Предложенный метод построения уточненных теорий пластин и оболочек, отличающийся достаточной прозрачностью, дает возможность без излишних ухищрений получить уравнения задачи. Однако нужно отметить, что решение уравнений (2.1) или в более простом варианте уравнений (3.3)—(3.6) возможно лишь при использовании современных счетно-решающих устройств. На этом пути может быть применен метод конечных разностей. Кроме того, вариационное уравнение (1.4) дает возможность решать задачи о напряженно-деформированном состоянии плит и оболочек, на граничном срезе которых поставлены краевые условия, меняющиеся по своему характеру по толщине. Например, круглая толстая плита может быть жестко заделана на участке $-h \leqslant z \leqslant \zeta$ граничного среза и свободна от каких-либо нагрузок на участке $\zeta \leqslant z \leqslant h$ $(-h < \zeta < h)$.

О поправках, вносимых за счет уточнения уравнений равновесия и краевых условий, сказано в работе [6].

Поступила 15 IX 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Кильчевский Н. А. Обобщение современной теории оболочек. ПММ, 1939, т. II, вып. 4.
2. Chien W. Z. The intrinsic theory of thin shells and plates. Quart. of Appl. Math. 1944. vol. I, No. 4; vol. II, No 1, 2.
3. Блох В. Н. К общей теории упругих толстых плит. Инж. сб., 1954, т. XVIII.
4. Муштари Х. М. Теория изгиба плит средней толщины. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 2.
5. Муштари Х. М., Терегулов И. Г. К теории оболочек средней толщины. ДАН СССР, 1959, т. 128, № 6; Теория пологих ортотропных оболочек средней толщины. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 6.
6. Терегулов И. Г. К теории пластин средней толщины. Тр. конф. по теории оболочек. Казань, 1960.
7. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates. J. Math. Phys., 1944, vol. 23.
8. Гольденвейзер А. Л. О теории изгиба пластинок Рейсснера. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1958, № 4.
9. Терегулов И. Г. К вариационным методам в нелинейной теории упругости. ДАН СССР, 1961, т. 142, № 3.

О РАСЧЕТЕ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В УПРУГИХ ОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ С ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ГРАНИЦАМИ РАЗДЕЛА

К. И. Огурцов

(Ленинград)

Количественные исследования точных решений динамических задач теории упругости в настоящее время производятся обычно приближенными асимптотическими методами различной модификации в зависимости от рассматриваемого участка возмущенной слоистой среды. При этом в ряде случаев бывает трудно оценить точность и область применимости получаемых формул.

Для выполнения более точных и полных исследований, характеризующихся для всего волнового поля единообразием метода (что очень важно при составлении простой стандартной схемы массовых вычислений), полезно иногда контурные интегралы, которыми описываются решения, приводить к интегралам, распространенным по отрезкам вещественной оси, а затем применять обычные методы численного интегрирования. В качестве исходных можно брать любые из известных форм точных решений [1-4] для сосредоточенных воздействий. К распределенным воздействиям можно затем переходить, как известно, применяя принцип суперпозиции. Представляется удобным пользоваться, например, решениями в виде формул, описанных в справочнике [3]. Приведению этих формул к наиболее простым (по отношению к расчетам) вещественным интегралам и посвящается настоящая статья.

1. Для сосредоточенного воздействия типа ε — функции Хевисайда согласно справочнику [3] точные решения (для отдельных волн) выражаются в цилиндрической системе координат r, θ, z двукратными интегралами вида

$$u_\nu = \int_0^\infty \left\{ \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} G_\nu(\zeta) e^{k\varphi(\zeta)} d\zeta \right\} J_\nu(kr)\, dk \qquad (\nu = 0,\ 1;\ \sigma > 0) \tag{1.1}$$

или их производными по времени t. В этой формуле $G_\nu(\zeta)$ обозначает алгебраическое выражение, зависящее от модулей сдвига и скоростей распространения волн, а $\varphi(\zeta)$ — зависящую от времени t и толщин слоев h_j (в том числе и текущей координаты z) линейную функцию

$$\varphi(\zeta) = bt\zeta - \sum_{j=0}^{n} q_j h_j \sqrt{1 + \gamma_j^2 \zeta^2} \qquad (\arg \sqrt{1 + \gamma_j^2 \zeta^2} = 0 \quad \text{при } \zeta > 0) \tag{1.2}$$

в которой в качестве произвольного параметра b выбирается обычно наименьшая (из возможных) скорость распространения поперечных волн в рассматриваемой слоистой среде, γ_j — отношение b к скорости распространения волны какого-то определенного типа в слое номера j, а q_j — число прохождений этой волной слоя j со скоростью $b\gamma_j^{-1}$.

