

ОБ ОТРАЖЕНИИ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ ОТ ОТКРЫТОГО КОНЦА КРУГЛОЙ ТРУБЫ

С. С. Новиков, Ю. С. Рязанцев

(Москва)

Знание коэффициента отражения звуковой волны от открытого конца круглой трубы существенно для изучения вибрационного горения [1-3]. В строгой постановке задача о дифракции звуковых волн на открытом конце круглой трубы с жесткими стенками без фланца решена в работах [4-7]. При этом принималось, что среда вне и внутри трубы однородна и неподвижна. В задачах, связанных с горением, газ движется; среду вне трубы нельзя считать однородной, так как вытекающие из трубы продукты горения могут по своим свойствам значительно отличаться от окружающего трубу газа. При этом можно выделить случаи, когда скорость потока мала и не оказывает влияния на излучение звука из трубы, тогда как различие термодинамических параметров газа в струе и окружающем пространстве существенно влияет на величину коэффициента отражения. Попытка учета неоднородности среды была предпринята в работе [8]. Однако допущенная в ней ошибка в записи граничных условий заставляет вновь рассмотреть эту задачу. Ниже выводится формула для коэффициента отражения плоской звуковой волны от открытого конца круглой полубесконечной трубы с абсолютно жесткими стенками с учетом контактного разрыва на границе струя — окружающая среда.

Круглая с абсолютно жесткими, бесконечно тонкими стенками полубесконечная, без фланца труба радиуса a (фиг. 1), ось которой совпадает с осью z цилиндрической системы координат r, z , расположена в области $z < 0$. Предполагается наличие аксиальной симметрии.

Рассматриваются установившиеся колебания, зависимость параметров звукового поля от времени описывается функцией вида $\exp(-i\omega t)$.

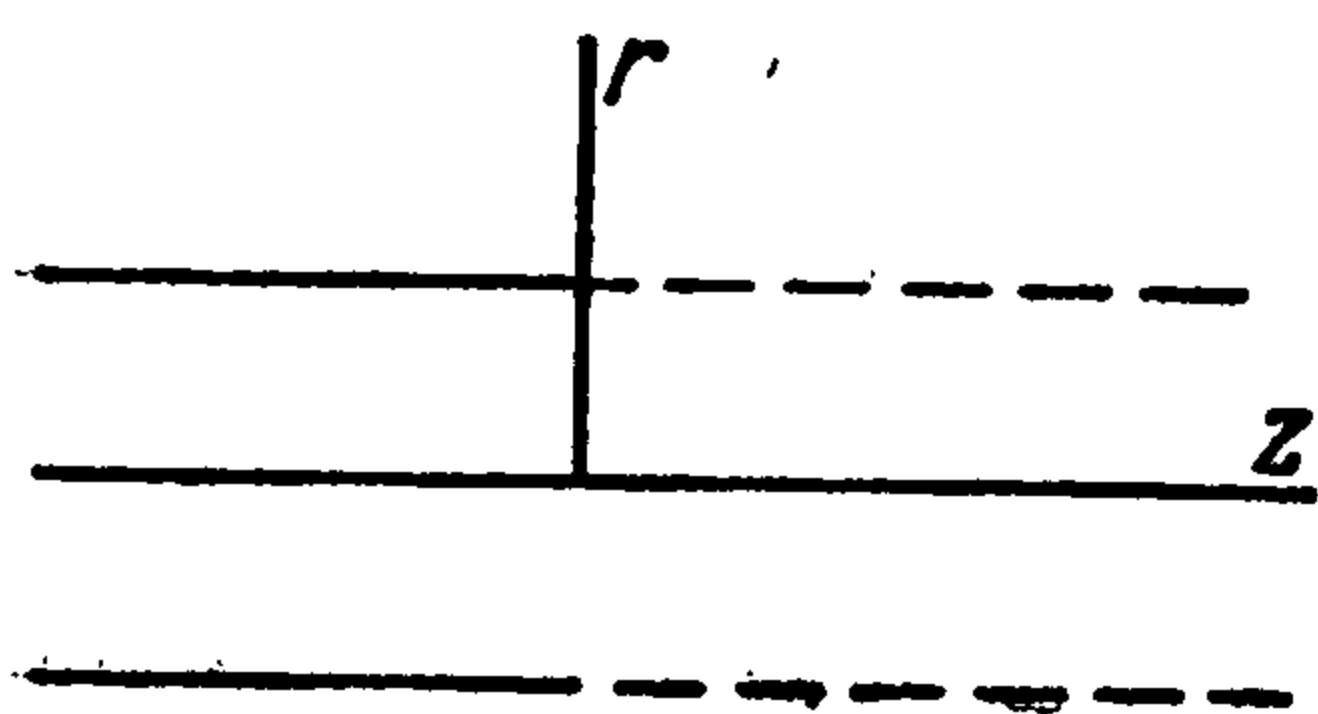
Считая газ вне и внутри трубы неподвижным, запишем уравнения акустического поля в виде

