

О ДВИЖЕНИИ ГИРОСКОПА, УСТАНОВЛЕННОГО НА ШАРИКОВЫХ ПОДШИПНИКАХ В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ

С. А. Харламов (Москва)

В теории свободного гироскопа предполагается, что положение его мгновенной оси вращения относительно внутреннего кольца карданова подвеса фиксировано в системе отсчета, связанной с этим кольцом. Ниже рассматривается движение гироскопа в кардановом подвесе, для которого указанное предположение не делается. Относительное движение гироскопа определяется чисто кинематически путем задания закона движения его центра инерции и ориентации оси фигуры. Силы инерции относительного движения возбуждают малые колебания гироскопа около стационарного движения, заставляющие гироскоп прецессировать относительно оси внешнего кольца.

Такое относительное движение может иметь место, если гироскоп установлен в кардановом подвесе на шариковых подшипниках.

1. Движение гироскопа относительно внутреннего кольца карданова подвеса. Ось фигуры гироскопа в относительном движении описывает однополостный гиперболоид вращения, уравнение которого приведено ниже. Ось гиперболоида проходит через центр подвеса и перпендикулярна к оси вращения внутреннего кольца.

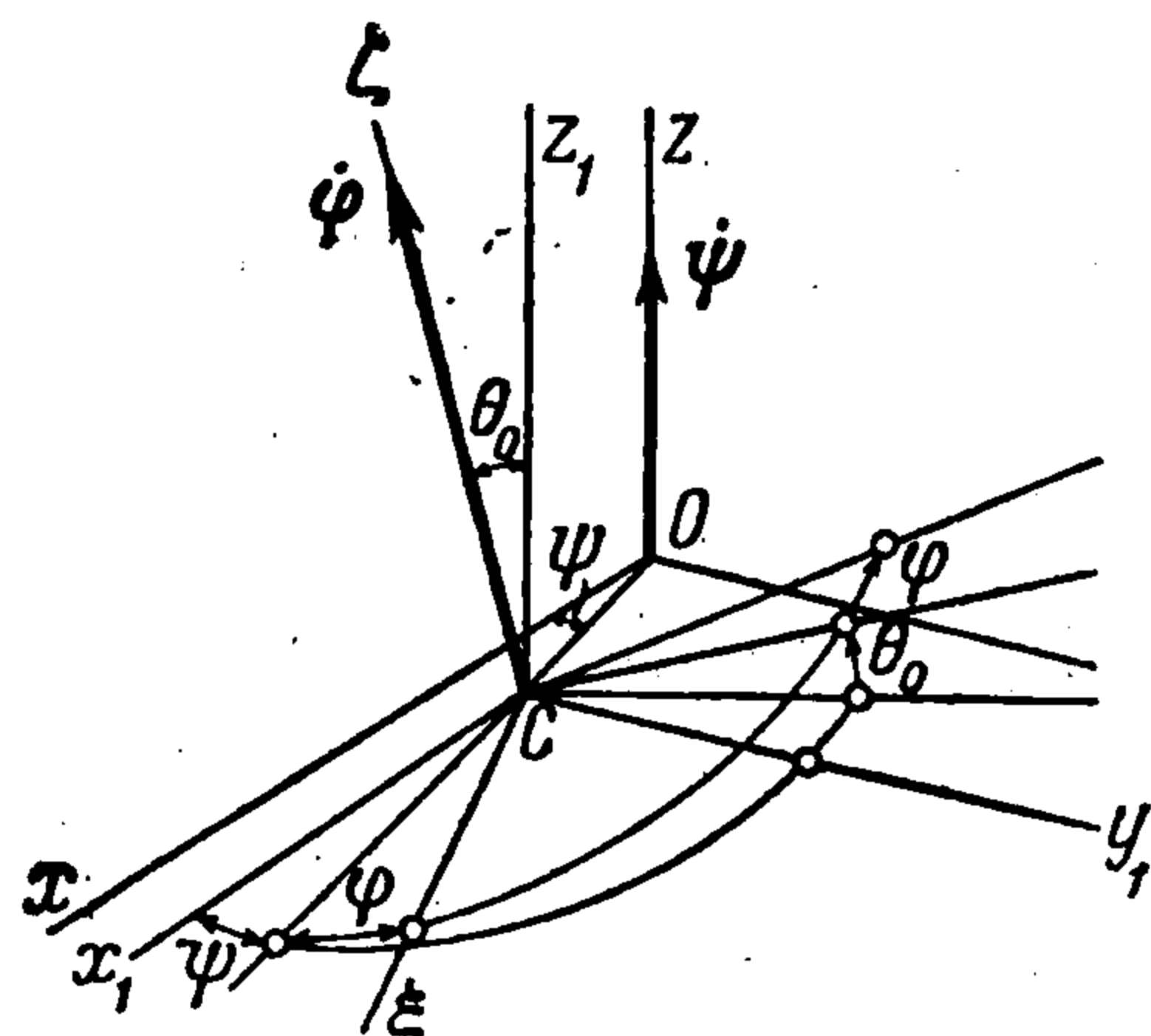
Свяжем с внутренним кольцом карданова подвеса систему отсчета $Oxyz$ так, что ось Oy направлена по оси вращения внутреннего кольца относительно внешнего, а ось Oz — по оси гиперболоида.

