.8)$$

Далее, используя (0.1), получаем, что оба уравнения (1.7) и (1.8) будут удовлетворены, если $u_{\Pi} \neq 0$, лишь при условии

$$\theta'(r) = 0 \quad (1.9)$$

Следовательно, уравнение (0.3) с начальными условиями (1.3) необходимо интегрировать в сторону возрастающих r до такого $r = d$, что θ' обратится в нуль.

Заметим попутно, что можно рассматривать также поршни без скольжения частиц газа вдоль их поверхности. В этом случае, кроме условия (1.9), на Φ° накладывается требование

$$r \frac{\partial \Phi^{\circ}}{\partial r} - \Phi^{\circ} = 0 \quad \text{при } r = d \quad (1.10)$$

Это требование вместе с условиями на фронте ударной волны приводит для определения функции $\chi_{\lambda}(r)$ к следующей краевой задаче:

$$a\chi_{\lambda}'(a) - \chi_{\lambda}(a) = 0, \quad d\chi_{\lambda}'(d) - \chi_{\lambda}(d) = 0 \quad (1.11)$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая поршней со скольжением.

Будем исследовать случай, когда фронт ударной волны имеет форму симметричной относительно обеих осей замкнутой гладкой фигуры. В силу замкнутости и симметричности необходимо в уравнениях (0.9) положить $\lambda = (2m)^2$, $m = 0, 1, 2, \dots$ или $\lambda = 1$ (линии $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ будем считать жесткими стенками).

Далее будем рассматривать класс задач, для которых потенциал скоростей в плоскости годографа имеет вид:

$$\Phi^{\circ} = c_1 \chi_0(r) + c_2 r \psi_1(\varphi) + c_3 \chi_2(r) \cos 2\varphi \quad (1.12)$$

На этом простейшем примере выясним особенности, которые могут возникнуть в изучаемом классе течений с поршнями и ударными волнами.

Член вида $c_2 r \psi_1(\varphi)$ соответствует простому переносу начала координат в плоскости x_1, x_2 и его можно опустить. Из уравнений (0.3) и (0.9) имеем

$$r + \frac{\gamma - 1}{2} \theta \theta' = c \chi_0'(r) \quad (c = \text{const}) \quad (1.13)$$

Но это условие означает, что в Φ° член вида $c_1 \chi_0(r)$ соответствует сдвигу во времени и его также можно опустить. Таким образом, Φ° будем брать в виде

$$\Phi^\circ = b \chi_2(r) \cos 2\varphi \quad (1.14)$$

Форму ударного фронта будем задавать при $t = 1$. Известное решение Л. И. Седова [4] о расширении из точки цилиндрического поршня с постоянной скоростью получается, если положить $b = 0$ и $\Phi^\circ \equiv 0$.

Функция $\chi_2(r)$ после определения $\theta(r)$ ($\lambda = 4$) находится численным интегрированием уравнения (0,9) с начальными условиями

$$\chi_2(a) = a, \quad \chi_2'(a) = 1 \quad (1.15)$$

которые вытекают из условия (0.8). После определения $\chi_2(r)$ и $\theta(r)$ распределение величин в пространстве x_1, x_2, t находится из уравнений, полученных из (0.4):

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(r + \frac{\gamma-1}{2} \theta \theta'\right) t \cos \varphi + b \left(\cos \varphi \cos 2\varphi \chi_2'(r) + 2 \sin \varphi \sin 2\varphi \frac{\chi_2(r)}{r}\right) \\ x_2 &= \left(r + \frac{\gamma-1}{2} \theta \theta'\right) t \sin \varphi + b \left(\sin \varphi \cos 2\varphi \chi_2'(r) - 2 \cos \varphi \sin 2\varphi \frac{\chi_2(r)}{r}\right) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Здесь $r = a$ соответствует линии фронта ударной волны, $r = d$ — линии поршня. Пусть

$$J(r, \varphi, t) = \begin{vmatrix} \partial x_1 / \partial r & \partial x_1 / \partial \varphi \\ \partial x_2 / \partial r & \partial x_2 / \partial \varphi \end{vmatrix} \quad (1.17)$$

