Приращение потенциальной энергии тела при отсчете смещений от положения равновесия имеет вид

$$V = \frac{1}{2}\int_\omega c_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l}\, d\omega$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad (x \in \sigma'), \qquad \mathbf{t}_n = 0 \quad (x \in \sigma''); \qquad u_n = 0, \quad t_{ns} = 0 \quad (x \in \sigma''') \tag{4.4}$$

Здесь c_{ijkl} — тензор упругих констант. По повторяющимся индексам происходит суммирование от 1 до 3. Из неравенств [13]

$$\int_\omega u_{i,j}\, u_{i,j}\, d\omega \geqslant C_2 \int_\omega u_i u_i\, d\omega \tag{4.5}$$

$$\int_\omega c_{ijkl}\, u_{i,j}\, u_{k,l}\, d\omega \geqslant C_3 \int_\omega u_{i,j}\, u_{i,j}\, d\omega \qquad \text{(неравенство Корна)} \tag{4.6}$$

где C_2 и C_3 — фиксированные положительные постоянные, не зависящие от $\mathbf{u}$, вытекает устойчивость равновесия по метрикам ρ_8, ρ_9

$$\rho_8 = \sup_x |\mathbf{u}| + \sup_x \sqrt{u_{i,j} u_{i,j}} + \sup_x |\mathbf{u}_t| \qquad (x \in \omega) \tag{4.7}$$

$$\rho_9 = \left\{ \int_\omega (\mathbf{u}^2 + u_{i,j}\, u_{i,j} + \mathbf{u}_t^2)\, d\omega \right\}^{1/2} \tag{4.8}$$

Поступила 18 IX 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Лежен-Дирихле П. Г. Об устойчивости равновесия. Лагранж Ж. Аналитическая механика. Т. I, дополн. II. ГТТИ, 1950.
2. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ГТТИ, 1950.
3. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. ГТТИ, 1955.
4. Мовчан А. А. Устойчивость процессов по двум материкам. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 6.
5. Мовчан А. А. Об устойчивости движения сплошных тел. Теорема Лагранжа и ее обращение. Инж. сб., 1960, т. XXIX.
6. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. ГТТИ, 1947.
7. Лаврентьев М. А. и Люстерник Л. А. Основы вариационного исчисления. Т. I, ч. II, ОНТИ, 1935.
8. Kneser A. Die stabilität des Gleichgewichts hängender schwerer Fäden. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1903, Bd. 125, Heft III.
9. Born M. Untersuchungen über die Stabilität der elastischen Linie in Ebene unp Raum. Dissertation. Göttingen, 1906.
10. Hadamard I. Sur quelques questions de calcul des variations. Annales scientifiques de l'école normale supérieure, 1907, tome XXIV.
11. Fubini G. Il teorema di Osgood nel calcolo delle variazioni degli integrali multipli. Atti dellareale accademia dei Lincei. Rendiconti, 1910, Volume XIX.
12. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики. Т. II, ГТТИ, 1945, гл. VI.
13. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. ГТТИ, 1952.

К ПОСТРОЕНИЮ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

А. П. Проскуряков (Москва)

1. В работе [1] рассматривалась квазилинейная система вида

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} \ddot{x}_k + c_{ik} x_k) = \mu F_i\, (x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, \mu) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

при предположении аналитичности правых частей уравнений и малости параметра μ Порождающая система являлась линейной консервативной системой с постоянными коэффициентами, кинетическая и потенциальная энергия которой выражалась определенно положительными квадратичными формами. Кроме того, предполагалось, что все корни уравнения частот

$$\Delta(\omega^2) = |c_{ik} - \omega^2 a_{ik}| = 0 \tag{1.2}$$

различны.