Пусть H — некоторый линейный параметр, например, толщина одного из слоев; введем безразмерные величины

$$\tau = bt / H, \qquad x = r / H \tag{1.3}$$

Тогда формулы (1.1) и (1.2) примут вид

$$u_\nu = \frac{1}{H} \int_0^\infty \left\{ \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} G_\nu(\zeta) e^{k\varphi(\zeta)} d\zeta \right\} J_\nu(kx)\, dk \qquad (\nu = 0,\ 1;\ \sigma > 0) \tag{1.4}$$

$$\varphi(\zeta) = \tau\zeta - \sum_{j=0}^{n} q_j \frac{h_j}{H} \sqrt{1 + \gamma_j^2 \zeta^2} \tag{1.5}$$

При подходящей деформации контура $\sigma - i\infty$, $\sigma + i\infty$ в равенстве (1.4) можно выполнить (как указывалось в работе [5]) интегрирование по k. В результате волновое поле представится однократными интегралами

$$u_0 = \frac{1}{H} \int_l \frac{G_0(\zeta)\, d\zeta}{\sqrt{[\varphi(\zeta)]^2 + x^2}}, \qquad u_1 = \frac{1}{H} \frac{1}{x} \int_l G_1(\zeta) \left(1 + \frac{\varphi(\zeta)}{\sqrt{[\varphi(\zeta)]^2 + x^2}} \right) d\zeta \tag{1.6}$$

Здесь за l необходимо брать огибающий особые точки прежний контур $\sigma - i\infty$, $\sigma + i\infty$ при $\sigma = 0$ или достаточно малом $\sigma > 0$; ветвь радикала $\sqrt{[\varphi(\zeta)]^2 + x^2}$ должна фиксироваться условием [6], что этот радикал при $x = 0$ должен равняться $-\varphi(\zeta)$; вследствие этого $\arg \sqrt{[\varphi(\zeta)]^2 + x^2} = 0$ при $\zeta = 0$.

Для униформизации всех радикалов условимся проводить из точек ветвления разрезы, не пересекая вещественную ось, параллельно мнимой оси на бесконечность.

Если рассматривать волновое поле позади фронта объемной волны, то справа от контура l обнаруживаются две комплексные взаимно сопряженные точки ветвления радикала $\sqrt{[\varphi(\zeta)]^2 + x^2}$. Если же перевести точку наблюдения из области позади фронта объемной волны в область впереди фронта объемной волны, то упомянутые точки ветвления, оставаясь правее контура l (как указывает предельный переход от распределенного воздействия к сосредоточенному воздействию [5]), прижмутся к мнимой оси.

Все остальные точки ветвления и возможные полюса подынтегральных функций располагаются левее контура l и оказываются всегда мнимыми и взаимно сопряженными.

Следует иметь в виду, что первое слагаемое во второй из формул (1.6) можно было бы зачеркнуть согласно теореме вычетов, так как $G_\nu(\zeta)$ достаточно быстро убывают при $\zeta \to \infty$. Однако для выполнения встречающихся иногда предельных переходов оказывается удобным сохранить это слагаемое в общих формулах.

Заметим, что решения (1.6) представляются в конечном виде (без интегралов) лишь на фронтах волн [3–5] (где их значения в точности совпадают с нулевым приближением оценок интенсивности по лучевому методу), а также [5, 7] в точках оси $x=0$. Задачей дальнейшего будет исследование волнового поля при $x \neq 0$ позади фронтов и между фронтами волн.