Начало отсчета C системы координат $C\xi\eta\zeta$, связанной с гироскопом, поместим в центр инерции, а ось $C\zeta$ направим вдоль оси фигуры. Положение системы отсчета $C\xi\eta\zeta$ относительно системы $Oxyz$ определим тремя координатами точки C и тремя углами Эйлера ψ, θ, φ (фиг. 1).

Закон движения гироскопа относительно внутреннего кольца подвеса зададим в виде

$$x_c = h \cos \psi, \quad y_c = h \sin \psi, \quad z_c = 0$$

$$\psi = \psi(t), \quad \theta = \theta_0, \quad \varphi = \frac{k-1}{\cos \theta_0} \psi(t) + \varphi_0$$



Фиг. 1

положение гироскопа однозначно определяется одной координатой.

Определим теперь проекции относительной угловой скорости гироскопа и относительной скорости точки C на оси системы $Oxyz$

$$\omega_x = (k-1) \operatorname{tg} \theta_0 \dot{\psi} \sin \psi, \quad \omega_y = -(k-1) \operatorname{tg} \theta_0 \dot{\psi} \cos \psi, \quad \omega_z = k \dot{\psi}$$

$$v_{cx}^{(r)} = -h \dot{\psi} \sin \psi, \quad v_{cy}^{(r)} = h \dot{\psi} \cos \psi, \quad v_{cz}^{(r)} = 0$$

Геометрическая интерпретация движения рассмотрена в книге Г. К. Сулова¹.

На оси $C\zeta$ выберем две точки P и Q с координатами $(0, 0, l)$ и $(0, 0, -l)$, которые назовем концами оси фигуры гироскопа. Их траектории в системе координат $Oxyz$ представляют окружности

$$x^2 + y^2 = h^2 + l^2 \sin^2 \theta_0, \quad z = \pm l \cos \theta_0$$

Исключая отсюда l , найдем уравнение гиперболоида вращения, описываемого осью фигуры в процессе движения

$$x^2 + y^2 - z^2 \operatorname{tg}^2 \theta_0 = h^2$$

Рассмотрим движения гироскопа, у которого ось фигуры совпадает с полярной осью инерции; при этом будем предполагать малость угла θ_0 и принимать $\sin \theta_0 = \theta_0$ и $\cos \theta_0 = 1$.

2. Уравнения движения гироскопа. Составим методом Лагранжа уравнения движения гироскопа, установленного на неподвижном относительно инерциального пространства основании. Кинетическая энергия карданова подвеса состоит из кинетической энергии внешнего кольца $T_2 = \frac{1}{2} A_2 \dot{\alpha}^2$, где A_2 — момент инерции внешнего

¹ См. [1] пример 25 на стр. 96—97 и пример 32 на стр. 110—111.