В этой работе утверждалось, что если порождающая система содержит l частот, соизмеримых между собой, например $\omega_1, \ldots, \omega_l$, которым отвечает периодическое решение с некоторым периодом T_0, то соответствующее периодическое решение исходной нелинейной системы, обращающееся в порождающее при $\mu = 0$, имеет вид, аналогичный виду решения порождающей системы. Обозначим через $p_k^{(r)}$ отношение алгебраических дополнений соответствующих элементов определителя (1.2):

$$p_k^{(r)} = \frac{\Delta_{ik}(\omega_r^2)}{\Delta_{i1}(\omega_r^2)}, \qquad p_1^{(r)} = 1 \qquad (i=1,\ldots, n) \tag{1.3}$$

Периодическое решение порождающей системы с периодом T_0 имеет вид:

$$x_{k0}(t) = \sum_{r=1}^{l} p_k^{(r)} \left(A_r \cos \omega_r t + \frac{B_r}{\omega_r} \sin \omega_r t \right) \qquad (k=1, \ldots, n) \tag{1.4}$$

(один из коэффициентов B_r в силу автономности системы может быть принят равным нулю), поэтому утверждалось, что решение системы (1.1) также имеет вид

$$x_k(t) = \sum_{r=1}^{l} p_k^{(r)} x^{(r)}(t) \qquad (k=1, \ldots, n)$$

Однако это утверждение верно только при $l = n$, т. е. когда все частоты порождающей системы соизмеримы между собой.

2. Рассмотрим случай, когда l частот порождающей системы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_l$ соизмеримы между собой, но при этом $l < n$. В этом случае, как указано выше, существует периодическое решение порождающей системы с некоторым периодом T_0, отвечающим указанным частотам. Решение порождающей системы имеет вид (1.4). В силу автономности будем считать, что $B_1 = 0$.

Будем искать по методу малого параметра периодическое решение исходной нелинейной системы с периодом $T_0 + \alpha$, обращающееся при $\mu = 0$ в вышеуказанное порождающее. Для исходной системы (1.1) примем следующие начальные условия [1]

$$\begin{aligned} x_k(0) &= \sum_{r=1}^{l} p_k^{(r)} (A_r + \beta_r) + \sum_{r=l+1}^{n} p_k^{(r)} \varphi_{r-l}(\beta_1, \ldots, \beta_l, \gamma_2, \ldots, \gamma_l, \mu) \\ & \qquad\qquad (k=1, \ldots, n) \\ \dot{x}_k(0) &= \sum_{r=2}^{l} p_k^{(r)} (B_r + \gamma_r) + \sum_{r=l+1}^{n} p_k^{(r)} \psi_{r-l}(\beta_1, \ldots, \beta_l, \gamma_2, \ldots, \gamma_l, \mu) \end{aligned} \tag{2.1}$$

В силу автономности системы принято, что $\gamma_1 = 0$. Функции φ_{r-l} и ψ_{r-l} — аналитические от своих аргументов [2], причем

$$\varphi_{r-l}(\beta_1, \ldots, \beta_l, \gamma_2, \ldots, \gamma_l, 0) = 0, \qquad \psi_{r-l}(\beta_1, \ldots, \beta_l, \gamma_2, \ldots, \gamma_l, 0) = 0$$

Таким образом, решение системы (1.1) можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} x_k(t, \beta, \gamma, \mu) &= (A_1 + \beta_1) \cos \omega_1 t + \sum_{r=2}^{l} p_k^{(r)} \left[(A_r + \beta_r) \cos \omega_r t + \frac{B_r + \gamma_r}{\omega_r} \sin \omega_r t \right] + \\ &+ \sum_{r=l+1}^{n} p_k^{(r)} \left[\varphi_{r-l}(\beta,\gamma,\mu) \cos \omega_r t + \frac{\psi_{r-l}(\beta,\gamma,\mu)}{\omega_r} \sin \omega_r t \right] + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left[C_{km}(t) + \sum_{r=1}^{l} \frac{\partial C_{km}}{\partial A_r} \beta_r + \sum_{r=2}^{l} \frac{\partial C_{km}}{\partial B_r} \gamma_r + \ldots \right] \mu^m \qquad (k=1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{2.2}$$

---

[1] Строго говоря, параметры φ и ψ являются функциями $A+\beta$, $B+\gamma$ и μ. На это обстоятельство впервые обратил внимание Ю. М. Копнин.