$$\Delta\psi_j + k_j^2\psi_j = 0 \quad (j = 1, 2; k_j^2 = \frac{\omega^2}{c_j^2}; \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \quad (1)$$

Здесь c_j — скорость звука. Индексы 1 и 2 относятся к параметрам среды в областях $r < a$, $r > a$, соответственно. Потенциал скорости ψ_j связан со звуковым давлением и скоростью соотношениями

$$p_j = i\omega\rho_{0j}\psi_j, \quad v_j = \nabla\psi_j \quad (\rho_{0j} \text{ — плотность среды}) \quad (2)$$

Потенциал ψ_j должен удовлетворять следующим граничным условиям:



Фиг. 1

$$\frac{\partial\psi_j}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = a, z < 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial r} = \frac{\partial\psi_2}{\partial r} \quad \text{при } r = a, z > 0 \quad (4)$$

$$\rho_{01}\psi_1 = \rho_{02}\psi_2 \quad \text{при } r = a, z > 0 \quad (5)$$

Слева на устье трубы падает плоская звуковая волна с амплитудой A . Вне трубы возникает расходящаяся волна, а внутри отраженная плоская волна с амплитудой B . Отношение $R = B/A$ является искомым коэффициентом отражения плоской волны от устья трубы. Будем считать, что $k_1a < 3.832$, тогда единственной распространяющейся модой в трубе является плоская [9, 10]. Следовательно,

$$\psi_1 \sim Ae^{ik_1z} + Be^{-ik_1z} \quad \text{при } z \rightarrow -\infty \quad (6)$$

Для ψ_2 при достаточно больших расстояниях от устья трубы можно записать

$$\psi_2 \sim f(\theta) \frac{e^{ik_2R}}{R} \quad \text{при } R = \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty \quad (7)$$

Здесь θ — угол между нормалью к фронту волны в данной точке и осью z .

Введем в рассмотрение следующие функции:

$$h(z) = \frac{1}{\rho_{01}} [\rho_{02}\psi_2(a, z) - \rho_{01}\psi_1(a, z)], \quad w(z) = \frac{\partial\psi_1}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{\partial\psi_2}{\partial z} \Big|_{r=a} \quad (8)$$

Согласно (3) и (5)

$$h(z) \neq 0, \quad w(z) = 0 \quad \text{при } z < 0; \quad h(z) = 0, \quad w(z) \neq 0 \quad \text{при } z > 0 \quad (9)$$

Проводя преобразование Фурье и обозначая трансформанты заглавными буквами, получим

$$\Psi_j(\zeta, r) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_j(z, r) e^{-i\zeta z} dz \quad (10)$$

Вместо (1) теперь имеем

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Psi_j}{dr} \right) + (k_j^2 - \zeta^2) \Psi_j = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (11)$$

Решениями уравнений (11), удовлетворяющими условию излучения на бесконечности и требованию ограниченности на оси z , являются

$$\Psi_1(\zeta, r) = C(\zeta) J_0(r \sqrt{k_1^2 - \zeta^2}), \quad \Psi_2(\zeta, r) = D(\zeta) H_0^{(1)}(r \sqrt{k_2^2 - \zeta^2}) \quad (12)$$

Здесь J_n — функция Бесселя порядка n действительного аргумента, $H_n^{(1)}$ — функция Ханкеля порядка n первого рода; $C(\zeta)$, $D(\zeta)$ — произвольные функции.