кольца относительно его оси вращения, а α — угол поворота кольца относительно основания и кинетической энергии внутреннего кольца

$$T_1 = \frac{1}{2} (I_{xx} p_1^2 + I_{yy} q_1^2 + I_{zz} r_1^2 - 2I_{xy} p_1 q_1 - 2I_{yz} q_1 r_1 - 2I_{xz} p_1 r_1)$$

Здесь $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, I_{xy}, I_{yz}, I_{xz}$ — моменты инерции внутреннего кольца относительно системы $Oxyz$; p_1, q_1, r_1 — проекции абсолютной угловой скорости внутреннего кольца на оси координат $Oxyz$, связанные с ним. Если обозначить через β угол поворота внутреннего кольца относительно внешнего, то

$$p_1 = \dot{\alpha} \cos \beta, \quad q_1 = \dot{\beta}, \quad r_1 = \dot{\alpha} \sin \beta$$

В дальнейшем будем считать, что ось вращения внутреннего кольца относительно внешнего является главной осью инерции, т. е. $I_{xx} = A_1, I_{yy} = B_1, I_{zz} = C_1, I_{xz} = E_1, I_{xy} = I_{yz} = 0$. Для определения кинетической энергии гироскопа вычисляются компоненты его тензора инерции относительно системы осей $Cx_1y_1z_1$, начало которой находится в точке C , а оси параллельны осям Ox, Oy и Oz

$$\begin{aligned} I_{x_1x_1} &= A + (C - A) \sin^2 \psi \sin^2 \theta_0, & I_{x_1y_1} &= (C - A) \cos \psi \sin \psi \sin^2 \theta_0 \\ I_{y_1y_1} &= A + (C - A) \cos^2 \psi \sin^2 \theta_0, & I_{x_1z_1} &= -(C - A) \sin \psi \cos \theta_0 \sin \theta_0 \\ I_{z_1z_1} &= C - (C - A) \sin^2 \theta_0, & I_{y_1z_1} &= (C - A) \cos \psi \cos \theta_0 \sin \theta_0 \end{aligned}$$

а затем находятся проекции абсолютной угловой скорости гироскопа и проекции абсолютной скорости его центра инерции на те же оси.

Переносной угловой скоростью гироскопа является угловая скорость внутреннего кольца, относительная угловая скорость определена в п. I, следовательно, обозначая p', q', r' проекции абсолютной угловой скорости на оси Cx_1, Cy_1, Cz_1 соответственно, получим

$$p' = \dot{\alpha} \cos \beta + (k - 1) \operatorname{tg} \theta_0 \dot{\psi} \sin \psi, \quad q' = \dot{\beta} - (k - 1) \operatorname{tg} \theta_0 \dot{\psi} \sin \psi, \quad r' = \dot{\alpha} \sin \beta + k \dot{\psi}$$

Проекции абсолютной скорости центра инерции гироскопа на оси координат $Oxyz$ определяются формулами

$$\begin{aligned} v_{cx} &= -h (\dot{\psi} + \dot{\alpha} \sin \beta) \sin \psi, & v_{cy} &= h (\dot{\psi} + \dot{\alpha} \sin \beta) \cos \psi \\ v_{cz} &= h (\dot{\alpha} \cos \beta \sin \psi + \dot{\beta} \cos \psi) \end{aligned}$$

Суммируя кинетическую энергию гироскопа с кинетической энергией подвеса, определим кинетическую энергию всей системы (m — масса гироскопа).