Вычисляя коэффициенты $C_{km}(t)$, как это сделано в [1], и сохраняя при этом все слагаемые в разложении $C_{km}(t)$, получаем

$$C_{km}(t)=\frac{1}{\Delta_0}\sum_{r=1}^{n}\left[\omega_r\prod_{s\neq r}^{n}(\omega_s^2-\omega_r^2)\right]^{-1}\int_0^t R_{km}^{(r)}(t')\sin\omega_r(t-t')\,dt' \tag{2.3}$$

где

$$R_{km}^{(r)}(t)=\sum_{i=1}^{n}\Delta_{ik}(\omega_r^2)H_{im}(t),\qquad H_{im}(t)=\frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^{m-1}F_i}{d\mu^{m-1}}\right)_{\mu=\beta=\gamma=0} \tag{2.4}$$

Введем обозначения

$$C_m^{(r)}(t)=\left[\Delta_0\,\omega_r\prod_{s\neq r}^{n}(\omega_s^2-\omega_r^2)\right]^{-1}\int_0^t R_{1m}^{(r)}(t')\sin\omega_r(t-t')\,dt' \tag{2.5}$$

Тогда, учитывая соотношения (1.3), будем иметь

$$C_{km}(t)=\sum_{r=1}^{n}p_k^{(r)}C_m^{(r)}(t) \tag{2.6}$$

Итак, решение системы (1.1) можно представить в виде

$$x_k(t)=\sum_{r=1}^{n}p_k^{(r)}x^{(r)}(t)\qquad (k=1,\ldots,n) \tag{2.7}$$

Величины $x^{(r)}(t)$ определяются формулами

$$x^{(r)}(t)=(A_r+\beta_r)\cos\omega_r t+\frac{B_r+\gamma_r}{\omega_r}\sin\omega_r t+ \tag{2.8}$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left[C_m^{(r)}(t)+\sum_{s=1}^{l}\frac{\partial C_m^{(r)}}{\partial A_s}\beta_s+\sum_{s=2}^{l}\frac{\partial C_m^{(r)}}{\partial B_s}\gamma_s+\ldots\right]\mu^m$$

$$B_1=0,\qquad \gamma_1=0\qquad (r=1,\ldots,l)$$

$$x^{(r)}(t)=\varphi_{r-l}(\beta,\gamma,\mu)\cos\omega_r t+\frac{\psi_{r-l}(\beta,\gamma,\mu)}{\omega_r}\sin\omega_r t+\qquad (r=l+1,\ldots,n) \tag{2.9}$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left[C_m^{(r)}(t)+\sum_{s=1}^{l}\frac{\partial C_m^{(r)}}{\partial A_s}\beta_s+\sum_{s=2}^{l}\frac{\partial C_m^{(r)}}{\partial B_s}\gamma_s+\ldots\right]\mu^m$$

Полученный результат может быть сформулирован следующим образом.

Если порождающее решение квазилинейной автономной системы (1.1) содержит l различных соизмеримых между собой частот, которые определяют периодическое решение с некоторым периодом T_0, то соответствующее периодическое решение исходной квазилинейной системы с периодом $T_0+\alpha$ (α исчезает при $\mu=0$), обращающееся в порождающее при $\mu=0$, будет иметь вид (2.7) при любых значениях l от 1 до n.

Замечание. Ошибка в работе [1] произошла из-за отбрасывания в разложении (2.3) всех слагаемых с индексом от $r=l+1$ до $r=n$, как не содержащих членов с частотами $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_l$, что неверно.

В самом деле, рассмотрим интеграл

$$J_r=\int_0^t R_{km}^{(r)}(t')\sin\omega_r(t-t')\,dt'\qquad (r=l+1,\ldots,n)$$

Пусть функция $R_{km}^{(r)}$ является периодической функцией с периодом T_0, разложение которой в ряд Фурье будет

$$R_{km}^{(r)}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(K_n\cos n\omega_0 t+L_n\sin n\omega_0 t)$$

После вычислений получаем

$$J_r = -\omega_r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n \cos n\omega_0 t + L_n \sin n\,\omega_0 t}{n^2\omega_0^2 - \omega_r^2} +$$

$$+\omega_r \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n}{n^2\,\omega_0^2 - \omega_r^2} \cos \omega_r t + \omega_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nL_n}{n^2\omega_0^2 - \omega_r^2} \sin \omega_r t$$

Таким образом, функции $C_{km}^{(r)}(t)$ при $r = l+1, \ldots, n$ содержат в качестве слагаемых периодическую функцию с периодом T_0 и первые гармоники с соответствующей частотой ω_r.