Пользуясь (1.16), представим $J(r, \varphi, t)$ в виде

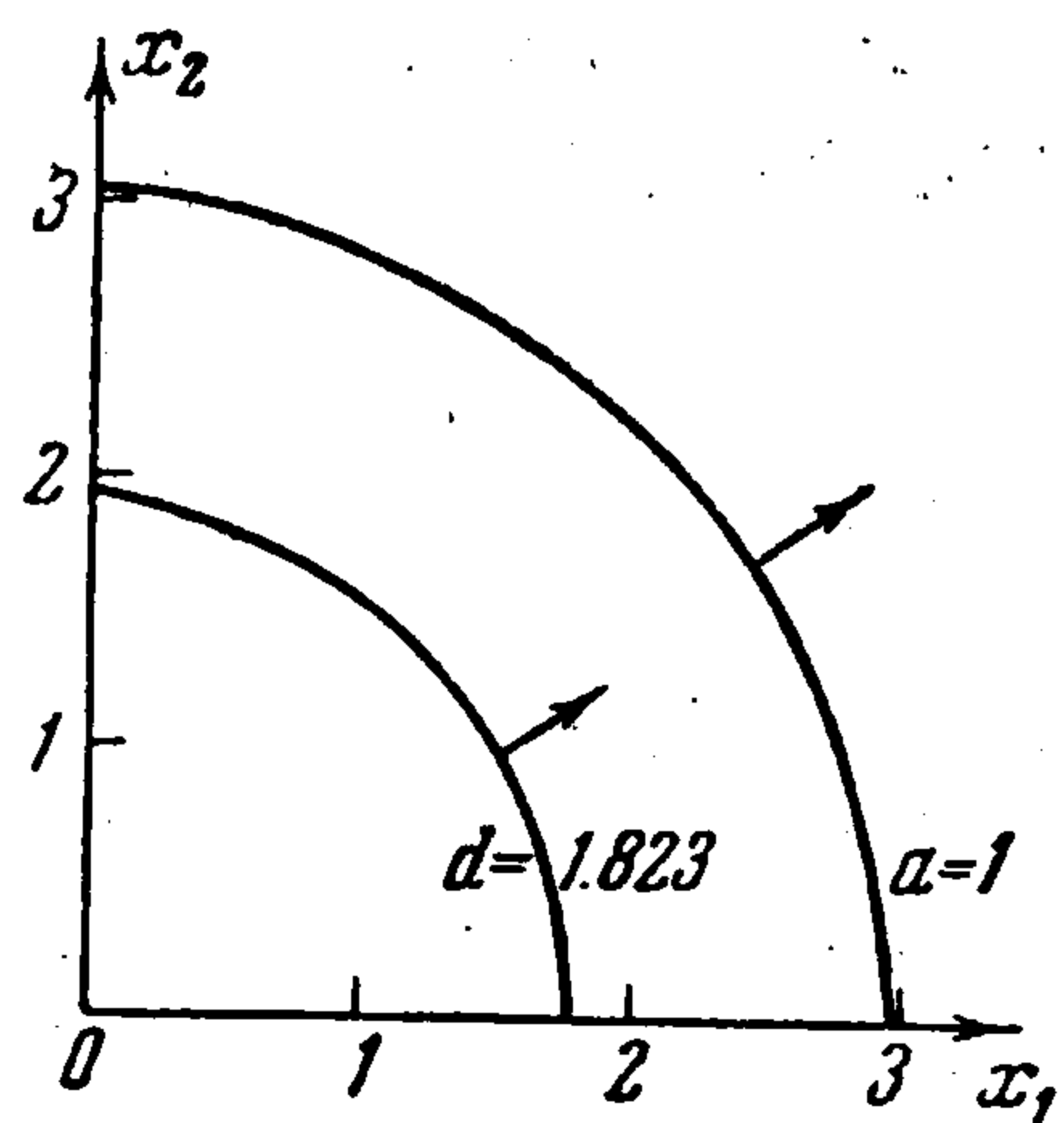
$$J(r, \varphi, t) = \frac{\theta^{12} - 1}{r} \left[t \left(r + \frac{\gamma-1}{2} \theta \theta' \right) - b \cos 2\varphi \left(-\chi_2' + 4 \frac{\chi_2}{r} \right) \right]^2 - b^2 \frac{4}{r} \sin^2 2\varphi \left(\chi_2' - \frac{\chi_2}{r} \right)^2 \quad (1.18)$$