Из (8) и (12) следует

$$H(\zeta) = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} D(\zeta) H_0^{(1)}(a \sqrt{k_2^2 - \zeta^2}) - C(\zeta) J_0(a \sqrt{k_1^2 - \zeta^2}) \quad (13)$$

$$W(\zeta) = -\sqrt{k_1^2 - \zeta^2} C(\zeta) J_1(a \sqrt{k_1^2 - \zeta^2}) = -\sqrt{k_2^2 - \zeta^2} D(\zeta) H_1^{(1)}(a \sqrt{k_2^2 - \zeta^2}) \quad (14)$$

Исключая из (13), (14) произвольные функции $C(\zeta)$ и $D(\zeta)$, получим

$$z_1^2 L(\zeta) H(\zeta) = \frac{2}{a} W(\zeta) \quad (15)$$

$$L(\zeta) = \frac{2\rho_{01} J_1(az_1) H_1^{(1)}(az_2) z_2 / z_1}{\rho_{01} a z_2 J_0(az_1) H_1^{(1)}(az_2) - \rho_{02} a z_1 J_1(az_1) H_0^{(1)}(az_2)} \quad (z_j = \sqrt{k_j^2 - \zeta^2}) \quad (16)$$

Отметим, что в предельном случае $k_1 = k_2$, $\rho_{01} = \rho_{02}$ уравнение (15) переходит в уравнение (V.2) работы [7].

Дальнейшее рассмотрение удобнее вести, если считать, что постоянные k_j являются комплексными числами и имеют малые мнимые части $\text{Im } k_j > 0$.

Покажем, что

$$R = \frac{\text{res}_{\zeta=-k_1} H(\zeta)}{\text{res}_{\zeta=k_1} H(\zeta)} \quad (17)$$

Из асимптотики функции ψ_1 при $z \rightarrow \infty$ следует, что

$$H(\zeta) = -\frac{iA}{\zeta - k_1} - \frac{iB}{\zeta + k_1} + \Phi(\zeta) \quad (18)$$

Здесь $\Phi(\zeta)$ функция регулярная в области $\text{Im } \zeta \geq -\text{Im } k_1$, следовательно, справедлива формула (17). Таким образом задача сводится к нахождению функции $H(\zeta)$ из уравнения (15). Исследуем его. Уравнение (15) имеет смысл лишь в том случае, если его левая и правая части в плоскости комплексного переменного ζ имеют общую область аналитичности. Исследование свойств функций $H(\zeta)$ и $W(\zeta)$ не отличается от проведенного в работе [7]. Из (18) видно, что функция $z_1^2 H(\zeta)$ аналитична в полуплоскости $\text{Im } \zeta > -\text{Im } k_1$. Поскольку асимптотика функции $w(z)$ при $z \rightarrow \infty$ должна включать множитель вида $\exp(-ik_j z)$, можно утверждать, что функция $W(\zeta)$ аналитична в области $\text{Im } \zeta < \text{Im } k_j$, областью аналитичности функции $L(\zeta)$, явный вид которой дается формулой (16), является полоса $|\text{Im } \zeta| < \text{Min}(\text{Im } k_j)$, так как точки $\zeta = \pm k_j$, в которых имеются особенности, лежат вне указанной полосы.

Для дальнейшего существенно также отметить, что функция $L(\zeta)$ не обращается в нуль в этой полосе. Действительно, согласно сделанному ранее предположению единственной распространяющейся в трубе модой является плоская волна. Это означает, что точки $\zeta = \pm i(\alpha_{1n}^2 - k_1^2)^{1/2}$, где $J_1(\alpha_{1n}a) = 0$, имеют конечную мнимую часть и, следовательно, лежат вне полосы регулярности функции $L(\zeta)$.