2. При вычислении по теореме вычетов интегралов (1.6) в точках позади фронта объемной волны целесообразно деформировать контур l в левую полуплоскость так, чтобы он огибал разрезы и уходил на бесконечность. В результате нетрудно получить формулы

$$u_0 = u_0^\circ - \frac{2}{H}\int\limits_m^n \operatorname{Im}\left\{G_0(i\lambda)\frac{1}{\sqrt{[\varphi_+(i\lambda)]^2+x^2}} \mp \overline{G_0(i\lambda)}\frac{1}{\sqrt{[\varphi_-(i\lambda)]^2+x^2}}\right\}d\lambda \tag{2.1}$$

$$u_1 = u_1^\circ - \frac{2}{H}\frac{1}{x}\int\limits_m^n \operatorname{Im}\left\{G_1(i\lambda)\left(\frac{\varphi_+(i\lambda)}{\sqrt{[\varphi_+(i\lambda)]^2+x^2}}+1\right)\mp\right.$$
$$\left.\mp\overline{G_1(i\lambda)}\left(\frac{\varphi_-(i\lambda)}{\sqrt{[\varphi_-(i\lambda)]^2+x^2}}+1\right)\right\}d\lambda \tag{2.2}$$

в которых u_ν° обозначает часть волнового поля, соответствующую вычетам в возможных полюсах функций $G_\nu(\zeta)$ на мнимой оси, пределы интегрирования m и n совпадают с наименьшим и наибольшим модулями точек ветвления функций $G_\nu(\zeta)$, при этом $G_\nu(i\lambda)$ — значения $G_\nu(\zeta)$ на правом берегу, а $\varphi_+(i\lambda)$ и $\varphi_-(i\lambda)$ — значения $\varphi(\zeta)$ соответственно на правом и левом берегах разрезов, проведенных из точек $i\gamma_j^{-1}$.

Разность в фигурных скобках соответствует случаю, когда $G_\nu(\zeta)$ содержит множитель ζ в нечетной степени, а сумма — случаю, когда $G_\nu(\zeta)$ содержит множитель ζ в четной степени.

При вычислении волнового поля впереди фронта объемной волны, но позади фронта головной волны, целесообразнее деформировать контур l в правую полуплоскость, так как разрезы, располагавшиеся в предыдущем случае правее мнимой оси, теперь переходят на мнимую ось (прижимая к ней контур l). В результате это поле выражается интегралами

$$u_0 = -\frac{4}{H}\int\limits_{\lambda'}^n \operatorname{Re} G_0(i\lambda)\frac{d\lambda}{\sqrt{|\varphi_+(i\lambda)|^2-x^2}}, \qquad u_1 = \frac{4}{H}\frac{1}{x}\int\limits_{\lambda'}^n \operatorname{Im} G_1(i\lambda)\frac{|\varphi_+(i\lambda)|\,d\lambda}{\sqrt{|\varphi_+(i\lambda)|^2-x^2}} \tag{2.3}$$

в которых нижний предел $\lambda' > m$ является максимальным из двух возможных вещественных корней уравнения

$$\varphi_+(i\lambda) - ix = 0 \tag{2.4}$$

Заметим, что при наличии двух или более границ раздела в некоторых (довольно редких) случаях функции $G_\nu(\zeta)$ могут содержать полюса на мнимой оси между точками ветвления. Тогда, если упомянутые полюса попадают в промежуток интегрирования, приведенные выше интегралы следует понимать в смысле главного значения.

Другая форма представления решения через интегралы, распространенные по отрезку вещественной оси, получается, если в формуле (1.4) бесселевы функции заменять их интегральными представлениями, а затем выполнить интегрирование по k и ζ. Для всей возмущенной области она имеет следующий вид:

$$u_0 = -\frac{1}{H}\operatorname{Re}\int\limits_0^\pi \frac{2iG_0(\zeta_1)}{\varphi'(\zeta_1)}\,d\lambda, \qquad u_1 = -\frac{1}{H}\operatorname{Im}\int\limits_0^\pi \frac{2iG_1(\zeta_1)}{\varphi'(\zeta_1)}\cos\lambda\,d\lambda \tag{2.5}$$

где ζ_1 является корнем уравнения

$$\varphi(\zeta) + ix\cos\lambda = 0 \tag{2.6}$$

Подобное представление решения в случае полупространства другим путем было впервые получено в работе [8].

Сравнение формул (2.1)—(2.3) с формулами (2.5) показывает, что последние (по виду более простые) формулы менее удобны для выполнения численного интегрирования. Когда λ пробегает значения от 0 до π, переменная ζ_1 пробегает некоторые комплексные значения, различные для различных x, $h_j H^{-1}$, τ. По существу при вычислении интегралов (2.5) необходимо табулировать весьма сложные подынтегральные функции во всей правой комплексной полуплоскости, а при вычислении интегралов (2.1)—(2.3) лишь на отрезках мнимой оси. Поэтому целесообразнее применять формулы (2.1) — (2.3).