Из (1.18) вытекает, что для достаточно малых (но конечных) b при всех r и φ и $t \geq 1$ якобиан $J(r, \varphi, t)$ не обращается в нуль. Тем самым полностью определено решение в области между фронтом ударной волны и линией поршня, справедливое для $t \geq 1$.

Отметим, что, если рассматривать $t < 1$, гарантировать условие $J(r, \varphi, t) \neq 0$ нельзя. Если в решении Л. И. Седова поршень начинает двигаться из точки и в начальный момент линия поршня и линия фронта ударной волны совпадают, то в данном случае двигать волну и поршень «назад» до совпадения нельзя (для некоторого t обращается в нуль $J(r, \varphi, t)$). Это обстоятельство естественно, так как и в одномерном случае при расширении цилиндрического поршня с некоторого ненулевого радиуса в начальный момент времени возникает движение, вообще говоря, неавтомодельное и только для достаточно больших t оно выходит на автомодельный режим. В данном случае течение, возникающее сразу же после расширения некоторой криволинейной цилиндрической поверхности, давление вдоль которой постоянно, также, вообще говоря, не будет принадлежать к рассматриваемому классу течений с прямолинейными характеристиками и следует ожидать, что только по истечении некоторого времени после начала движения оно выйдет на соответствующий режим.

Отметим, что полученное решение при $t \rightarrow \infty$, переходит в решение Л. И. Седова.

Приведем конкретный пример решения. Положим $D = 3$, $\gamma = 3$, $b = 0.03$. Величина b выбрана малой для того, чтобы в области между поршнем и ударной волной якобиан $J(r, \varphi, t)$ для $t > 1$ не обращался в нуль. Форма волны и поршня в данном случае не сильно отличается от круговой. Именно, при $t = 1$ линии ударной волны принадлежат точки (2.97, 0), (0, 3.025), а линии поршня соответственно точки (1.75, 0), (0, 1.895). На фиг. 1 приведен график положения фронта ударной волны ($a = 1$) и поршня ($d = 1.823$) для $t = 1$.



Фиг. 1

2. В отличие от предыдущих рассмотрений будем сейчас предполагать, что перед фронтом детонационной волны $p = 0$. Из условия Жуге.

$$u_{1n} + c = D \quad (2.1)$$

(детонационную волну предполагаем нормальной) и условий Гюгонио получим, что вдоль линии фронта детонационной волны $\alpha_2 = f(\alpha_1)$ должны выполняться:

$$u_{1n} = \frac{D}{\gamma + 1}, \quad c = \frac{\gamma D}{\gamma + 1} \quad \text{при } \alpha_2 = f(\alpha_1) \quad (2.2)$$

