

О ДВИЖЕНИИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ С РАЗРЫВОМ ДАВЛЕНИЯ
ВДОЛЬ ГРАНИЦЫ

Ф. Л. Черноусько (Москва)

Разрыв давления, приложенного к границе идеальной несжимаемой жидкости, имеет место, например, в задачах о распространении воздушных ударных волн вдоль поверхности жидкости. Такие задачи обычно решались в линейной постановке (возмущения границы малы из-за малости отношения плотностей воздуха и воды) [1]. Однако вблизи точки разрыва давления (фронта ударной волны) условия линеаризации нарушаются; так, скорость частиц, определенная по линейной теории, здесь стремится к бесконечности [1]. Ниже изучено течение идеальной жидкости в окрестности точки разрыва давления на границе в нелинейной постановке. Оказывается, что свободная граница здесь имеет спирально закрученную форму (жидкость всюду предполагается идеальной, несжимаемой и невесомой).

1. Рассматривается плоское установившееся потенциальное течение жидкости в области, ограниченной только свободной поверхностью AFB . Обозначим через x, y декартовы координаты в плоскости течения, $z = x + iy$; примем тогда, что $z = \infty$ в точках A и B и $z = 0$ в точке F . Пусть скорость на границе всюду направлена от A к B и по модулю равна v_1 на AF , v_2 на FB (в точке F имеется разрыв давления, а, следовательно, и скорости), и жидкость занимает область справа от AFB .

Пусть комплексный потенциал $w(z) = \varphi + i\psi$ равен нулю в F ; тогда

$$\varphi < 0 \text{ на } AF, \quad \varphi > 0 \text{ на } FB, \quad \psi = 0 \text{ на } AFB$$

а в области течения $\psi < 0$. Аналитическая в полуплоскости $\psi < 0$ функция

$$Z(w) = \frac{\ln v_2 - \ln w'}{\ln v_2 - \ln v_1} \tag{1.1}$$

введенная согласно методу Жуковского — Митчелла (штрих означает производную по z), удовлетворяет краевым условиям

$$\operatorname{Re} Z = 1 \text{ при } \psi = 0, \varphi < 0; \quad \operatorname{Re} Z = 0 \text{ при } \psi = 0, \varphi > 0$$

Очевидно, эта функция равна

$$Z(w) = -\frac{1}{\pi i} \ln \frac{w}{w_0} \tag{1.2}$$

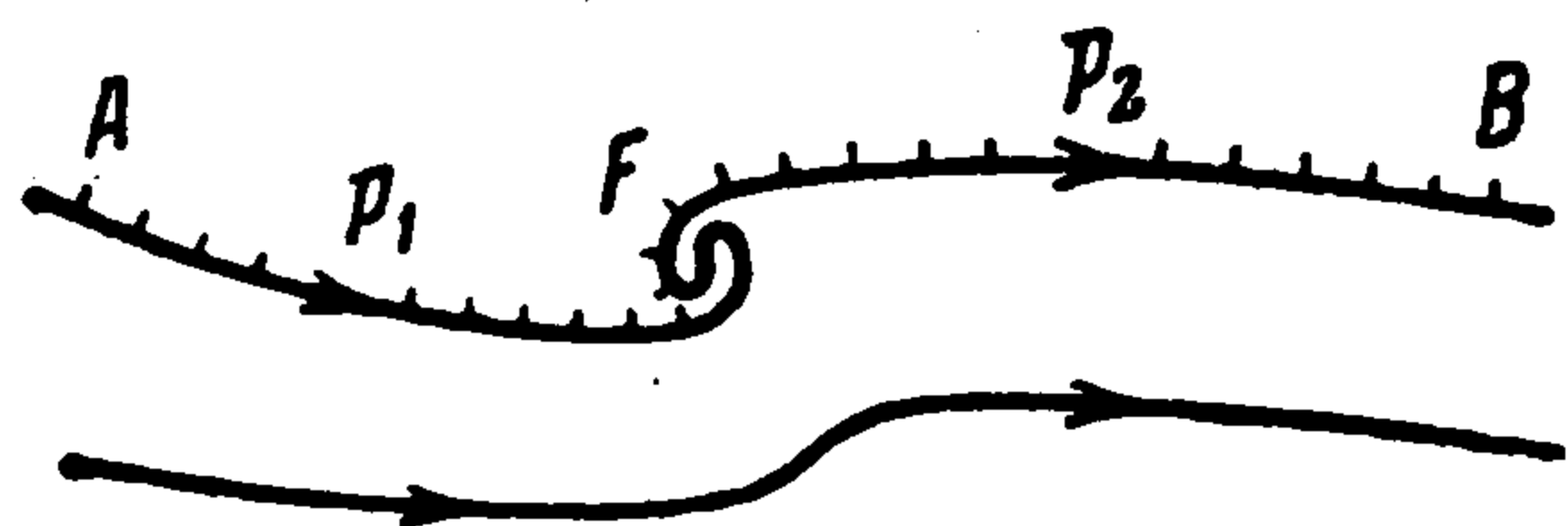
Здесь $w_0 > 0$ — произвольная постоянная, и в (1.2) берется та ветвь логарифма, для которой $-\pi < \operatorname{Im} \ln w < 0$ при $\operatorname{Im} w < 0$. Из (1.1), (1.2) находится зависимость между w и z (с учетом $w(0) = 0$)