3. Рассмотрим более детально случай двух степеней свободы, когда порождающая система содержит две несоизмеримые частоты. В работе [3] этот случай, изложенный в п. 5, основывался на ошибочных результатах работы [1] и, следовательно, освещен неправильно [1]. Имеем уравнения движения системы

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{x}_1 + a_{12}\ddot{x}_2 + c_{11}x_1 + c_{12}x_2 &= \mu F_1(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \mu) \\ a_{21}\ddot{x}_1 + a_{22}\ddot{x}_2 + c_{21}x_1 + c_{22}x_2 &= \mu F_2(x_1, x_2, \dot{x}_2, \dot{x}_2, \mu) \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Ищем периодические решения этой системы с частотой ω_1. Порождающее решение в этом случае будет

$$x_{10}(t) = A_0 \cos \omega_1 t, \qquad x_{20}(t) = p_1 A_0 \cos \omega_1 t \qquad (3.2)$$

Здесь

$$p_r = p_k^{(r)} = -\frac{c_{11} - \omega_r^2 a_{11}}{c_{12} - \omega_r^2 a_{12}} = -\frac{c_{21} - \omega_r^2 a_{21}}{c_{22} - \omega_r^2 a_{22}} \quad (r = 1, 2) \qquad (3.3)$$

Начальные условия для системы (3.1) примем в виде

$$\begin{aligned} x_1(0) &= A_0 + \beta + \varphi(\beta, \mu), & \dot{x}_1(0) &= \psi(\beta, \mu) \\ x_2(0) &= p_1(A_0 + \beta) + p_2\varphi(\beta, \mu), & \dot{x}_2(0) &= p_2\psi(\beta, \mu) \end{aligned} \qquad (3.4)$$

Решение системы (3.1) можно представить согласно предыдущему в виде

$$x_1(t) = x^{(1)}(t) + x^{(2)}(t), \qquad x_2(t) = p_1 x^{(1)}(t) + p_2 x^{(2)}(t) \qquad (3.5)$$

Разложение функций $x^{(1)}(t)$ и $x^{(2)}(t)$ по степеням параметров β и μ будет

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t) &= (A_0 + \beta)\cos\omega_1 t + \sum_{m=1}^{\infty} \left[C_m^{(1)}(t) + \frac{\partial C_m^{(1)}}{\partial A_0}\beta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_m^{(1)}}{\partial A_0^2}\beta^2 + \ldots\right]\mu^m \\ x^{(2)}(t) &= \varphi\cos\omega_2 t + \frac{\psi}{\omega_2}\sin\omega_2 t + \sum_{m=1}^{\infty} \left[C_m^{(2)}(t) + \frac{\partial C_m^{(2)}}{\partial A_0}\beta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_m^{(2)}}{\partial A_0^2}\beta^2 + \ldots\right]\mu^m \end{aligned} \qquad (3.6)$$

Функции $C_m^{(1)}(t)$ и $C_m^{(2)}(t)$ определяются формулами

$$\begin{aligned} C_m^{(1)}(t) &= \frac{1}{\Delta_0(\omega_2^2 - \omega_1^2)\,\omega_1} \int_0^t R_m^{(1)}(t') \sin\omega_1(t - t')\,dt' \\ C_m^{(2)}(t) &= \frac{1}{\Delta_0(\omega_1^2 - \omega_2^2)\,\omega_2} \int_0^t R_m^{(2)}(t') \sin\omega_2(t - t')\,dt' \end{aligned} \qquad (3.7)$$

---

[1] В работу [3] необходимо внести еще следующие исправления. На стр. 1103 строка 6 снизу: формула $m_1\omega_1 = m_2\omega_{12}$ должна быть заменена на следующую:

$$m_1 \frac{2\pi}{\omega_1} = m_2 \frac{2\pi}{\omega_2} = T_0,$$

а в строке 4 снизу формула для ω_0 должна иметь вид:

$$\omega_0 = \frac{\omega_1}{m_1} = \frac{\omega_2}{m_2}$$

Здесь обозначено

$$R_m^{(r)}(t) = (c_{22} - \omega_r^2 a_{22}) H_{1m}(t) - (c_{12} - \omega_r^2 a_{12}) H_{2m}(t) \qquad (r = 1, 2) \tag{3.8}$$