Функция $H_1^{(1)}(az_2)$ не имеет нулей в области $-\pi/2 \leq \arg z_2 \leq 3\pi/2$ [11]. Выбирая одну ветвь функции $z_2(\zeta)$, получим, что аргумент этой функции в рассматриваемой полосе изменяется в пределах $|\arg z_2| \leq \pi/2$. Следовательно, функция $H_1^{(1)}(az_2)$ не имеет нулей, лежащих в этой полосе.

Рассмотренные свойства уравнения (15) позволяют найти его решение с помощью техники Винера — Хопфа [12]. Пользуясь тем, что функцию аналитическую

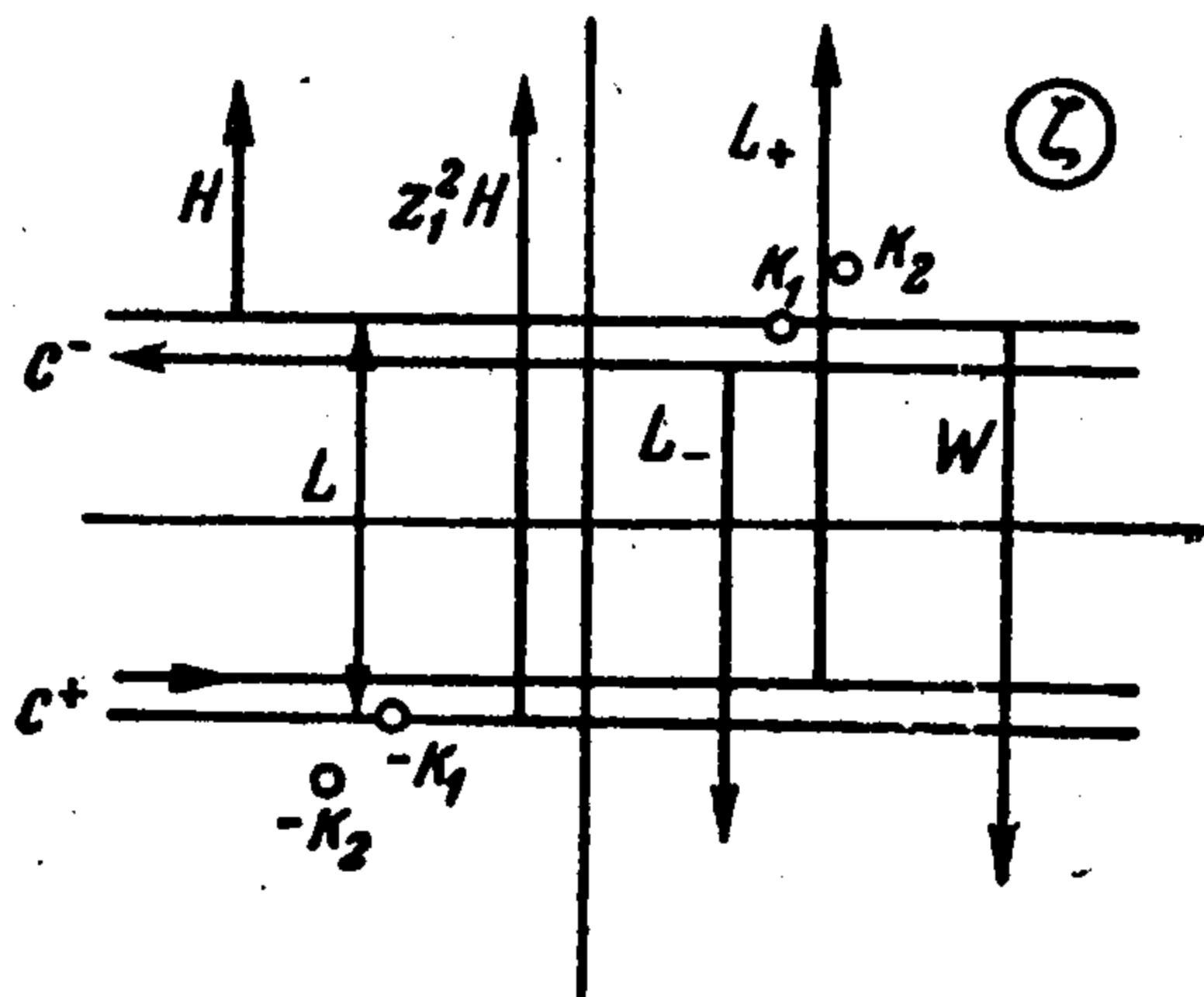
в полосе можно представить в виде суммы двух функций, из которых одна аналитична в верхней полуплоскости от нижнего края полосы, другая — в нижней полуплоскости от верхнего края полосы, представляем функцию $L(\zeta)$ в виде