При углах падения, меньших предельного, когда приходится пользоваться лишь формулами (2.1) — (2.2), интегралы принимают конечные значения во всей возмущенной области вплоть до фронта волны. При углах же падения, больших предельного, когда приходится учитывать и формулы (2.3), все интегралы принимают бесконечные значения на фронте объемной волны. Это неудобно как для численного интегрирования (требующего выделения особенности) в (2.1) — (2.3), так и для последующего применения принципа суперпозиции (интеграла Дюамеля) при переходе к произвольным воздействиям. Чтобы избежать этих трудностей, целесообразно табулировать не интегралы, а их первообразные по τ. Интегралы же Дюамеля следует тогда вычислять по частям.

3. Если в формулах (1.6) найти первообразные по τ подынтегральных функций, то эти формулы можно представить в виде

$$u_0 = \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{1}{2\zeta}G_0(\zeta)\ln\frac{\varphi(\zeta)+\sqrt{[\varphi(\zeta)]^2+x^2}}{\varphi(\zeta)-\sqrt{[\varphi(\zeta)]^2+x^2}}\,d\zeta \tag{3.1}$$

$$u_1 = \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{1}{x}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{1}{\zeta}G_1(\zeta)\left(\zeta\tau+\sqrt{[\varphi(\zeta)]^2+x^2}\right)d\zeta \tag{3.2}$$

Заметим, что найти первообразные подынтегральных функций непосредственно в формулах (2.5) оказывается невозможным.

Применение теоремы вычетов к интегралам (3.1), (3.2) дает следующие равенства для области позади фронта объемной волны:

$$\begin{aligned}u_0 = \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial\tau}U_0^\circ + \frac{2}{H}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_n^m \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{Re}\Big\{&G_0(i\lambda)\ln\frac{\varphi_+(i\lambda)+\sqrt{[\varphi_+(i\lambda)]^2+x^2}}{ix}\mp\\ &\mp\overline{G_0(i\lambda)}\ln\frac{\varphi_-(i\lambda)+\sqrt{[\varphi_-(i\lambda)]^2+x^2}}{ix}\Big\}\,d\lambda\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}u_1 = \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial\tau}U_1^\circ + \frac{2}{H}\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{1}{x}\int\limits_n^m \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{Re}\,\{&G_1(i\lambda)\,[i\lambda\tau+\sqrt{\varphi_+(i\lambda)^2+x^2}]\mp\\ &\mp\overline{G_1(i\lambda)}\,[i\lambda\tau+\sqrt{[\varphi_-(i\lambda)]^2+x^2}\}\,d\lambda\end{aligned} \tag{3.4}$$

Здесь $\partial U_\nu^\circ/\partial\tau$ $(\nu = 0, 1)$ обозначают слагаемые, соответствующие вычетам в возможных полюсах функций $G_\nu(\zeta)\,\zeta^{-1}$.

Из двух знаков $\mp$ в формулах (3.3), (3.4) оставляется верхний или нижний по тому же правилу, что и в формулах (2.1), (2.2).

Для области же между фронтами объемной и головной волн имеем

$$u_0 = \frac{4}{H}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{\lambda'}^{n}\frac{1}{\lambda}\,\mathrm{Re}\left[G_0(i\lambda)\ln\frac{|\varphi_+(i\lambda)|-\sqrt{|\varphi_+(i\lambda)|^2-x^2}}{x}\right]d\lambda \tag{3.5}$$

$$u_1 = -\frac{4}{H}\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{1}{x}\int\limits_{\lambda'}^{n}\frac{1}{\lambda}\,\mathrm{Im}\,[G_1(i\lambda)\sqrt{|\varphi_+(i\lambda)|^2-x^2}]\,d\lambda \tag{3.6}$$

где λ' — то же, что и в формулах (2.3).

4. Приведем простейший пример применения некоторых из рассмотренных выше формул. Исследуем волновую картину на границе $z = h$ раздела двух сред. Ради упрощения вычислений будем считать, что плотности ρ и скорости распространения поперечных волн b (а следовательно, и модули сдвига μ) в рассматриваемых средах равны. Скорости же распространения продольных волн a_0 и a_1 различны. Источник типа центра расширения поместим в начале координат в среде $z < h$ с большей скоростью распространения $a_0 > a_1$.