$$\begin{aligned} 2T &= (A_2 + A_1 \cos^2 \beta + C_1 \sin^2 \beta) \dot{\alpha}^2 - 2E_1 \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \cos \beta + B_1 \dot{\beta}^2 + I_{x_1x_1} p'^2 + I_{y_1y_1} q'^2 + \\ &+ I_{z_1z_1} r'^2 - 2I_{x_1y_1} p' q' - 2I_{y_1z_1} q' r' - 2I_{x_1z_1} p' r' + \\ &+ mh^2 [(\dot{\psi} + \dot{\alpha} \sin \beta)^2 + (\dot{\alpha} \cos \beta \sin \psi + \dot{\beta} \cos \psi)^2] \end{aligned}$$

Принимая α, β и ψ за обобщенные координаты системы и предполагая, что трение в осях отсутствует и центры инерции колец лежат в центре подвеса, выведем по известному правилу уравнения движения системы. Полученные таким способом уравнения весьма громоздки, но их можно упростить, учитывая тот факт, что угол очень мал, т. е. $\cos \theta_0 = 1$ и $\sin \theta_0 = \theta_0$ с большой точностью. Если гироскоп вращается достаточно быстро и угловая скорость $\dot{\psi}$ велика, то по предположению будем считать, что $\theta_0 \dot{\psi} \sim \dot{\alpha} \sim \dot{\beta}$ и $\theta_0 \dot{\psi}^2 \sim \dot{\alpha} \sim \dot{\beta}$. В уравнениях движения гироскопа членами порядка выше $\theta_0^2 \dot{\psi}^2$ пренебрегаем, учитывая, что $mh^2 \sim ml^2 \theta_0^2$, а у технических гироскопов $ml^2 \sim A$

$$\begin{aligned} [A_2 + (A + A_1) \cos^2 \beta + C_1 \sin^2 \beta - 2E_1 \sin \beta \cos \beta] \ddot{\alpha} - \\ - 2 [(A + A_1 - C_1) \sin \beta \cos \beta + E_1 (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta)] \dot{\alpha} \dot{\beta} + C (k \dot{\psi} + \dot{\alpha} \sin \beta) \dot{\beta} \cos \beta - \\ - (kC - A) \theta_0 (\dot{\psi}^2 \cos \psi \cos \beta - \dot{\psi} \dot{\beta} \sin \psi \sin \beta) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A + B_1) \ddot{\beta} + [(A + A_1 - C_1) \sin \beta \cos \beta + E_1 (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta)] \dot{\alpha}^2 - \\ - C (k \dot{\psi} + \dot{\alpha} \sin \beta) \dot{\alpha} \cos \beta - (kC - A) \theta_0 (\dot{\psi}^2 \sin \psi + \dot{\alpha} \dot{\psi} \sin \beta \cos \psi) = 0 \end{aligned}$$

$$C \frac{d}{dt} (k \dot{\psi} + \dot{\alpha} \sin \beta) + (kC - A) \theta_0 (\ddot{\alpha} \cos \beta \sin \psi + \dot{\beta} \cos \psi) = 0$$

3. Решение уравнений движения гироскопа. Если $\theta_0 = 0$, то уравнения движения допускают частное решение

$$\alpha = \alpha_0 = \text{const}, \quad \beta = \beta_0 = \text{const}, \quad \psi = \lambda t + \psi_0$$

соответствующее стационарному движению гироскопа относительно неподвижного карданова подвеса. Движение гироскопа в каждое мгновение времени представляет собой вращение относительно некоторой оси с абсолютной угловой скоростью $\omega = k\lambda$. Мгновенная ось вращения перемещается в пространстве, описывая цилиндрическую поверхность, осью которой является Oz . Следовательно, при $\theta_0 = 0$ ориентация оси Oz относительно неподвижного основания сохраняется.