$$L(\zeta) = \frac{L_+(\zeta)}{L_-(\zeta)} \quad (19)$$

где

$$L_+(\zeta) = \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{\ln L(t) dt}{t - \zeta} \right]$$

$$L_-(\zeta) = \exp \left[-\frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} \frac{\ln L(t) dt}{t - \zeta} \right] \quad (20)$$



Фиг. 2

Контуры интегрирования C^+ , C^- , а также области регулярности всех рассматриваемых функций показаны на фиг. 2. В конечном результате следует считать $\text{Im } k_j = 0$. При $\text{Im } k_j \rightarrow 0$ контуры C^+ , C^- совпадают с действительной осью за исключением особых точек подынтегрального выражения, правило обхода которых ясно из фиг. 2.

Используя (19), можно записать уравнение (15) так:

$$z_1^2 L_+(\zeta) H(\zeta) = \frac{2}{a} L_-(\zeta) W(\zeta) \quad (21)$$

При этом левая часть уравнения (21) регулярна в полуплоскости $\text{Im } \zeta > \text{Max}(-\text{Im } k_j)$, а правая регулярна в области $\text{Im } \zeta < \text{Min}(\text{Im } k_j)$. Поэтому уравнение (21) определяет в плоскости ζ целую функцию.

Оценка асимптотического поведения функций $H(\zeta)$ и $W(\zeta)$ при больших ζ проводится так же, как в [7], исходя из физических соображений о поведении потенциала скорости и его производной при $z \rightarrow 0^\pm$. Можно получить

$$H(\zeta) \sim (-i\zeta)^{-\alpha-1}, \quad \alpha > 0 \quad \text{при } |\zeta| \rightarrow \infty, \text{Im } \zeta > 0 \quad (22)$$

$$W(\zeta) \sim (i\zeta)^{\beta-1}, \quad \beta < 1 \quad \text{при } |\zeta| \rightarrow \infty, \text{Im } \zeta < 0 \quad (23)$$

Оценку асимптотического поведения $L_+(\zeta)$ при больших ζ можно выполнить, используя асимптотику цилиндрических функций при больших значениях аргумента и представив $L_+(\zeta)$ в виде

$$L_+(\zeta) = \exp \left[\frac{\zeta}{\pi i} \int_0^\infty \frac{\ln L(t) dt}{t^2 - \zeta^2} \right] \quad (24)$$

Разбивая путь интегрирования на участки $(0, k_2)$, (k_2, ∞) и воспользовавшись равномерной сходимостью интегралов, можно показать, что

$$L_+(\zeta) \sim (-i\zeta)^{-1/2} \quad \text{при } |\zeta| \rightarrow \infty, \text{Im } \zeta > 0 \quad (25)$$

Аналогично

$$L_-(\zeta) \sim (i\zeta)^{1/2} \quad \text{при } |\zeta| \rightarrow \infty, \text{Im } \zeta < 0 \quad (26)$$

