Если радиус R окружности, описываемой концами оси фигуры, известен, то возможные значения угла θ_0 и смещения h заключены в следующих пределах:

$$0 \leqslant \theta_0 \leqslant \frac{R}{l}, \qquad 0 \leqslant h \leqslant R$$

Анализ формулы для скорости ухода гироскопа при нутационных колебаниях показывает, что движение гироскопа на шариковых подшипниках при наличии смещения оси фигуры относительно оси симметрии внешних колец подшипников аналогично движению динамически несбалансированного гироскопа, у которого полярный момент инерции в k раз больше $C^* = kC$, угол между осью динамической симметрии и осью собственного вращения равен θ_0, а скорость собственного вращения в k раз меньше и равна λ. Скорость ухода обращается в нуль при $A = kC$, т. е. для гироскопов с сильно вытянутым эллипсоидом инерции, так как $k > 2$. Обычно гироскопы имеют сплюснутый эллипсоид инерции, поэтому влияние смещений оси осимметрии гироскопа при вращении подшипника на уход может быть одного порядка с влиянием динамического дебаланса, исследованного Д. М. Климовым [5].

В принятой схеме предполагается, что сепараторы подшипников вращаются синхронно. Строгая синхронность вращения сепараторов в реальных условиях, вероятно, не наблюдается: поэтому интересно исследовать случай, когда концы оси фигуры гироскопа вращаются относительно оси Oz с различными угловыми скоростями.

Кроме того, для реальных условий нужно исследовать более тщательно смещение оси фигуры гироскопа в процессе движения. Известно, что конец оси вала, вращающегося на шариковых подшипниках, описывает сложную траекторию. Пример такой траектории приведен в работе Ямамото [6], где рассматриваются колебания упругого вала с диском, вращающегося на шариковых подшипниках.

Поступила 10 VII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Суслов Г. К. Теоретическая механика. М.— Л., Гостехиздат, Изд. 3-е, 1946.
2. Magnus K. Auswanderungerscheinungen an schwingenden Kreiseln in kardanischer Lagerung, Advances Aeronaut. Sci. Vol. 1, London — New York — Paris — Los Angeles, Pergamon Press, 1957, p. p. 507—523.
3. Лурье А. И. Заметки по аналитической механике, ПММ, 1957, т. XXI, вып. 6, стр. 759—768.
4. Пальмгрен А. Шариковые и роликовые подшипники, М., Машгиз, 1949 г.
5. Климов Д. М. О движении гироскопа в кардановом подвесе с неаксиально насаженным ротором. ДАН СССР, 1959, т. 124, № 3, стр. 537—539.
6. Yamamoto T. On critical speeds of a shaft supported by a ball bearing, J. Appl. Mech., 1959, 26, № 2, 199—204.

О ПРИВОДИМОСТИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОГОРИЗОНТКОМПАСА И ДВУХГИРОСКОПИЧЕСКОЙ ВЕРТИКАЛИ

В. Ф. Ляшенко (Москва)

Обобщаются некоторые результаты работы [1]. Дается обоснование перехода к упрощенным уравнениям Геккелера для произвольного движения точки подвеса гирогоризонткомпаса по земной сфере с помощью теоремы Н. П. Еругина [2]. Аналогичный вопрос также рассматривается применительно к двухгироскопической вертикали [3].

1. Уравнения возмущенного движения гирогоризонткомпаса при отсутствии демпфирования имеют [4] вид

$$mlv\frac{d\alpha}{dt} + ml\frac{dv}{dt}\alpha - mgl\beta - \Omega 2B\sin\varepsilon^\circ\delta = 0 \qquad \frac{d\beta}{dt} + \frac{v}{R}\alpha - \Omega\gamma = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} + \frac{2B\sin\varepsilon^\circ}{mlR}\delta + \Omega\beta = 0, \quad \frac{d}{dt}(2B\sin\varepsilon^\circ\delta) - mgl\gamma + mlv\Omega\alpha = 0$$

$$v = \sqrt{(RU\cos\varphi + v_E)^2 + v_N^2}, \; \Omega = u\sin\varphi + \frac{v_E}{R}\operatorname{tg}\varphi - \dot\alpha^*, \quad \alpha^* = -\frac{v_N}{Ru\cos\varphi + v_E}$$

Здесь B — собственный кинетический момент ротора гироскопа; ε° — некоторое равновесное положение угла разведения гироскопов; α — угол отклонения оси гиросферы в азимуте; β — угол подъема северного конца оси гиросферы над плоскостью, касательной к земному шару в точке подвеса гиросферы; γ — угол поворота гиросферы вокруг линии север — юг; δ — угол поворота гироскопов вокруг осей их кожухов, определяющий возмущенное положение осей роторов гироскопов относительно гиросферы; $m = P / g$ — масса гиросферы (P — вес гиросферы, g — ускорение свободного падения); l — метацентрическая высота гиросферы; R — радиус земного шара; U — угловая скорость вращения земного шара; φ — широта (геоцентрическая) местонахождения корабля; v_E, v_N — соответственно восточная и северная составляющие скорости точки подвеса гиросферы относительно поверхности земного шара.