Будем рассматривать члены, содержащие $\theta_0 \neq 0$ как малые возмущения, и решения уравнений движения представим в виде

$$\alpha = \alpha_0 + ut + \xi(t), \quad \beta = \beta_0 + \eta(t), \quad \psi = \lambda t + \psi_0 + \zeta(t)$$

где u — постоянная скорость прецессии гироскопа, представляющая малую величину порядка $\theta_0^2\psi$; $\xi(t)$ и $\eta(t)$ — ограниченные функции времени, являющиеся малыми порядка θ_0 . Если подставить приведенные выражения для α и β в уравнения движения и сохранить в них лишь члены порядка $\theta_0\psi^2$, то получится следующая система неоднородных линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \{A_2 + (A + A_1) \cos^2 \beta_0 + C_1 \sin^2 \beta_0 - 2E_1 \sin \beta_0 \cos \beta_0\} \ddot{\xi} + \\ + C\omega \cos \beta_0 \dot{\eta} = (C\omega - A\lambda) \lambda \theta_0 \cos \beta_0 \cos(\lambda t + \psi_0) \\ (A + B_1) \ddot{\eta} - C\omega \cos \beta_0 \dot{\xi} = (C\omega - A\lambda) \lambda \theta_0 \sin(\lambda t + \psi_0), \quad k\dot{\zeta} + \dot{\xi} \sin \beta_0 = 0 \end{aligned}$$

Вынуждающие моменты в правой части уравнений можно рассматривать как проекции на оси внешнего и внутреннего колец постоянного момента, направленного вдоль OC и представляющего сумму момента центробежных сил $(C - A)\lambda^2\theta_0$ и некоторого гироскопического¹ момента $C(\omega - \lambda)\lambda\theta_0$.

Первые два уравнения системы интегрируются независимо от третьего

$$\begin{aligned} \xi &= - (kC - A) \theta_0 \cos \beta_0 \frac{kC + I_1}{I_0 I_1 - k^2 C^2 \cos^2 \beta_0} \cos(\lambda t + \psi_0) \\ \eta &= - (kC - A) \theta_0 \frac{I_0 + kC \cos^2 \beta_0}{I_0 I_1 - k^2 C^2 \cos^2 \beta_0} \sin(\lambda t + \psi_0) \end{aligned}$$

где

$$I_0 = A_2 + (A + A_1) \cos^2 \beta_0 + C_1 \sin^2 \beta_0 - 2E_1 \cos \beta_0 \sin \beta_0, \quad I_1 = A + B_1$$

Угловую скорость прецессии u найдем, пользуясь методом, предложенным Магнусом [2], согласно которому полученные решения для ξ и η следует подставить в уравнения движения и усреднить результат по периоду колебаний $2\pi/\lambda$. В итоге получаем следующее уравнение:

$$-C\omega \cos \beta_0 u = a^2 \lambda^2 [(A_2 + C_1) \text{tg} \beta_0 - E_1]$$

где a — амплитуда малых колебаний внешнего кольца карданова подвеса. Отсюда выводим формулу для скорости ухода гироскопа под влиянием нутационных колебаний

$$u = -\theta_0^2 \lambda \frac{[(A_2 + C_1) \sin \beta_0 - E_1 \cos \beta_0] (kC - A)^2 (kC + I_1)^2}{2kC (I_0 I_1 - k^2 C^2 \cos^2 \beta_0)^2}$$

Полученный результат указывает на необходимость точного совмещения оси Oz с главной осью инерции внутреннего кольца.

4. Определение реакций в опорах осей карданова подвеса. Покажем теперь, что смещение h центра инерции гироскопа приводит к появлению дополнительных реакций в опорах осей гироскопа и карданова подвеса. Обобщенные силы реакции определим, пользуясь методом А. И. Лурье [3]. Пусть гироскоп установлен так, что ось

¹ В системе отсчета, вращающейся относительно оси Oz с угловой скоростью λ , гироскоп обладает некоторым кинетическим моментом H' , направленным вдоль $C\zeta$. Оси Oz и $C\zeta$ не совпадают, поэтому возникает гироскопический момент $H' \times \lambda$, равный $C(\omega - \lambda)\lambda\theta_0$ и направленный вдоль OC (фиг. 1).

внешнего кольца горизонтальна, а ось Oy направлена вдоль вертикали в поле силы тяжести (фиг. 2). Вертикальная реакция подпятника подлежит определению.