Поле смещений на границе $z = h$ при заданных условиях может быть представлено в виде суммы полей падающей и отраженной продольных волн. Хорошо известное поле падающей волны, выражающееся в конечном виде, не характеризуется какими-либо особенностями позади фронта. Поэтому в дальнейшем естественно интересоваться лишь полем вертикальных w и горизонтальных q смещений в отраженной волне. При воздействии, изменяющемся во времени по закону ε-функции Хевисайда, оно может быть представлено согласно справочнику [3] в виде следующих интегралов:

$$w = \frac{\gamma^2}{8\pi^2\mu h^2}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^\infty\left\{\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\alpha_1-\alpha_0}{i(\alpha_1+\alpha_0)\zeta^2}e^{k(\tau\zeta-\alpha_0)}\,d\zeta\right\}J_0(kx)\,dk \tag{4.1}$$

$$q = \frac{-\gamma^2}{8\pi^2\mu h^2}\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{1}{x}\int_0^\infty\left\{\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\alpha_1-\alpha_0}{i(\alpha_1+\alpha_0)\alpha_0\zeta^2}e^{k(\tau\zeta-\alpha_0)}\,d\zeta\right\}J_1(kx)\,dk \tag{4.2}$$

Здесь

$$\alpha_0 = \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2},\quad \alpha_1 = \sqrt{1+\Delta^2\zeta^2},\quad \gamma = \frac{b}{a_0},\quad \Delta = \frac{b}{a_1},\quad x = \frac{r}{h},\quad \tau = \frac{bt}{h} \tag{4.3}$$

Если теперь воспользоваться формулами (2.1), (2.2) и учесть, что подынтегральные функции в (4.1), (4.2) не имеют полюсов, то получим равенства

$$w = \frac{\gamma^2}{\pi^2\mu h^2(\Delta^2-\gamma^2)}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{1/\Delta}^{1/\gamma}\frac{|\alpha_0||\alpha_1|}{\lambda^4}\,\mathrm{Im}\,\frac{1}{\sqrt{(i\lambda\tau-|\alpha_0|)^2+x^2}}\,d\lambda \tag{4.4}$$

$$q = \frac{-\gamma^2}{\pi^2\mu h^2(\Delta^2-\gamma^2)}\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{1}{x}\int_{1/\Delta}^{1/\gamma}\frac{|\alpha_1|}{\lambda^4}\,\mathrm{Im}\,\frac{i\lambda\tau-|\alpha_0|}{\sqrt{(i\lambda\tau-|\alpha_0|)^2+x^2}}\,d\lambda \tag{4.5}$$

в которых

$$|\alpha_0| = \sqrt{1-\gamma^2\lambda^2},\qquad |\alpha_1| = \sqrt{\Delta^2\lambda^2-1} \tag{4.6}$$

а аргумент радикала $\sqrt{(i\lambda\tau-|\alpha_0|)^2+x^2}$ должен принадлежать интервалу $(0, -\pi/2)$.

На фронте волны (при $\tau = \gamma\sqrt{1+x^2}$) интегралы в формулах (4.4), (4.5) определяются в конечном виде. Вычисляя их, найдем следующие значения для первообразных от смещений:

$$\int^{\aleph} w(\tau)\,d\tau = \frac{\gamma^3}{4\pi\mu h^2(\Delta^2-\gamma^2)}\,\frac{\Delta^2+\gamma^2+(\Delta^2-\gamma^2)x^2-2\gamma\sqrt{\Delta^2+(\Delta^2-\gamma^2)x^2}}{(1+x^2)^2} \tag{4.7}$$

$$\int^{\aleph} q(\tau)\,d\tau = -x\int^{\aleph} w(\tau)\,d\tau \qquad (\aleph = \gamma\sqrt{1+x^2}+0) \tag{4.8}$$

Формула (4.8) показывает, что при больших значениях x на фронте волны горизонтальная составляющая смещений будет на порядок больше вертикальной составляющей смещений.

По формулам (4.4), (4.5), (4.7), (4.8) производились расчеты для значений параметров $\gamma = 1/3$, $\Delta = 1/2$, $x = 10$. Применялась квадратурная формула трапеций с разбиением промежутка интегрирования на десять частей.

