ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

А. М. Слободкин (Москва)

На примере некоторых простых систем с бесконечным числом степеней свободы анализируются возможности прямого метода доказательства устойчивости при использовании в качестве функционала Ляпунова приращения полной энергии системы. Прямым методом доказывается устойчивость равновесия, определяемого в линейной теории упругости.

1. Основой прямого доказательства классической теоремы об устойчивости равновесия консервативной системы с конечным числом степеней свободы [1] является следующее свойство непрерывной функции конечного числа переменных: нижняя грань разности между значением функции на сфере достаточно малого радиуса с центром в точке строгого относительного минимума и минимальным значением положительна. Это свойство является существенным моментом при доказательстве общей теоремы об устойчивости [2-3]. В несколько более сильной форме оно фигурирует в теории прямого метода Ляпунова [4] (определение (4.1)). Во избежание введения новой терминологии это свойство будет называться определенной положительностью приращения функции. При переходе от дискретных систем к непрерывным, чему соответствует переход от функций к функционалам, возникают следующие вопросы.

1) Для каких метрик в соответствующем функциональном пространстве сохраняется свойство определенной положительности приращения функционала?

2) Насколько полное представление об устойчивости дает интеграл энергии по сравнению с результатами, вытекающими из непосредственного решения задачи Коши?

2. Рассмотрим задачу об устойчивости равновесия однородной свободной струны, натянутой между двумя неподвижными точками. Плоское движение описывается уравнениями

$$\mu u_{tt} = T_1 u_{xx} \qquad (0 \leqslant x \leqslant l,\ t \geqslant 0), \qquad u(0, t) = 0, \qquad u(l, t) = 0 \tag{2.1}$$

Здесь μ — линейная плотность и T_1 — натяжение струны. Нулевым начальным данным отвечает тривиальное равновесие

$$u(x, t) \equiv 0 \tag{2.2}$$

Полная энергия

$$H = \frac{1}{2}\int_0^l \mu u_t^2\, dx + \frac{1}{2}\int_0^l T_1 u_x^2\, dx \tag{2.3}$$

остается постоянной вдоль движения, непрерывна по метрике

$$\rho_1 = \sup_x |u| + \sup_x |u_x| + \sup_x |u_t| \qquad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{2.4}$$

и ввиду неравенств

$$\int_0^l u_x^2\, dx \geqslant \frac{\pi^2}{l^2}\int_0^l u^2\, dx, \qquad \int_0^l u_x^2\, dx > \frac{4}{l}\,(\sup_x |u|)^2 \tag{2.5}$$

определенно положительна по метрикам ρ_2 и ρ_3

$$\rho_2 = \left\{\int_0^l (u^2 + u_x^2 + u_t^2)\, dx\right\}^{1/2}, \qquad \rho_3 = \sup_x |u| \qquad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{2.6}$$

Отсюда следует [4,5] устойчивость равновесия (2.2) по метрикам ρ_1, ρ_2 и по метрикам ρ_1, ρ_3.

Как известно [6], решение задачи Коши дается формулой

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x - at) + u_0(x + at) + \frac{1}{a}\int_{x-at}^{x+at} v_0(\xi)\, d\xi\right] \qquad \left(a = \sqrt{\frac{T_1}{\mu}}\right) \tag{2.7}$$

где u_0 и v_0 — функции, полученные нечетно периодическим продолжением с периодом $2l$ на всю числовую прямую начальных значений отклонений и скоростей точек струны.

Из (2.7) легко получить устойчивость равновесия (2.2) по метрикам ρ_4, ρ_3,

$$\rho_4 = \sup_x |u| + \sup_x |u_t| \qquad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{2.8}$$

а также устойчивость (2.2) по метрике ρ_1.

Между тем полная энергия H заведомо не является определенно положительной ни по метрике ρ_1, ни по «статической» метрике

$$\rho_{1s} = \sup_x |u| + \sup_x |u_x| \qquad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{2.9}$$

На этом примере видно, что интеграл энергии дает лишь частичное представление о характере устойчивости равновесия, которой может обладать система.

3. Если потенциальная энергия системы является функционалом от функций одной переменной, то выполнение условий теоремы Осгуда [7] (которые лишь немного сильнее достаточных условий того, что потенциальная энергия имеет в положении равновесия сильный минимум) обеспечивает определенную положительность по метрике типа ρ_3 приращения полной энергии системы и, следовательно, устойчивость равновесия по метрикам типа ρ_1, ρ_3.

Таким путем Кнезер доказал устойчивость равновесия закрепленной по концам нити в поле силы тяжести [8]. Борн [9] ссылается на аналогичные соображения при рассмотрении устойчивости равновесия стержней.

Однако для систем, потенциальная энергия которых зависит от функций более чем одного переменного и их производных не выше чем первого порядка, уже нельзя ожидать [10, 11] положительной определенности приращения энергии по метрике типа ρ_3.

Рассмотрим, например, устойчивость равновесия закрепленной по контуру мембраны, находящейся под действием постоянной во времени поперечной нагрузки. Приращение потенциальной энергии мембраны при отсчете прогибов от положения равновесия имеет вид

$$U = \frac{1}{2} \iint\limits_D T_2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy, \qquad u|_\Gamma = 0 \tag{3.1}$$

Здесь T_2 — натяжение мембраны.