Условия периодичности для функций $x^{(1)}(t)$ и $x^{(2)}(t)$ и их первых производных будут

$$\begin{aligned} x^{(1)}(T_1 + \alpha) &= A_0 + \beta, & \dot{x}^{(1)}(T_1 + \alpha) &= 0 \\ x^{(2)}(T_1 + \alpha) &= \varphi(\beta, \mu), & \dot{x}^{(2)}(T_1 + \alpha) &= \psi(\beta, \mu) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Из этих условий находятся четыре неизвестные α, β, φ и ψ. При этом задача о построении периодических решений системы (3.1) с периодом T_1 распадается на две отдельные задачи о построении периодических функций $x^{(1)}(t)$ и $x^{(2)}(t)$ с тем же периодом T_1, решаемых последовательно.

Первая задача совершенно аналогична задаче о построении периодических решений квазилинейной автономной системы с одной степенью свободы. При решении этой задачи определяются величины α и β. При этом амплитуда порождающего решения A_0 находится из уравнения

$$C_1^{(1)}(T_1) = 0$$

В зависимости от кратности корней этого уравнения величина β может быть представлена рядами по целым или дробным степеням параметра μ. Анализ возможных случаев, данный в работе [4], целиком переносится на рассматриваемую систему.

Переходим ко второй задаче: к построению функции $x^{(2)}(t)$. Для этого необходимо определить величины $\varphi(\beta, \mu)$ и $\psi(\beta, \mu)$. Представим эти величины в виде рядов

$$\begin{aligned} \varphi(\beta, \mu) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(P_m + \frac{\partial P_m}{\partial A_0} \beta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_m}{\partial A_0^2} \beta^2 + \ldots \right) \mu^m \\ \psi(\beta, \mu) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(Q_m + \frac{\partial Q_m}{\partial A_0} \beta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q_m}{\partial A_0^2} \beta^2 + \ldots \right) \mu^m \end{aligned} \tag{3.10}$$

Разлагая левые части условий периодичности для функции $x^{(2)}(t)$ и ее первой производной в ряды по μ и β и приравнивая друг другу коэффициенты при одинаковых степенях μ в каждом из указанных условий, получаем бесконечную систему уравнений для определения коэффициентов P_m и Q_m:

$$\begin{aligned} P_m (1 - \cos \omega_2 T_1) - \frac{Q_m}{\omega_2} \sin \omega_2 T_1 &= W_m(T_1) \\ P_m \omega_2 \sin \omega_2 T_1 + Q_m (1 - \cos \omega_2 T_1) &= \dot{W}_m(T_1) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Введем обозначение

$$C_m^{(2)*}(t) = C_m^{(2)}(t) + P_m \cos \omega_2 t + \frac{Q_m}{\omega_2} \sin \omega_2 t \tag{3.12}$$

Тогда значения первых трех величин $W_m(T_1)$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} W_1(T_1) &= C_1^{(2)}(T_1) \\ W_2(T_1) &= C_2^{(2)}(T_1) + N_1 \dot{C}_1^{(2)*}(T_1) \\ W_3(T_1) &= C_3^{(2)}(T_1) + N_1 \dot{C}_2^{(2)*}(T_1) + N_2 \dot{C}_1^{(2)*}(T_1) + \frac{1}{2} N_1^2 \ddot{C}_1^{(2)*}(T_1) \end{aligned} \tag{3.13}$$

Величины $N_1, N_2, \ldots$ являются коэффициентами разложения α в двойной ряд по β и μ:

$$\alpha = \sum_{m=1}^{\infty} \left(N_m + \frac{\partial N_m}{\partial A_0} \beta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 N_m}{\partial A_0^2} \beta^2 + \ldots \right) \mu^m \tag{3.14}$$