$$(1 - ia) v_2 z = w_0^{ia} w^{1-ia}, \quad a = \frac{1}{\pi} \ln \frac{v_1}{v_2} \tag{1.3}$$

Комплексный потенциал — степенная функция z с комплексным показателем, и при $a = 0$ течение вырождается в плоскопараллельный поток (изменение w_0 соответствует повороту системы координат). Из (1.3) следует, что участки границы AF и FB — логарифмические спирали с уравнениями, соответственно

$$r_1 = b e^{-[\theta + \pi(1+a^2)]/a}, \quad r_2 = b e^{-\theta/a}$$

$$b = \frac{w_0}{v_2 \sqrt{1+a^2}} \exp\left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg} a\right) \quad (z = r e^{i\theta})$$



Фиг. 1

Для случая $v_1 > v_2, a > 0$ (давление $p_1 < p_2$) область течения изображена на фиг. 1, где показан также характер линий тока; при $a < 0$ спирали закручиваются в противоположном направлении, так что область течения вблизи F всегда поворачивается в сторону меньшего давления. Частица, движущаяся вдоль границы, проходит через F за конечное время, так как длина ограниченной части логарифмической спирали конечна.

Угол, на который одна из спиралей (1.4) повернута относительно другой, отсчитанный внутри области течения, равен $\pi(1+a^2) > \pi$; при $|a| = 1$ жидкость зани-

мает всю z -плоскость с разрезом по спирали, а при $|a| > 1$ область течения становится неоднолистной, причем число листов при $|a| \rightarrow \infty$ растет неограниченно. Используя интеграл Бернулли и формулу для a (1.3), приведем условие однолистности $a < 1$ (при $p_1 < p_2$) к виду (ρ — плотность жидкости)

$$\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho v_1^2} = 1 - \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \leq 1 - e^{-2\pi} \approx 0.998133 \quad (1.5)$$

Скачок давления на ударной волне в идеальном газе с показателем адиабаты γ определяется формулой

$$p_2 - p_1 = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_0 [(D - v_0)^2 - c_0^2] \quad (1.6)$$

Здесь D , ρ_0 , v_0 , c_0 — соответственно, скорость распространения волны, плотность, скорость частиц и скорость звука в газе перед скачком. В случае воздушной ударной волны, движущейся по поверхности воды, причем, если до прихода волны воздух и вода покоятся (в системе координат, связанной со скачком, $D = 0$, $v_0 = v_1$), условие (1.5) заведомо выполнено. Но в этом случае рассматриваемый эффект будет ничтожным: при изменении расстояния от точки F до точки границы в 1000 раз граница, согласно (1.4), повернется на угол всего в несколько минут (менее 8,2'). Если же жидкость движется в направлении волны с некоторой скоростью (в связанной со скачком системе координат $v_0 > v_1$), то эффект закручивания будет выражен сильнее, и за счет увеличения этой скорости может стать сколь угодно большим.

2. Пусть плоский стационарный поток идеальной жидкости ограничен (фиг. 2) с одной стороны плоской стенкой MN , а с другой — свободной границей AFB , к которой приложено разрывное давление (p_1 на AF , p_2 на FB , здесь $p_1 < p_2$).

Построим кривую $A'F'B'$, симметричную AFB относительно MN ; тогда области $A'F'B'VFA$ соответствует полоса $|\psi| < Q$ в плоскости w (при этом $Q = v_1 y_1 = v_2 y_2$ — расход жидкости). Функция $Z(w)$ (1.1), удовлетворяющая крайним условиям (считаем $\varphi = 0$ в точке F)

$$\operatorname{Re} Z = 0 \quad \text{при } \varphi > 0, \psi = \pm Q; \quad \operatorname{Re} Z = 1 \quad \text{при } \varphi < 0, \psi = \pm Q$$