Подставляя асимптотические оценки (22), (23), (25), (26) в уравнение (21), по теореме Лиувилля находим, что обе части (21) равны постоянной. Следовательно,

$$H(\zeta) = \frac{\text{const}}{(k_1^2 - \zeta^2) L_+(\zeta)} \quad (27)$$

Из (24) следует, что

$$L_+(-k_1) = \frac{1}{L_+(k_1)} \quad (28)$$

При помощи (17), (27) и (28) находим, что

$$R = |R| e^{2i\delta} = -[L_+(k_1)]^2 \quad (29)$$

Используя явный вид функции $L_+(k_1)$, получим выражение для модуля и фазы коэффициента отражения

$$|R| = \exp \left\{ \frac{2k_1}{\pi} \int_0^{k_2} \arctg \left[-\frac{J_1(az_2)}{N_1(az_2)} \right] dt - \right. \\ \left. - \frac{2k_1}{\pi} \int_0^{k_1} \arctg \left[-\frac{z_2 J_0(az_1) J_1(az_2) - \rho_{21} z_1 J_1(az_1) J_0(az_2)}{z_2 J_0(az_1) N_1(az_2) - \rho_{21} z_1 J_1(az_1) N_0(az_2)} \right] \frac{dt}{t^2 - k_1^2} - \right. \\ \left. - \frac{2k_1}{\pi} \int_{k_1}^{k_2} \arctg \left[-\frac{z_2 I_0(az_1^*) J_1(az_2) + \rho_{21} z_1^* I_1(az_1^*) J_0(az_2)}{z_2 I_0(az_1^*) N_1(az_2) + \rho_{21} z_1^* I_1(az_1^*) N_0(az_2)} \right] \frac{dt}{t^2 - k_1^2} \right\} \quad (30)$$

$$2\delta = \frac{2k_1}{\pi} \sum_{i=1}^5 F_i + \pi \quad (31)$$

Здесь

$$\rho_{21} = \rho_{02} / \rho_{01}, \quad z_j^* = \sqrt{t^2 - k_j^2}$$

$$F_1 = - \int_0^{k_1} \ln \left[\frac{z_2}{z_1} J_1(az_1) \sqrt{J_1^2(az_2) + N_1^2(az_2)} \right] \frac{dt}{t^2 - k_1^2}$$

$$F_2 = - \int_{k_1}^{k_2} \ln \left[\frac{z_2}{z_1^*} I_1(az_1^*) \sqrt{J_1^2(az_2) + N_1^2(az_2)} \right] \frac{dt}{t^2 - k_1^2}$$

$$F_3 = \int_0^{k_2} \ln \{ [z_2 a J_0(az_1) J_1(az_2) - \rho_{21} z_1 a J_1(az_1) J_0(az_2)]^2 + \\ + [az_2 J_0(az_1) N_1(az_2) - \rho_{21} az_1 J_1(az_1) N_0(az_2)]^2 \}^{1/2} \frac{dt}{t^2 - k_1^2}$$

$$F_4 = \int_{k_1}^{k_2} \ln \{ [az_2 I_0(az_1^*) J_1(az_2) + \rho_{21} az_1^* I_1(az_1^*) J_0(az_2)]^2 + \\ + [az_2 I_0(az_1^*) N_1(az_2) + \rho_{21} az_1^* I_1(az_1^*) N_0(az_2)]^2 \}^{1/2} \frac{dt}{t^2 - k_1^2}$$

$$F_5 = - \int_{k_2}^{\infty} \ln \left\{ \frac{I_1(az_1^*) K_1(az_2^*) z_2^* / z_1^*}{az_2^* I_0(az_1^*) K_1(az_2^*) + \rho_{21} az_1^* I_1(az_1^*) K_0(az_2^*)} \right\} \frac{dt}{t^2 - k_1^2}$$

J_n — функция Бесселя порядка n действительного аргумента, N_n — функция Неймана порядка n , I_n — функция Бесселя порядка n мнимого аргумента, K_n — функция Макдональда порядка n .

Формулы (30), (31) справедливы, когда $k_2 > k_1$. Нетрудно получить соответствующие выражения и когда $k_2 < k_1$.