Кроме того, следует отметить, что

$$\dot{W}_m(T_1)=\left(\frac{dW_m(t)}{dt}\right)_{t=T_1}$$

Решая уравнения (3.11), получаем

$$P_m=\frac{1}{2}W_m(T_1)+\frac{1}{2\omega_2}\frac{\sin\omega_2T_1}{1-\cos\omega_2T_1}\dot{W}_m(T_1)$$

$$Q_m=\frac{1}{2}\dot{W}_m(T_1)-\frac{\omega_2}{2}\frac{\sin\omega_2T_1}{1-\cos\omega_2T_1}W_m(T_1) \qquad (3.15)$$

Из этих формул последовательно определяются величины P_1 и Q_1, P_2 и Q_2; P_3 и Q_3 и т. д. Нетрудно проверить, что функции $C_m^{(2)*}(t)$ являются периодическими функциями t с периодом, равным T_1.

Далее введем функции

$$C_{1m}^*(t)=C_m^{(1)}(t)+C_m^{(2)*}(t),\qquad C_{2m}^*(t)=p_1C_m^{(1)}(t)+p_2C_m^{(2)*}(t) \qquad (3.16)$$

Величины $H_{im}(t)$, определяемые формулой (2.4), в раскрытом виде будут

$$H_{i1}(t)=F_i(x_{10},x_{20},\dot{x}_{10},\dot{x}_{20},0)$$

$$H_{i2}(t)=\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right)_0C_{k1}^*+\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\partial F_i}{\partial\dot{x}_k}\right)_0\dot{C}_{k1}^*+\left(\frac{\partial F_i}{\partial\mu}\right)_0$$

$$H_{i3}(t)=\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{2}\left(\frac{\partial^2F_i}{\partial x_k\partial x_j}\right)_0C_{k1}^*C_{j1}^*+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{2}\left(\frac{\partial^2F_i}{\partial\dot{x}_k\partial\dot{x}_j}\right)_0\dot{C}_{k1}^*\dot{C}_{j1}^*+$$
$$+\sum_{k,j=1}^{2}\left(\frac{\partial^2F_i}{\partial x_k\partial\dot{x}_j}\right)_0C_{k1}^*\dot{C}_{j1}^*+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2F_i}{\partial\mu^2}\right)_0+\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\partial^2F_i}{\partial x_k\partial\mu}\right)_0C_{k1}^*+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\partial^2F_i}{\partial\dot{x}_k\partial\mu}\right)_0\dot{C}_{k1}^*+\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right)_0C_{k1}^*+\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\partial F_i}{\partial\dot{x}_k}\right)_0\dot{C}_{k1}^* \qquad (3.17)$$

Значок 0 у производных от функции F_i означает, что в эти производные вместо x_1, x_2, $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, μ нужно подставить соответственно x_{10}, x_{20}, $\dot{x}_{10}$, $\dot{x}_{20}$, 0.

Если в порождающей системе одно из переменных отделяется, например x_1 при $a_{12}=c_{12}=0$, то один из коэффициентов p_r, в данном случае p_2, обращается в бесконечность. Так как функция

$$X^{(2)}(t)=p_2x^{(2)}(t)$$

а также величины

$$\Phi(\beta,\mu)=p_2\varphi(\beta,\mu),\qquad \Psi(\beta,\mu)=p_2\psi(\beta,\mu)$$

сохраняют при этом конечные значения, то решение системы (3.1) может быть представлено в виде

$$x_1(t)=x^{(1)}(t),\qquad x_2(t)=p_1x^{(1)}(t)+X^{(2)}(t)$$

Начальные условия при этом будут

$$x_1(0)=A_0+\beta,\qquad \dot{x}_1(0)=0$$
$$x_2(0)=p_1(A_0+\beta)+\Phi(\beta,\mu),\qquad \dot{x}_2(0)=\Psi(\beta,\mu)$$

Схема вычислений сохраняется, только вместо $x^{(2)}(t)$, $\varphi(\beta,\mu)$ и $\psi(\beta,\mu)$ необходимо вычислять величины $X^{(2)}(t)$, $\Phi(\beta,\mu)$ и $\Psi(\beta,\mu)$. Если порождающая система приведена к нормальным координатам, то

$$p_1=0,\qquad p_2=\infty$$

В случае, когда одно из переменных отделяется в нелинейной системе, задачу проще решать непосредственно, определяя отделившееся переменное.