Пусть корабль совершает маневрирование на данной широте φ.

Введем новые переменные x_j ($j = 1, 2, 3, 4$) по формулам

$$\alpha = \frac{RU\cos\varphi}{v}x_1, \qquad \beta = x_2, \qquad \gamma = x_3, \qquad \delta = \frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon^\circ}x_4 \tag{1.2}$$

Система (1.1) для новых переменных будет иметь вид [1]

$$\begin{gathered}\frac{dx_1}{dt} - \frac{\nu^2}{U\cos\varphi}x_2 - \lambda_1 \operatorname{tg}\varphi\Omega x_4 = 0, \qquad \frac{dx_2}{dt} + U\cos\varphi x_1 - \Omega x_3 = 0\\ \frac{dx_3}{dt} + \frac{2B\sin\varphi\nu^2}{Pl}x_4 + \Omega x_2 = 0, \qquad \frac{dx_4}{dt} - \frac{Pl}{2B\sin\varphi}x_3 + \frac{1}{\lambda_1}\operatorname{ctg}\varphi\Omega x_1 = 0\end{gathered} \tag{1.3}$$

$$\left(\nu = \sqrt{\frac{g}{R}},\ \lambda_1 = \frac{2B\nu^2}{PlU}\right)$$

В. Н. Кошляков [1] предложил подстановку

$$\begin{aligned}\xi_1 &= x_1\cos\theta - \frac{\nu}{U\cos\varphi}x_2\cos\theta + \frac{\nu}{U\cos\varphi}x_3\sin\theta - \lambda_1\operatorname{tg}\varphi x_4\sin\theta\\ \xi_2 &= \frac{U\cos\varphi}{\nu}x_1\cos\theta + x_2\cos\theta - x_3\sin\theta - \frac{\nu 2B\sin\varphi}{Pl}x_4\sin\theta\\ \xi_3 &= \frac{U\cos\varphi}{\nu}x_1\sin\theta + x_2\sin\theta + x_3\cos\theta + \frac{\nu 2B\sin\varphi}{Pl}x_4\cos\theta\\ \xi_4 &= \frac{1}{\lambda_1}\operatorname{ctg}\varphi x_1\sin\theta - \frac{Pl}{\nu 2B\sin\varphi}x_2\sin\theta - \frac{Pl}{\nu 2B\sin\varphi}x_3\cos\theta + x_4\cos\theta\end{aligned} \qquad \left(\theta(t) = \int_0^t \Omega(\tau)\,d\tau\right) \tag{1.4}$$

Эта подстановка приводит систему (1.3) к системе Шулера — Геккелера

$$\begin{gathered}\frac{d\xi_1}{dt} - \frac{\nu^2}{U\cos\varphi}\xi_2 = 0, \qquad \frac{d\xi_3}{dt} + \frac{2B\sin\varphi\nu^2}{Pl}\xi_4 = 0\\ \frac{d\xi_2}{dt} + U\cos\varphi\,\xi_1 = 0, \qquad \frac{d\xi_4}{dt} - \frac{Pl}{2B\sin\varphi}\xi_3 = 0\end{gathered} \tag{1.5}$$

2. Подстановка (1.4) применима для любого вида функции $\Omega(t)$. Однако в работе [1] дается ее обоснование только для частного случая, когда $\Omega(t)$ является периодической функцией времени. Между тем, переход к системе (1.5) можно обосновать для любого вида функции $\Omega(t)$, исходя из теоремы Н. П. Еругина [2].

Система (1.3) решается аналогично тому, как это предложено в работе [4]. Представим систему (1.3) в виде

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\left(\frac{U\cos\varphi}{\nu}x_1\right) - \nu x_2 - \frac{2B\sin\varphi\nu}{Pl}\Omega x_4 = 0, \qquad \frac{dx_2}{dt} + U\cos\varphi x_1 - \Omega x_3 = 0\\ \frac{dx_3}{dt} + \frac{2B\sin\varphi\nu^2}{Pl}x_4 + \Omega x_2 = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{2B\sin\varphi\nu}{Pl}x_4\right) - \nu x_3 + \frac{U\cos\varphi}{\nu}\Omega x_1 = 0\end{gathered} \tag{2.1}$$

Введем две комплексно-значные функции t по формулам

$$\chi(t) = \frac{U\cos\varphi}{\nu}x_1 + ix_2, \qquad \mu(t) = x_3 - i\frac{2B\sin\varphi\nu}{Pl}x_4 \ (i = \sqrt{-1}) \tag{2.2}$$