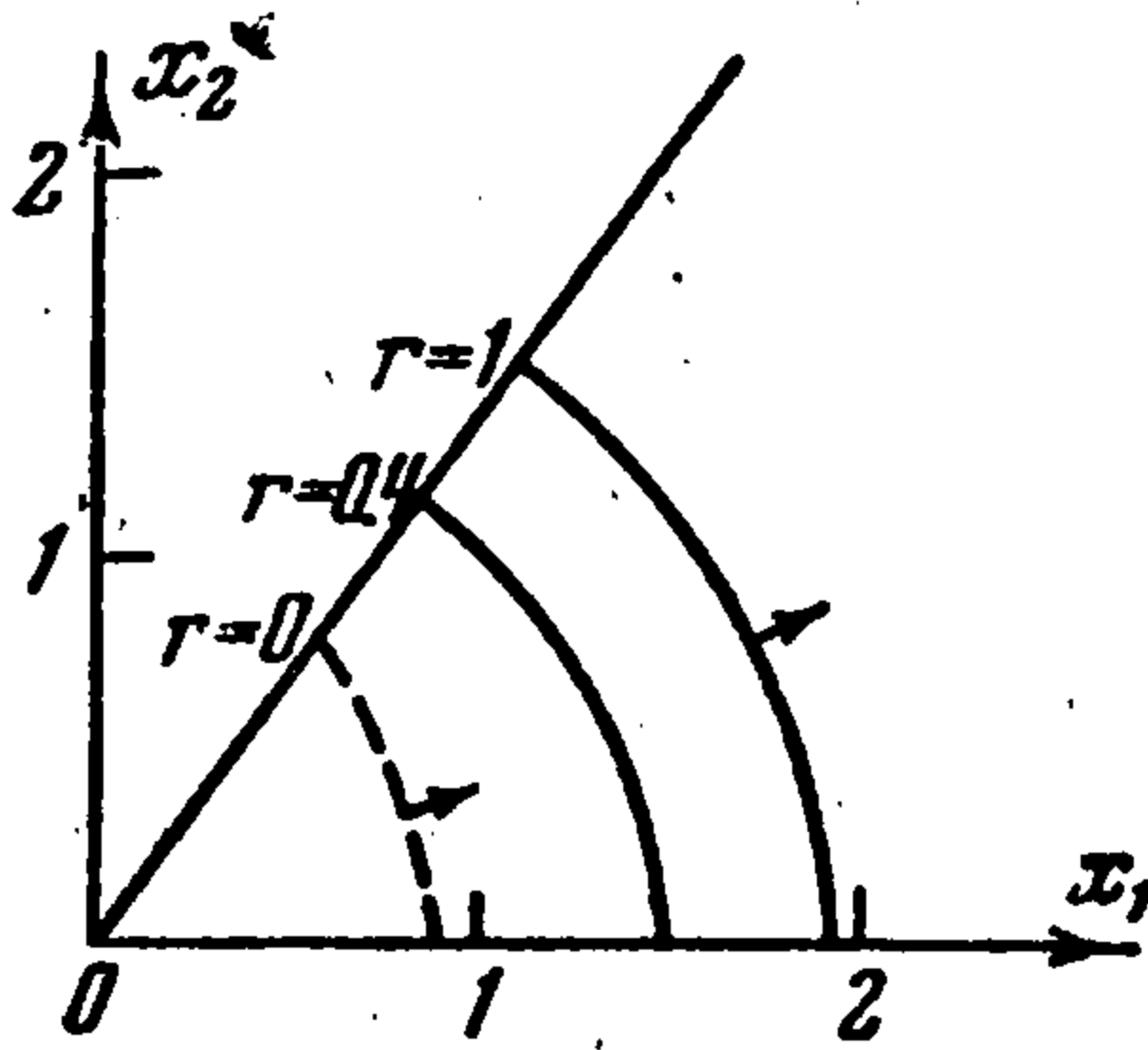
В равенствах (2.1) и (2.2) через u_{1n} обозначена нормальная к волне компонента вектора скорости.

Из уравнения (0.5) вытекают две возможности:

$$(1) \quad D = -\frac{D}{\gamma + 1} - \gamma k, \quad k = -\frac{\gamma + 1}{\gamma(\gamma + 2)} D \quad (2.3)$$

$$(2) \quad D = \frac{D}{\gamma + 1} + \gamma k, \quad k = \frac{D}{\gamma + 1} \quad (2.4)$$

$$(k = r\theta' = \text{const})$$



Фиг. 2

За фронтом нормальной расходящейся детонационной волны в одномерном случае скорость падает до нуля, а давление (скорость звука) до некоторой постоянной величины. Необходимо поэтому рассматривать случай (2.4), так как знак k характеризует убывание или возрастание скорости звука за фронтом волны.