определяется при помощи интеграла Шварца для полосы [2]

$$Z(w) = \frac{1}{2Q} \int_{-\infty}^0 \operatorname{sch} \frac{\pi(\varphi - w)}{2Q} d\varphi + iC = \frac{1}{\pi i} \ln \frac{e^{\pi w/2Q} + i}{e^{\pi w/2Q} - i} + iC \quad (2.1)$$

причем в (2.1) берется та ветвь логарифма, для которой $0 < \operatorname{Im} \ln(\) < \pi$ при $|\psi| < Q$, а постоянная $C = 0$, если ось x направить по MN . Из (1.1), (2.1), полагая $w(0) = 0$, выразим z через w и через Z ; получим

$$v_2 z = \int_0^w \left(\frac{e^{\pi w/2Q} + i}{e^{\pi w/2Q} - i} \right)^{ia} dw = -2Q \int_{1/2}^Z e^{-\pi a Z} \frac{dZ}{\sin \pi Z} \quad (2.2)$$

Для определения z_0 (положения точки F) нужно вычислить второй интеграл равенства (2.2) от $Z = 1/2$ до $Z = 1/2 - i\infty$, или после подстановки $Z = 1/2 - it/\pi$

$$z_0 = x_0 + iy_0 = \frac{2\sqrt{y_1 y_2}}{\pi} \left(- \int_0^\infty \frac{\sin at}{\operatorname{ch} t} dt + i \int_0^\infty \frac{\cos at}{\operatorname{ch} t} dt \right) \quad (2.3)$$

Первый из интегралов (2.3) вычисляется в виде ряда, а второй берется в замкнутом виде [3]

$$x_0 = - \frac{4a\sqrt{y_1 y_2}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 + a^2} < 0, \quad y_0 = \frac{2y_1 y_2}{y_1 + y_2} \quad (2.4)$$

Вблизи точки F формулы (2.1), (2.2), как и следовало ожидать, переходят в соотношения п. 1 при $a > 0$. Модуль скорости на MN монотонно убывает от v_1 до v_2 , принимая при $z = 0$ значение $\sqrt{v_1 v_2}$, а угол наклона границы к MN монотонно возрастает от 0 до $+\infty$ на AF и монотонно убывает от $+\infty$ до 0 на FB (фиг. 2).

При помощи второго из интегралов (2.2), взятого вдоль свободной поверхности, можно оценить размер завитка d (расстояние между крайними точками, в которых

скорость жидкости параллельна оси y). Отношение этого размера к средней глубине жидкости при малом положительном a оказывается равным

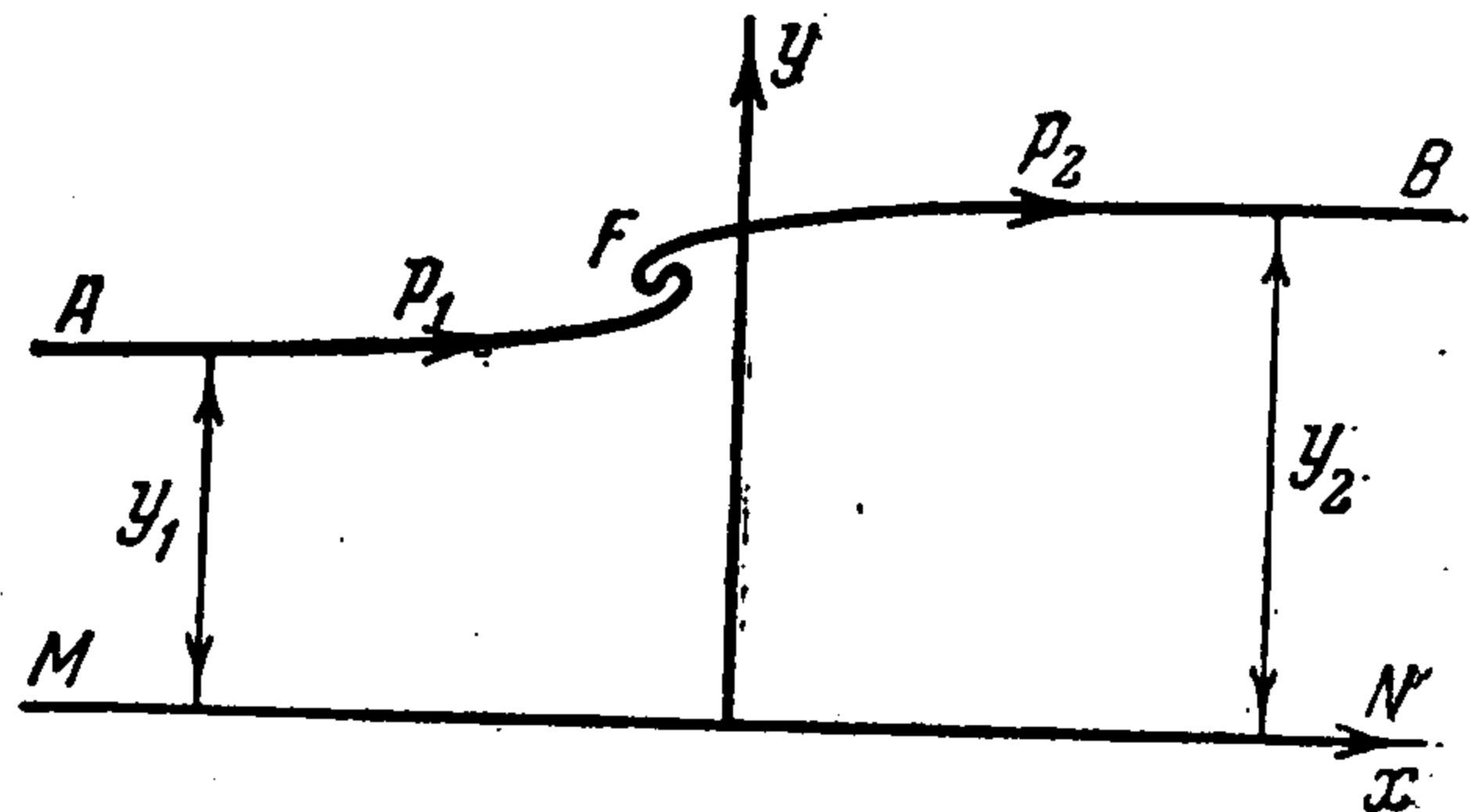
$$\frac{d}{h} \approx \frac{32}{\pi^3} a e^{-\pi/2a} \quad \left(h = \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \quad (2.5)$$