Отбросим связь, устранив опору, поддерживающую ось внутреннего кольца, и запишем кинетическую энергию внутреннего кольца и гироскопа

$$T = \frac{1}{2} [M_1 \dot{y}^2 + m (\dot{y}^2 - 2h\dot{y}\dot{\psi} \cos \psi + h^2 \dot{\psi}^2) + k^2 C \dot{\psi}^2]$$

где y — координата центра инерции внутреннего кольца и M_1 и m — массы внутреннего кольца и гироскопа. При подсчете кинетической энергии считаем $\theta_0 = 0$ и пренебрегаем кинетической энергией прецессионного движения, возникающего за счет вращения Земли. Силовая функция имеет вид

$$U = (M_1 + m) gy + mgh \sin \psi$$

Составляя уравнения Лагранжа и учитывая в этих уравнениях обобщенную силу реакции, представляющую в рассматриваемом случае вертикальную составляющую реакции подпятника, получим

$$(M_1 + m) \ddot{y} + mh (\ddot{\psi} \cos \psi - \dot{\psi}^2 \sin \psi) = - (M_1 + m) h + Y_1$$

$$(k^2 C + mh^2) \ddot{\psi} + mh_2 (\dot{y} + g) \cos \psi = 0$$

Если учесть уравнение связи $y = 0$, то последнее уравнение интегрируется независимо от первого, а из первого уравнения определим реакцию подпятника.