В этом случае имеем

$$1 - \theta'^2 = 1 - \frac{k^2}{u_{1n}^2} = 0 \quad (2.5)$$

т. е. линия фронта детонационной волны является линией параболичности уравнения (0.2). Таким образом, для уравнения (0.3) ставится следующая задача Коши:

$$\theta = \frac{2\gamma D}{\gamma^2 - 1}, \quad \theta' = 1 \quad \text{при } r = \frac{|D|}{\gamma + 1} \quad (2.6)$$

Покажем далее, что в окрестности линии фронта при убывающих r уравнение (0.2) гиперболического типа, т. е. $1 - \theta'^2 < 0$. Действительно, из (0.3) получим

$$\theta'' = -\frac{(\gamma + 1)^2}{2\gamma D} < 0 \quad \text{при } r = u_{1n} \quad (2.7)$$

Численное интегрирование (0.3) для различных γ и D показывает, что тип уравнения (0.2) (гиперболический) не меняется вплоть до линии $r = 0$, которая в одномерном случае является линией слабого разрыва.

Исследуем асимптотическое представление функции $1 - \theta'^2$ в окрестности линии, $r = 0$ (см., например, [7]). Предполагая, что $\theta' \neq 0$ при $r \sim 0$, из (0.3) будем иметь

$$r\theta'' - \theta' - \theta'^3 \sim 0 \quad (2.8)$$

Интегрируя, получим

$$\theta'^2 - 1 \sim B\sqrt{r} \quad (B = \text{const} > 0) \quad (2.9)$$

Таким образом, первая производная θ' непрерывна при переходе через линию $r = 0$, а все высшие производные обращаются в бесконечность. Линия $r = 0$, поскольку на ней $\theta'^2 - 1 = 0$, также является линией параболичности для уравнения (0.2). В некоторых случаях она может являться линией слабого разрыва, за которым газ покоится и имеет постоянные плотность и давление, аналогично одномерной задаче, рассмотренной Я. Б. Зельдовичем. Одномерное решение (цилиндрический случай) получится, если положить $\Phi^0 \equiv 0$,

Условиями (0.7), (0.8) потенциал Φ^0 , вообще говоря, определяется неоднозначно и необходимо для выделения нужного решения ставить дополнительные условия. Покажем, что при $\lambda \neq 0$ и $\lambda \neq 1$ решения уравнения (0.9) имеют особенность при $r = 0$ и $\chi'_\lambda(r)$ не ограничены, так что для получения решений со слабым разрывом,двигающимся за детонационной волной, необходимо, вообще говоря, для функции χ_λ ставить краевую задачу, требуя ограниченность в нуле $\chi'_\lambda(r)$.

Пользуясь (2.9), из (0.9) для χ_λ при $r \sim 0$ получим уравнение

$$r^{3/2}\chi''_\lambda - Br\chi'_\lambda + \lambda B\chi_\lambda = 0 \quad (2.10)$$

Введем функцию M по формуле $\chi_\lambda = r^\lambda M$. Из (2.10) для M получим уравнение

$$r^2M'' + (2\lambda r - Br^{3/2})M' + \lambda(\lambda - 1)M = 0 \quad (2.11)$$

Для $r \sim 0$ вместо (2.11) можно рассматривать уравнение

$$r^2M'' + 2\lambda rM' + \lambda(\lambda - 1)M = 0 \quad (2.12)$$

Уравнение (2.12) является уравнением Эйлера. Разыскивая решение в виде $M = r^m$, для m получим две возможности: $m_1 = -\lambda$, $m_2 = -\lambda + 1$.

Таким образом, два линейно независимых решения уравнения (2.10) вблизи нуля будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \chi^{(1)} &= A^{(1)}r + O(r), & A^{(1)} &= \text{const} \neq 0 \\ \chi^{(2)} &= A^{(2)} + O(1), & A^{(2)} &= \text{const} \neq 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Но если $\chi_\lambda(0) \neq 0$, то из (2.10) вытекает неограниченность χ'_λ в нуле.