Как показал Адамар [10], этот функционал не является определенно положительным по метрике

$$\rho_5 = \sup_{x,y} |u|, \qquad (x, y) \in D \tag{3.2}$$

Однако имеет место [12] аналог первого из неравенств (2.5)

$$\iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy \geqslant C_1 \iint\limits_D u^2\, dx\, dy \tag{3.3}$$

Здесь C_1 — фиксированная положительная константа, не зависящая от u. Отсюда заключаем об устойчивости равновесия по метрикам ρ_6, ρ_7

$$\rho_6 = \sup_{x,y} |u| + \sup_{x,y} |u_x| + \sup_{x,y} |u_y| + \sup_{x,y} |u_t|, \qquad (x, y) \in D \tag{3.4}$$

$$\rho_7 = \left\{ \iint\limits_D (u^2 + u_x^2 + u_y^2 + u_t^2)\, dx\, dy \right\}^{1/2} \tag{3.5}$$

4. Рассмотрим вопрос об устойчивости равновесия в поле постоянных во времени массовых сил ограниченного упругого тела в рамках линейной теории упругости. Пусть на части σ' поверхности тела дано не зависящее от времени смещение $\mathbf{u}^\circ$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^\circ(x) \qquad (x \in \sigma') \tag{4.1}$$

на части σ'' — напряжение $\mathbf{t}_n^\circ$

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{t}_n^\circ(x) \qquad (x \in \sigma'') \tag{4.2}$$

а на части σ''' — контактное условие

$$u_n = u_n^\circ(x), \qquad t_{ns} = 0 \qquad (x \in \sigma''') \tag{4.3}$$

Случай, когда одна из частей σ'' или σ''' отсутствует, не исключается из рассмотрения.

Приращение потенциальной энергии тела при отсчете смещений от положения равновесия имеет вид

$$V = \frac{1}{2}\int_\omega c_{ijkl} u_{i,j}\, u_{k,l}\, d\omega$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad (x \in \sigma'), \qquad \mathbf{t}_n = 0 \quad (x \in \sigma''); \qquad u_n = 0, \quad t_{ns} = 0 \quad (x \in \sigma''') \tag{4.4}$$

Здесь c_{ijkl} — тензор упругих констант. По повторяющимся индексам происходит суммирование от 1 до 3. Из неравенств [13]

$$\int_\omega u_{i,j}\, u_{i,j}\, d\omega \geqslant C_2 \int_\omega u_i u_i\, d\omega \tag{4.5}$$

$$\int_\omega c_{ijkl}\, u_{i,j}\, u_{k,l}\, d\omega \geqslant C_3 \int_\omega u_{i,j}\, u_{i,j}\, d\omega \qquad \text{(неравенство Корна)} \tag{4.6}$$

где C_2 и C_3 — фиксированные положительные постоянные, не зависящие от $\mathbf{u}$, вытекает устойчивость равновесия по метрикам ρ_8, ρ_9

$$\rho_8 = \sup_x |\mathbf{u}| + \sup_x \sqrt{u_{i,j} u_{i,j}} + \sup_x |\mathbf{u}_t| \qquad (x \in \omega) \tag{4.7}$$

$$\rho_9 = \left\{\int_\omega (\mathbf{u}^2 + u_{i,j}\, u_{i,j} + \mathbf{u}_t^2)\, d\omega\right\}^{1/2} \tag{4.8}$$

Поступила 18 IX 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Лежен-Дирихле П. Г. Об устойчивости равновесия. Лагранж Ж. Аналитическая механика. Т. I, дополн. II. ГТТИ, 1950.
2. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ГТТИ, 1950.
3. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. ГТТИ, 1955.
4. Мовчан А. А. Устойчивость процессов по двум материкам. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 6.
5. Мовчан А. А. Об устойчивости движения сплошных тел. Теорема Лагранжа и ее обращение. Инж. сб., 1960, т. XXIX.
6. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. ГТТИ, 1947.
7. Лаврентьев М. А. и Люстерник Л. А. Основы вариационного исчисления. Т. I, ч. II, ОНТИ, 1935.
8. Kneser A. Die stabilität des Gleichgewichts hängender schwerer Fäden. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1903, Bd. 125, Heft III.
9. Born M. Untersuchungen über die Stabilität der elastischen Linie in Ebene unp Raum. Dissertation. Göttingen, 1906.
10. Hadamard I. Sur quelques questions de calcul des variations. Annales scientifiques de l'école normale supérieure, 1907, tome XXIV.
11. Fubini G. Il teorema di Osgood nel calcolo delle variazioni degli integrali multipli. Atti dellareale accademia dei Lincei. Rendiconti, 1910, Volume XIX.
12. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики. Т. II, ГТТИ, 1945, гл. VI.
13. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. ГТТИ, 1952.

К ПОСТРОЕНИЮ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

А. П. Проскуряков (Москва)

1. В работе [1] рассматривалась квазилинейная система вида

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}\ddot{x}_k + c_{ik}x_k) = \mu F_i\,(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, \mu) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

при предположении аналитичности правых частей уравнений и малости параметра μ Порождающая система являлась линейной консервативной системой с постоянными коэффициентами, кинетическая и потенциальная энергия которой выражалась определенно положительными квадратичными формами. Кроме того, предполагалось,