Так как h весьма мало, то для второго уравнения возьмем лишь нулевое приближение

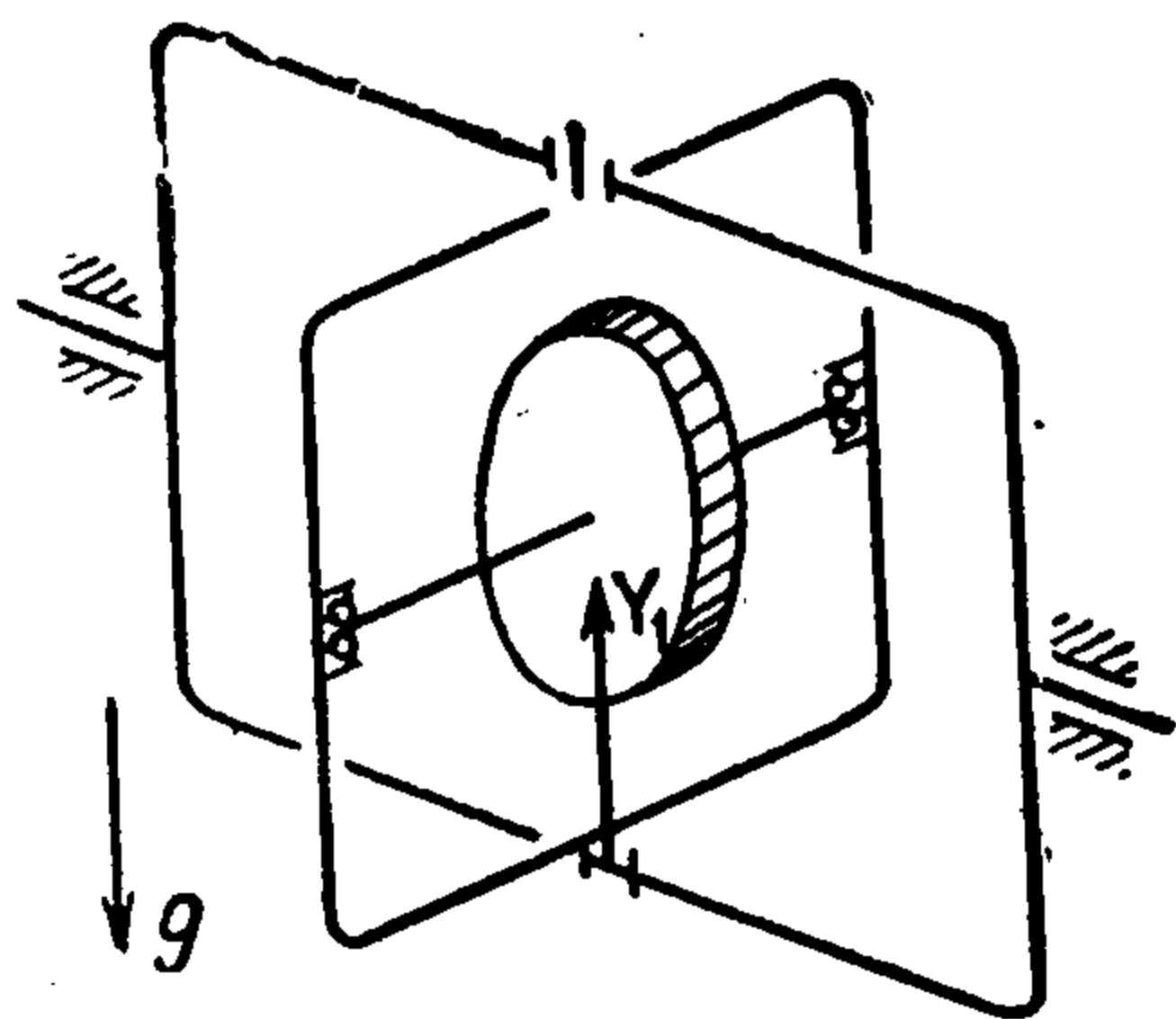
$$\psi = \lambda t + \psi_0$$

Из первого уравнения найдем, что

$$Y_1 = (M_1 + m) g - mh\lambda^2 \sin(\lambda t + \psi_0)$$

В случае, когда связь неударживающая, т. е.

$$y \geq 0, \text{ при } h\lambda^2 > \frac{M_1 + m}{m} g$$



Фиг. 3

контакт в подпятнике может нарушаться.

Аналогично можно найти реакции в опорах гироскопа и внешнего кольца.

5. Смещение оси фигуры гироскопа при вращении шариковых подшипников. Для установки гироскопа во внутреннем кольце карданова подвеса обычно применяют шариковые подшипники. Реакции, действующие на внутренние кольца подшипников, возникают за счет контактных деформаций шариков и колец. Если шарики разноразмерны и неодинаковой жесткости, то ось внутреннего кольца подшипника может не совпадать с осью внешнего. Пусть, например, внешние кольца подшипников установлены соосно и идеально симметричны относительно общей оси, а внутренние кольца подшипников установлены так, что ось фигуры гироскопа $C\zeta$ является осью симметрии этих колец. Тогда смещение оси фигуры относительно оси симметрии внешних колец остается постоянным в системе отсчета, вращающейся вместе с сепаратором, так как расположение шариков и их деформации зависят от угла поворота сепаратора. Ось симметрии внешних колец будет представлять ось Oz .

При отсутствии проскальзывания между шариками и кольцами подшипника угловые скорости собственного вращения гироскопа и вращения сепараторов пропорциональны.

Пусть смещения концов оси фигуры гироскопа одинаковы, тогда имеет место изученный случай относительного движения гироскопа, если только сепараторы шариковых подшипников вращаются синхронно. Угол ψ есть угол поворота сепаратора вокруг оси Oz , а угловая скорость вращения сепаратора λ определяется по угловой скорости собственного вращения ω согласно известной формуле [4]

$$\lambda = \frac{\omega}{k} = \frac{D_0 - d \cos \delta}{2D_0} \omega$$

где D_0 — диаметр окружности, проходящей через центры шариков, d — диаметр шарика и δ — угол контакта. Из этой формулы следует, что $k > 2$.