Тогда система (2.1) приводится к системе двух уравнений вида

$$\frac{d\chi}{dt} + i\nu\chi = i\Omega\mu, \qquad \frac{d\mu}{dt} + i\nu\mu = i\Omega\chi \tag{2.3}$$

из которой получаются следующие уравнения:

$$\frac{d}{dt}(\chi + \mu) + i(\nu - \Omega)(\chi + \mu) = 0, \qquad \frac{d}{dt}(\chi - \mu) + i(\nu + \Omega)(\chi - \mu) = 0 \tag{2.4}$$

Последние легко интегрируются. Имеем

$$\chi + \mu = C_1 \exp\left(-i\int_0^t (\nu - \Omega)\,dt\right), \qquad \chi - \mu = C_2 \exp\left(-i\int_0^t (\nu + \Omega)\,dt\right) \tag{2.5}$$

Здесь C_1, C_2 — произвольные постоянные. Общее решение системы (2.3) имеет вид

$$\chi = \frac{1}{2} e^{-i\nu t}(C_1 e^{i\theta} + C_2 e^{-i\theta}), \qquad \mu = \frac{1}{2} e^{-i\nu t}(C_1 e^{i\theta} - C_2 e^{-i\theta}) \tag{2.6}$$

3. Из решения (2.6) следует, что интегральная матрица системы (2.3) имеет структуру

$$P = e^{-i\nu t} Z, \qquad Z(t) = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} e^{i\theta} & e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} & -e^{-i\theta} \end{Vmatrix} \quad \text{— матрица типа Ляпунова} \tag{3.1}$$

Отсюда, на основании теоремы Н. П. Еругина [2], следует, что система (2.3) приводима при любом виде функции $\Omega(t)$. Подстановка

$$Y = Z^{-1}X, \qquad Y(t) = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Vmatrix}, \qquad Z^{-1}(t) = \begin{Vmatrix} e^{-i\theta} & e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} & -e^{i\theta} \end{Vmatrix}, \qquad X(t) = \begin{Vmatrix} \chi \\ \mu \end{Vmatrix} \tag{3.2}$$

приводит систему (2.3) к системе с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy_1}{dt} + i\nu y_1 = 0, \qquad \frac{dy_2}{dt} + i\nu y_2 = 0 \tag{3.3}$$

Обратное преобразование от переменных y_1, y_2 к переменным χ, μ имеет согласно (3.2) вид

$$X = ZY \tag{3.4}$$

Полагая

$$y_1 = \eta_1 + i\eta_2, \qquad y_2 = \eta_3 + i\eta_4 \tag{3.5}$$

на основании (3.3) имеем систему Шулера — Геккелера для переменных η_j

$$\frac{d\eta_1}{dt} - \nu\eta_2 = 0, \qquad \frac{d\eta_2}{dt} + \nu\eta_1 = 0, \qquad \frac{d\eta_3}{dt} - \nu\eta_4 = 0, \qquad \frac{d\eta_4}{dt} + \nu\eta_3 = 0 \tag{3.6}$$

Из (3.2), учитывая (2.2) и (3.5), получаем формулы неособенного преобразования от переменных x_j к переменным η_j вида

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \frac{U\cos\varphi}{\nu} x_1\cos\theta + x_2\sin\theta + x_3\cos\theta - \frac{2B\sin\varphi\nu}{Pl} x_4\sin\theta \\
\eta_2 &= -\frac{U\cos\varphi}{\nu} x_1\sin\theta + x_2\cos\theta - x_3\sin\theta - \frac{2B\sin\varphi\nu}{Pl} x_4\cos\theta \\
\eta_3 &= \frac{U\cos\varphi}{\nu} x_1\cos\theta - x_2\sin\theta - x_3\cos\theta - \frac{2B\sin\varphi\nu}{Pl} x_4\sin\theta \\
\eta_4 &= \frac{U\cos\varphi}{\nu} x_1\sin\theta + x_2\cos\theta - x_3\sin\theta + \frac{2B\sin\varphi\nu}{Pl} x_4\cos\theta
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Приведем формулы обратного преобразования от переменных η_j к переменным x_j

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2}\frac{\nu}{U\cos\varphi}(\eta_1\cos\theta - \eta_2\sin\theta + \eta_3\cos\theta + \eta_4\sin\theta) \\
x_2 &= \frac{1}{2}(\eta_1\sin\theta + \eta_2\cos\theta - \eta_3\sin\theta + \eta_4\cos\theta) \\
x_3 &= \frac{1}{2}(\eta_1\cos\theta - \eta_2\sin\theta - \eta_3\cos\theta - \eta_4\sin\theta) \\
x_4 &= \frac{1}{2}\frac{Pl}{\nu 2B\sin\varphi}(-\eta_1\sin\theta - \eta_2\cos\theta - \eta_3\sin\theta + \eta_4\cos\theta)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