Итак, для получения решений, справедливых в области между детонационной волной и слабым разрывом, который отделяет область возмущенного движения от покоящегося газа, необходимо для функций χ_λ , входящих в выражение для потенциала скоростей в плоскости годографа

$$\Phi^0 = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \psi_{\lambda}(\varphi) \chi_{\lambda}(r) \quad (a_{\lambda} = \text{const}) \quad (2.14)$$

ставить следующую граничную задачу:

$$\chi_{\lambda}(0) = 0, \quad a\chi'_{\lambda}(a) - \chi_{\lambda}(a) = 0 \quad (2.15)$$

Приводя уравнение (0.9) для χ_λ к самосопряженному виду, получим

$$(p(r)\chi'_{\lambda})' + \lambda q(r)\chi_{\lambda} = 0 \quad (2.16)$$

Здесь

$$p(r) = \exp\left(-\int_a^r \frac{\theta'^2 - 1}{r} dr\right) > 0, \quad q(r) = \frac{\theta'^2 - 1}{r} \exp\left(-\int_a^r \frac{\theta'^2 - 1}{r} dr\right) \geq 0 \quad (2.17)$$

Функция $p(r)$ непрерывна в $[0, a]$, а $q(r)$ имеет особенность лишь при $r = 0$ и $q(a) = 0$. Применяя рассуждения гл. VI работы [6] (для уравнений с особыми точками), можно вывести обычные свойства систем собственных чисел и собственных функций краевой задачи (2.15).

Далее, при построении конкретного решения для Φ^0 аналогично п. 1 возьмем

$$\Phi^0 = b\chi_{\lambda}(r) \cos \sqrt{\lambda}\varphi \quad (2.18)$$

Здесь $\lambda \neq 1$ — первое собственное значение граничной задачи (2.15) для уравнения (0.9). Зная $\theta(r)$ и $\chi_{\lambda}(r)$, течение в пространстве $x_1 x_2 t$ можно найти из уравнений

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(r + \frac{\gamma - 1}{2} \theta\theta'\right) t \cos \varphi + b \left(\cos \varphi \cos \sqrt{\lambda} \varphi \chi'_{\lambda}(r) + \sqrt{\lambda} \sin \varphi \sin \sqrt{\lambda} \varphi \frac{\chi_{\lambda}(r)}{r}\right) \\ x_2 &= \left(r + \frac{\gamma - 1}{2} \theta\theta'\right) t \sin \varphi + b \left(\sin \varphi \cos \sqrt{\lambda} \varphi \chi'_{\lambda}(r) - \sqrt{\lambda} \cos \varphi \sin \sqrt{\lambda} \varphi \frac{\chi_{\lambda}(r)}{r}\right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Уравнения (2.19) дают уравнения движения фронта детонации при $r = a$, $r + \theta\theta'(\gamma - 1)/2 = D$; значение $r = 0$ соответствует линии слабого разрыва. Начальное положение фронта детонации задаем при $t = 1$. В данном случае также нельзя утверждать, что линии слабого разрыва и детонационной волны совпадали в некоторый момент времени $t < 1$. Аналогично сказанному в п. 1, следует ожидать, что после иницирования детонационной волны вдоль некоторой криволинейной цилиндрической поверхности течение в начальный момент времени не будет принадлежать к рассматриваемому классу движений с прямолинейными образующими, а лишь через некоторое время выйдет на соответствующий режим.

Если для функции χ_λ не ставить предельной задачи, требуя ограниченность χ'_λ в нуле, то можно, решая уравнения (0.9) для χ_λ задачу Коши $\chi'_\lambda(a) = 1$, $\chi_\lambda(a) = a$

при произвольных λ , получать различные течения за детонационной волной, справедливые до некоторой предельной линии, вдоль которой вырождается годограф скоростей. Эти решения, по-видимому, можно использовать после численного интегрирования некоторых задач, сочленив их вдоль предельной линии с построенными решениями.