Если радиус R окружности, описываемой концами оси фигуры, известен, то возможные значения угла θ_0 и смещения h заключены в следующих пределах:

$$0 \leq \theta_0 \leq \frac{R}{l}, \quad 0 \leq h \leq R$$

Анализ формулы для скорости ухода гироскопа при нутационных колебаниях показывает, что движение гироскопа на шариковых подшипниках при наличии смещения оси фигуры относительно оси симметрии внешних колец подшипников аналогично движению динамически несбалансированного гироскопа, у которого полярный момент инерции в k раз больше $C^* = kC$, угол между осью динамической симметрии и осью собственного вращения равен θ_0 , а скорость собственного вращения в k раз меньше и равна λ . Скорость ухода обращается в нуль при $A = kC$, т. е. для гироскопов с сильно вытянутым эллипсоидом инерции, так как $k > 2$. Обычно гироскопы имеют сплюснутый эллипсоид инерции, поэтому влияние смещений оси осимметрии гироскопа при вращении подшипника на уход может быть одного порядка с влиянием динамического дебаланса, исследованного Д. М. Климовым [5].

В принятой схеме предполагается, что сепараторы подшипников вращаются синхронно. Строгая синхронность вращения сепараторов в реальных условиях, вероятно, не наблюдается: поэтому интересно исследовать случай, когда концы оси фигуры гироскопа вращаются относительно оси Oz с различными угловыми скоростями.

Кроме того, для реальных условий нужно исследовать более тщательно смещение оси фигуры гироскопа в процессе движения. Известно, что конец оси вала, вращающегося на шариковых подшипниках, описывает сложную траекторию. Пример такой траектории приведен в работе Ямамото [6], где рассматриваются колебания упругого вала с диском, вращающегося на шариковых подшипниках.

Поступила 10 VII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. С у с л о в Г. К. Теоретическая механика. М.—Л., Гостехиздат, Изд. 3-е, 1946.
2. M a g n u s К. Auswanderungerscheinungen an schwingenden Kreiseln in kardanischer Lagerung, Advances Aeronaut. Sci. Vol. 1, London — New York — Paris — Los Angeles, Pergamon Press, 1957, p. p. 507—523.
3. Л у р ь е А. И. Заметки по аналитической механике, ПММ, 1957, т. XXI, вып. 6, стр. 759—768.
4. П а л ь м г р е н А. Шариковые и роликовые подшипники, М., Машгиз, 1949 г.
5. К л и м о в Д. М. О движении гироскопа в кардановом подвесе с неаксиально насаженным ротором. ДАН СССР, 1959, т. 124, № 3, стр. 537—539.
6. Y a m a m o t o Т. On critical speeds of a shaft supported by a ball bearing, J. Appl. Mech., 1959, 26, № 2, 199—204.

О ПРИВОДИМОСТИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОГОРИЗОНТКОМПАСА И ДВУХГИРОСКОПИЧЕСКОЙ ВЕРТИКАЛИ

В. Ф. Ляшенко (Москва)

Обобщаются некоторые результаты работы [1]. Дается обоснование перехода к упрощенным уравнениям Геккелера для произвольного движения точки подвеса гироскопического компаса по земной сфере с помощью теоремы Н. П. Еругина [2]. Аналогичный вопрос также рассматривается применительно к двухгироскопической вертикали [3].

1. Уравнения возмущенного движения гироскопического компаса при отсутствии демпфирования имеют [4] вид

$$mlv \frac{d\alpha}{dt} + ml \frac{dv}{dt} \alpha - mgl\beta - \Omega 2B \sin \epsilon^\circ \delta = 0 \quad \frac{d\beta}{dt} + \frac{v}{R} \alpha - \Omega \gamma = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} + \frac{2B \sin \epsilon^\circ}{mlR} \delta + \Omega \beta = 0, \quad \frac{d}{dt} (2B \sin \epsilon^\circ \delta) - mgl\gamma + mlv\Omega\alpha = 0$$

$$v = \sqrt{(RU \cos \varphi + v_E)^2 + v_N^2}, \quad \Omega = u \sin \varphi + \frac{v_E}{R} \operatorname{tg} \varphi - \dot{\alpha}^*, \quad \alpha^* = - \frac{v_N}{Ru \cos \varphi + v_E}$$