4. Предыдущая теория фактически без всякого изменения распространяется и на уравнения двухгироскопической вертикали, приведенные в работе [3]:

$$mav\frac{d\alpha}{dt}+ma\frac{dv}{dt}\alpha-mga\beta+\Omega\,2B\cos\theta^*\delta=0 \qquad \frac{d\beta}{dt}+\frac{v}{R}\alpha-\Omega\gamma=0$$
$$\frac{d\gamma}{dt}-\frac{2B\cos\theta^*}{maR}\delta+\Omega\beta=0,\qquad \frac{d}{dt}(2B\cos\theta^*\delta)+mga\gamma-mav\Omega\alpha=0 \tag{4.1}$$

Функция $\theta^*(t)$ удовлетворяет условию

$$\theta^*(t)=\arcsin\frac{mav}{2B}$$

Остальные обозначения в системе (4.1) те же, что и в (1.1), причем a имеет тот же смысл, что и l. Введем новые переменные z_j по формулам

$$\alpha=\frac{RU\cos\varphi}{v}z_1,\qquad \beta=z_2,\qquad \gamma=z_3,\qquad \delta=\frac{\cos\varphi}{\cos\theta^*}z_4 \tag{4.2}$$

Система (4.1) примет вид

$$\frac{dz_1}{dt}-\frac{\nu^2}{U\cos\varphi}z_2+\lambda_2\Omega z_4=0,\qquad \frac{dz_3}{dt}-\frac{2B\cos\varphi\nu^2}{Pa}z_4+\Omega z_2=0$$
$$\frac{dz_2}{dt}+U\cos\varphi z_1-\Omega z_3=0,\qquad \frac{dz_4}{dt}+\frac{Pa}{2B\cos\varphi}z_3-\frac{1}{\lambda_2}\Omega z_1=0 \qquad \left(\lambda_2=\frac{2B\nu^2}{PaU}\right) \tag{4.3}$$

Рассуждая совершенно аналогично предыдущему, можно показать, что посредством неособенной подстановки

$$\zeta_1=\frac{U\cos\varphi}{\nu}z_1\cos\theta+z_2\sin\theta+z_3\cos\theta+\frac{2B\cos\varphi\nu}{Pa}z_4\sin\theta$$
$$\zeta_2=-\frac{U\cos\varphi}{\nu}z_1\sin\theta+z_2\cos\theta-z_3\sin\theta+\frac{2B\cos\varphi\nu}{Pa}z_4\cos\theta \tag{4.4}$$
$$\zeta_3=\frac{U\cos\varphi}{\nu}z_1\cos\theta-z_2\sin\theta-z_3\cos\theta+\frac{2B\cos\varphi\nu}{Pa}z_4\sin\theta$$
$$\zeta_4=\frac{U\cos\varphi}{\nu}z_1\sin\theta+z_2\cos\theta-z_3\sin\theta-\frac{2B\cos\varphi\nu}{Pa}z_4\cos\theta$$

система (4.3) при любом виде функции $\Omega(t)$ приводима к системе Шулера — Геккелера

$$\frac{d\zeta_1}{dt}-\nu\zeta_2=0,\qquad \frac{d\zeta_2}{dt}+\nu\zeta_1=0,\qquad \frac{d\zeta_3}{dt}-\nu\zeta_4=0,\qquad \frac{d\zeta_4}{dt}+\nu\zeta_3=0 \tag{4.5}$$

Формулы обратного преобразования от переменных ζ_j к переменным z_j имеют вид:

$$z_1=\frac{1}{2}\frac{\nu}{U\cos\varphi}(\zeta_1\cos\theta-\zeta_2\sin\theta+\zeta_3\cos\theta+\zeta_4\sin\theta)$$
$$z_2=\frac{1}{2}(\zeta_1\sin\theta+\zeta_2\cos\theta-\zeta_3\sin\theta+\zeta_4\cos\theta)$$
$$z_3=\frac{1}{2}(\zeta_1\cos\theta-\zeta_2\sin\theta-\zeta_3\cos\theta-\zeta_4\sin\theta) \tag{4.6}$$
$$z_4=\frac{1}{2}\frac{Pa}{\nu\,2B\cos\varphi}(\zeta_1\sin\theta+\zeta_2\cos\theta+\zeta_3\sin\theta-\zeta_4\cos\theta)$$

Поступила 22 XI 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Кошляков В. Н. О приводимости уравнений движения гирогоризонткомпаса. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 5.
2. Еругин Н. П. Приводимые системы. Л.— М., Изд-во АН СССР, 1946.
3. Ишлинский А. Ю. Теория двухгироскопической вертикали. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 2.
4. Ишлинский А. Ю. К теории гирогоризонткомпаса. ПММ, 1956, т. XX, вып. 4.