Исследуем далее поведение $j_\lambda(r, \varphi, t)$ в области между детонационной волной и линией слабого разрыва. Из (1.18) имеем для произвольного λ

$$J_\lambda(a, \varphi, t) = 0 \quad (2.20)$$

Покажем, что за фронтом волны $J_\lambda > 0$. Действительно, при $r = a$ получим

$$\frac{\partial J_\lambda}{\partial r} = -\frac{1}{D} \frac{(\gamma + 1)^2}{a\gamma} (Dt - b(\lambda - 1) \cos \sqrt{\lambda} \varphi)^2 < 0 \quad (2.21)$$

Пользуясь для $r \sim 0$ соотношениями

$$\chi''_\lambda \sim Br^{-1/2}, \quad \chi'_\lambda - \frac{\chi_\lambda}{r} \sim Nr^{1/2}, \quad -\chi'_\lambda + \lambda \frac{\chi_\lambda}{r} \sim K \quad (B, N, K = \text{const}) \quad (2.22)$$

для достаточно малых (но конечных) B можно показать, что $J_\lambda(r, \varphi, t) > 0$ для $r \in [0, a], t \geq 1$ и произвольных φ . Далее можно показать, что полученные решения можно рассматривать и в интервале времени $0 < t_0 < t < 1$, где в момент t_0 происходит пересечение нормалей к линии слабого разрыва и образуется излом.

Отметим также, что из (2.19) для $r = 0$ следует, что линия слабого разрыва движется с постоянной нормальной скоростью, равной $\frac{1}{2}(\gamma - 1)\theta(0)$, т. е. с местной скоростью звука. Приведем в заключение численный пример.

Положим, $p = Ar^3$ — наиболее часто встречающееся в теории детонации уравнение состояния, $D = 4$ и $p = 0$ перед фронтом детонации.

Определяя первое собственное число методом Галеркина, находим $\lambda = 10.66$. Функцию $\theta(r)$ находим численным интегрированием (0.3) с начальными условиями

$$\theta = 3, \quad \theta' = 1 \quad \text{при } r = 1 \quad (2.23)$$

В данном случае, как показывает счет, $\theta' > 1$ в интервале (0.1).

Потенциал скоростей Φ° берем в виде

$$\Phi^\circ = 0.01 \chi_\lambda(r) \cos 3.26 \varphi \quad (2.24)$$

(при $b = 0.01$ условие $j_\lambda(r, \varphi, 2.14) > 0$ выполняется для всех φ и $r \in (0.1)$). Линии

$$x_2 = 0, \quad x_2 = \text{tg} \frac{\pi}{2 \cdot 3.26} x_1$$

считаем жесткими стенками. На фиг. 2 показано положение детонационной волны ($r = 1$) линии слабого разрыва ($r = 0$) и линии $r = 0.4$ в момент времени $t = 2.14$.

Так же как и в п. 1, форма детонационной волны и слабого разрыва для построенного примера незначительно отличается от круговой. Расстояния крайних точек детонационной волны и слабого разрыва до начала координат соответственно равны 1.895 (на линии $x_2 = 0$) и 1.845 для детонационной волны и 0.846 (на линии $x_2 = 0$) и 0.905 для точек слабого разрыва.

Поступила 14 X 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Сидоров А. Ф., Яненко Н. Н. К вопросу о нестационарных плоских течениях политропного газа с прямолинейными характеристиками. ДАН СССР, 1958, т. 123, № 5.
2. Сидоров А. Ф., Яненко Н. Н. Неустановившиеся плоские течения политропного газа с прямолинейными образующими. Изв. вузов, Математика, 1959, № 1 (8).
3. Сидоров А. Ф. К вопросу об ударных волнах в течениях политропного газа, имеющих прямолинейные характеристики. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 2.
4. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. ГИТТЛ, 1957.
5. Зельдович Я. Б., Компанеев А. С. Теория детонации. ГИТТЛ, 1955.
6. Гильберт Д., Курант Р. Методы математической физики. Гостехиздат. М.—Л., 1951, т. II, изд. 2.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат. 1954, изд. 2.