В случае, если частота колебаний ω и радиус трубы a таковы, что $k_j a \ll 1$, в формуле (30) можно использовать представления цилиндрических функций в виде рядов, сохраняя в них лишь члены первого порядка малости. Тогда после интегрирования находим

$$|R| = \exp \left[-\frac{k_1 k_2 a^2}{2} \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} \right] \quad (32)$$

Формула (32) справедлива при $k_2 > k_1$,

Когда пространство заполнено однородной средой, из (32) следует

$$|R| = \exp[-k^2 a^2 / 2], \quad \text{или} \quad |R| = 1 - k^2 a^2 / 2$$

что находится в согласии с [7, 9, 10].

Интересно отметить, что согласно (32) в случае нагретой струи и холодного окружающего газа, когда $c_1 / \gamma_1 > c_2 / \gamma_2$, излучение из открытого конца трубы больше (коэффициент отражения меньше), чем излучение в однородной среде независимо от того, характеризуется ли эта среда параметрами 1 или 2.

Авторы считают своим долгом поблагодарить С. С. Григоряна и Ю. Л. Якимова за обсуждение результатов.

Поступила 25 XII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. К р о к к о Л., Ч ж е н ь С и н ь - и. Теория неустойчивости горения в жидкостных ракетных двигателях. ИИЛ, 1958.
2. Р а у ш е н б а х Б. В. Вибрационное горение. Физматгиз, 1961.
3. Н о в и к о в С. С., Р ы з а н ц е в Ю. С. Об одной модели неустойчивого горения. ДАН СССР, 1961, т. 140, № 2.
4. В а й н ш т е й н Л. А. Об отражении звуковой волны в трубе от открытого конца. ДАН СССР, 1947, т. 58.
5. В а й н ш т е й н Л. А. Теория звуковых колебаний в открытых трубах. ЖТФ, 1949, т. 19, вып. 8.
6. В а й н ш т е й н Л. А. Дифракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода. Изд-во Сов. радио, 1953.
7. L e v i n e Н., S c h w i n g e r I. On the radiation of sound from unflanged circular pipe. Phys. Rev., 1948, vol., 73, № 4.
8. C a r r i e r G. F. Sound transmission from tube with flow Quart. Appl. Math, 1956, vol. 13.
9. Р ж е в к и н С. Н. Курс лекций по теории звука. Изд-во МГУ, 1960.
10. М о р з Ф. Колебания и звук. Гостехтеориздат, 1949.
11. В а т с о н Г. Теория бесселевых функций. ИИЛ, 1949.
12. М о р с Ф. Н., Ф е ш б а х Г. Методы теоретической физики. ИИЛ, 1960.

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДВУМЕРНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

А. Ф. Сидоров (Челябинск)

В работах [1, 2] исследовались нестационарные двумерные течения политропного газа, имеющие в пространстве x_1, x_2, t прямолинейные характеристики (компоненты вектора скорости u_1, u_2 и c — скорость звука постоянны вдоль прямых).

В работе [3] исследовалось определение решений в этом классе течений при наличии ударных волн в предположении, что движение за фронтом волны изэнтропично. Основным свойством ударных волн в указанном классе течений будет постоянство их интенсивности как для изотермического, так и для адиабатического газов. Форма же фронта ударных волн может быть, вообще говоря, произвольной (фон, по которому распространяется ударная волна, предполагается покоящимся политропным газом с постоянными ненулевыми плотностью и давлением).

Предлагаемая заметка является продолжением работы [3]. В ней методы, изложенные в [3], применяются для построения некоторых конкретных решений уравнений двумерной газовой динамики. Отметим здесь, что в работе [3] имеется неточность. Для рассмотренного в [3] примера, когда ударная волна имеет в некоторый момент времени форму эллипса, ошибочно указано, что построенное локальное решение справедливо в области за волной, распространяющейся по постоянному фону. В действительности же построенное решение для гиперболического случая определяет некоторый переменный фон перед ударной волной, двигающейся таким образом, что за ней остается область покоя.

В п. 1 настоящей статьи рассматриваются вопросы нахождения решений в области между криволинейной ударной волной и подпирающим ее криволинейным поршнем, давление вдоль которого постоянно во времени. Получено обобщение известного автомо-