Приводим результаты вычислений без учета постоянного множителя $8/10^5\,\mu(\pi h)^2$ первообразных w^* и q^* от полей смещений w и q для некоторых значений аргумента $\tau = bt/h$:

τ =	3,35	4	4.5	5	5.5	6	8	10
w^* =	3,05	11.3	14.5	13.1	10.2	8.48	5.32	3.98
q^* =	30,5	21.4	12.4	4.40	1.71	1.01	0.210	0.0840

Расчеты показывают, что моменты времени, близкие к $\tau = 5$, характеризуются резким изменением волнового поля, соответствующим головным волнам поверхностного типа [9]. К такого же рода волнам относятся и так называемые поверхностные «безразрывные» поперечные волны, обсуждаемые в работах [10–14].

Более ранние примеры приведения точных решений к вещественным интегралам и вычисления последних по квадратурным формулам (в случае частных простейших задач) можно найти в работах [5, 13, 15–17]. Выведенные здесь формулы в отличие от предыдущих характеризуются наибольшей общностью и позволяют избавляться от необходимости выделения особенностей на фронтах волн.

В литературе имеется много работ, посвященных различным способам приближенного (часто без учета погрешностей) асимптотического исследования отраженных, преломленных и головных волн при резких и слабых границах раздела, оценкам колебаний, распространяющихся под углами, близкими к предельному, изучению вопросов экранирования, определению волнового поля вблизи источника и т. д. Все эти задачи и ряд других (особенно когда затруднено применение надежных асимптотических методов) с любой степенью точности можно решать по единой вычислительной схеме, используя приведенные формулы; при этом часто значительный объем вычислительной работы, выполненный для одной задачи, может быть использован при решении других задач.

Поступила 11 XII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов В. И. и Соболев С. Л. О применении нового метода к изучению упругих волн в пространстве при наличии осевой симметрии. Тр. Сейсмологич. ин-та АН СССР, 1933, № 29.
2. Cagniard L. Reflexion et refractions des onds seismiques progressives, Paris, Gauther — Villars, 1933.
3. Петрашень Г. И. Методика построения решений задач на распространение сейсмических волн в изотропных средах, содержащих толстые плоскопараллельные слои (Справочник). Вопр. динамической теории распространения сейсмических волн. Сб. 1, 1957.
4. Зволинский Н. В. Отраженные и головные волны, возникающие на плоской границе раздела двух упругих сред. I, II. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1957, № 10; 1958, № 1.
5. Огурцов К. И. и Петрашень Г. И. Динамические задачи для упругого полупространства в случае осевой симметрии. Уч. зап. ЛГУ, 1951, № 149.
6. Грей Э. и Мэтьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. М., ИИЛ, 1953.
7. Огурцов К. И. Оценки интенсивностей сейсмических волн, отразившихся от очень слабых границ раздела. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1960, № 10.
8. Соболев С. Л. О применении теории плоских волн к задаче Лемба. Тр. Сейсмологич. ин-та АН СССР, 1932, № 18.
9. Зайцев Л. П. О головной волне поверхностного типа. Вопр. динамической теории распространения сейсмических волн. 1959, сб. III.
10. Jeffrey H. Seismology Rep. Progr. Phys. 1946, 10, 52.
11. Lapwood E. R. The Disturbance Due to a Line Sorce in a Semi — Infinite Elastic Medium. Phil. Trans. A. 1949, 242, 63.
12. Newlands M. The Disturbance Due to a Line Source in a Semi — Infinite Elastic Medium with a Single Surface Layer. Phil. Trans. A, 1952, 245, 213.
13. Pinney E. Surface Motion Due to a Point Source in a Semi — Infinite Elastic Medium. Bulletin of the Seismological Society of America. 1954, Vol. 44, N 4, 571—596.
14. Огурцов К. И. Уточнение характера колебаний точек границы упругого полупространства для двух наиболее распространенных воздействий. Вопр. рудной геофизики. Госгеолтехиздат, 1960, вып. 1.
15. Огурцов К. И. Количественные исследования волновых процессов в упругом полупространстве при различных типах воздействий. Уч. зап. ЛГУ, 1956, № 208.
16. Pekeris C. L. The Seismic Surface Pulse. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1955, 41, N 7, 469—480.
17. Шемякин Е. И. Задача Лемба для внутреннего источника. ДАН СССР, 1961 т. 140, № 4, 780—782.