и поэтому размер завитка убывает при $a \rightarrow +0$ намного быстрее, чем перепад высоты $y_2 - y_1$, имеющий порядок πah .

3. Плоское безвихревое течение жидкости описывается потенциалом скоростей Φ , удовлетворяющим уравнению Лапласа и связанным с давлением p интегралом Коши

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{p}{\rho} = 0$$



Фиг. 2

Рассматривая нестационарные автомодельные движения с определяющим параметром c размерности LT^{-k} , сделаем следующую замену переменных:

$$\xi = \frac{x}{ct^k}, \quad \eta = \frac{y}{ct^k}; \quad \Phi(x, y, t) = c^2 t^{2k-1} \Phi(\xi, \eta), \quad p(x, y, t) = \rho c^2 t^{2k-2} P(\xi, \eta) \quad (3.2)$$

Здесь $\Phi(\xi, \eta)$ — гармоническая функция своих переменных, удовлетворяющая на свободной поверхности двум условиям (кинематическому и динамическому)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} d\xi + k(\eta d\xi - \xi d\eta) &= 0 \\ (2k-1)\Phi - k \left(\xi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + P_0 &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

где P_0 — безразмерное внешнее давление, которое будем считать разрывной функцией точки границы. Вводя комплексные переменные ζ и W ($\zeta = \xi + i\eta$, $\text{Re } W = \Phi$), перепишем условия (3.3) в виде (звездочка означает комплексно-сопряженное число)

$$\text{Im}(dW - k\zeta^* d\zeta) = 0, \quad \text{Re} \left[(2k-1)W - k\zeta \frac{dW}{d\zeta} \right] + \frac{1}{2} \left| \frac{dW}{d\zeta} \right|^2 + P_0 = 0 \quad (3.4)$$

Для рассмотрения течения в окрестности точки границы ζ_0 , где P_0 терпит разрыв, сделаем в (3.4) подстановку (ε — вещественный параметр)

$$\zeta = \zeta_0 + \varepsilon z, \quad W = W(\zeta_0) + \varepsilon k\zeta_0^* z + \varepsilon w \quad (3.5)$$

и перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, учитывая ограниченность производной dw/dz (скорость ограничена). Условия (3.4) примут вид

$$\text{Im } w = \text{const}, \quad \frac{1}{2} \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 + P_0 = \text{const}_1 \quad (3.6)$$

совпадающий с условиями для комплексного потенциала на свободной границе в стационарной задаче. Следовательно, вблизи точки разрыва давления поверхность имеет спиралевидную форму (фиг. 1), подобно изменяющуюся со временем по степенному закону.

Автор приносит благодарность С. С. Григоряну за полезные обсуждения.

Поступила 29 XII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев Б. Н. О волнах, возбуждаемых на поверхности несжимаемой жидкости ударной волной. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 2.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.
3. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.—Л., Гостехтеоретиздат, 1954.