В заключение приведем формулы для функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$, представляющих решение системы (3.1). Пусть β определяется рядом по целым степеням μ:

$$\beta = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \mu^m \tag{3.18}$$

Тогда поправка к периоду α определяется таким же рядом:

$$\alpha = T_1 \sum_{m=1}^{\infty} h_m \mu^m \tag{3.19}$$

Для построения периодического решения системы (3.1) с периодом, не зависящим от параметра μ, сделаем, как обычно, замену независимого переменного

$$t = \tau (1 + h_1\mu + h_2\mu^2 + \ldots) \tag{3.20}$$

Будем искать решение в функции τ. Это решение имеет период, равный T_1. Функции $x_1(\tau)$ и $x_2(\tau)$ будут представляться рядами по целым степеням параметра μ

$$x_k(\tau) = x_{k0}(\tau) + \mu x_{k1}(\tau) + \mu^2 x_{k2}(\tau) + \ldots \qquad (k = 1, 2) \tag{3.21}$$

причем

$$x_{1m}(\tau) = x_m^{(1)}(\tau) + x_m^{(2)}(\tau), \qquad x_{2m}(\tau) = p_1 x_m^{(1)}(\tau) + p_2 x_m^{(2)}(\tau) \tag{3.22}$$

Порождающее решение представлено формулами (3.2). Следовательно,

$$x_0^{(1)}(\tau) = A_0 \cos \omega_1 \tau, \qquad x_0^{(2)}(\tau) = 0 \tag{3.23}$$

Последующие два коэффициента для обеих функций будут

$$x_1^{(1)}(\tau) = A_1 \cos \omega_1\tau + C_1^{(1)}(\tau) - h_1\tau A_0 \omega_1 \sin \omega_1\tau \qquad x_1^{(2)}(\tau) = C_1^{(2)*}(\tau)$$

$$x_2^{(1)}(\tau) = A_2 \cos \omega_1 \tau + C_2^{(1)}(\tau) + A_1 \frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial A_0} + h_1\tau \frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial \tau} - (h_1 A_1 + h_2 A_0)\tau\omega_1 \sin \omega_1\tau -$$

$$- \frac{1}{2} h_1^2 \tau^2 A_0 \omega_1^2 \cos \omega_1\tau, \qquad x_2^{(2)}(\tau) = C_2^{(2)*}(\tau) + A_1 \frac{\partial C_1^{(2)*}}{\partial A_0} + h_1\tau \frac{\partial C_1^{(2)*}}{\partial \tau} \tag{3.24}$$

В случае, когда величина β разлагается в ряд по дробным степеням параметра μ, решение $x_k(\tau)$ также будет разлагаться по таким же дробным степеням параметра μ. Соответствующие формулы для коэффициентов разложений $x_k(\tau)$ могут быть легко вычислены аналогично тому, как это сделано в [4].

4. Изложенный метод построения периодических решений автономных систем с двумя степенями свободы легко обобщается на системы с n степенями свободы. Например, если порождающая система имеет n различных частот, из которых l частот соизмеримы между собой, то задача сводится к задаче с l степенями свободы, а затем последовательно определяются функции $x^{(l+1)}(t), \ldots, x^{(n)}(t)$. В частности, когда имеется частота, например ω_1, несоизмеримая ни с одной из других частот, то построение периодических решений такой системы с периодом T_1 распадается на n отдельных задач последовательного определения периодических функций $x^{(1)}(t), \ldots, x^{(n)}(t)$.

Построение первой из них $x^{(1)}(t)$ совершенно аналогично отысканию периодического решения для системы с одной степенью свободы. Построение же остальных функций выполняется одним и тем же способом и ничем не отличается от построения функции $x^{(2)}(t)$ в рассмотренном случае двух степеней свободы.

Поступила 2 XII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Проскуряков А. П. Об одном свойстве периодических решений квазилинейных автономных систем с несколькими степенями свободы. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 4.
2. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехиздат, 1956.
3. Проскуряков А. П. Периодические колебания квазилинейных автономных систем с двумя степенями свободы. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 6.
4. Проскуряков А. П. Периодические решения квазилинейных автономных систем с одной степенью свободы в виде рядов по дробным степеням параметра. ПММ, 1961, т. XXV, вып. 5.