К ПОСТРОЕНИЮ УТОЧНЕННЫХ ТЕОРИЙ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

И. Г. Терегулов (Казань)

Попытка уточнения теорий пластин и оболочек была начата в работах [1, 2]; в настоящее время этому вопросу посвящено много работ, в которых обычно используются различного рода допущения; обзор этих работ выходит за рамки заметки. Отметим лишь работы, в которых задается заранее определенная погрешность, например, порядка h^4/L^4 по сравнению с единицей, где $2h$ — толщина, L — поперечный размер пластины, и получаются соответствующие этой точности дифференциальные уравнения [3–6]. С указанной погрешностью краевые условия получены в работе [6].

На взгляд автора наибольший интерес в методическом аспекте при построении теории представляет работа [7–8], хотя она и не может претендовать на последовательность в вопросе уточнения теории.

Ниже излагается достаточно общий метод построения уточненных теорий пластин и оболочек, восходящий по своей идее к работе Рейсснера [7],и основанный на обобщенном вариационном принципе нелинейной теории упругости [9].

1. В работе [9] доказано, что имеет место следующее утверждение (здесь используется линеаризованная форма доказанного в упомянутой работе соотношения).

Среди всех перемещений, напряжений и деформаций на самом деле имеют место лишь те, которые сообщают функционалу

$$J = \iiint\limits_V \mathbf{Q}\mathbf{u}\,dV + \iint\limits_{S_{(p)}} \mathbf{P}_{(s)}\mathbf{u}\,dS + \iint\limits_{S_{(u)}} \sigma^{ik}\mathbf{r}_k n_i(\mathbf{u}_{(s)} - \mathbf{u})\,dS - \\ - \iiint\limits_V \left\{W - \sigma^{ik}\left[\varepsilon_{ik} - \frac{1}{2}(\nabla_i u_k + \nabla_k u_i)\right]\right\} dV \tag{1.1}$$

стационарное значение.

Здесь V — объем тела; $\mathbf{Q}$ — вектор массовых сил в единице объема; $\mathbf{u}$ — вектор перемещения; W — плотность энергии деформации в единице объема; S — граница объема V, при этом $S_{(p)}$ — часть поверхности S, на которой задается вектор внешней поверхностной нагрузки $\mathbf{P}_{(s)}$, а $S_{(u)}$ — часть поверхности S, на которой задается вектор перемещения $\mathbf{u}_{(s)}$; σ^{ik} — контравариантные составляющие тензора напряжения в системе отсчета x^i $(i = 1, 2, 3)$ с координатными векторами $\mathbf{r}_i$; ε_{ik} — ковариантные составляющие тензора деформации; $\nabla_i(\ldots)$ — знак ковариантной производной по метрике g_{ik}, $g_{ik} = (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_k)$; при этом $\mathbf{n}$ — орт внутренней нормали к поверхности S

$$u_k = \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}_k, \qquad n_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_i$$

Если материал следует линейному закону упругости, то

$$2W = A^{ikmn}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{mn} \tag{1.2}$$

где A^{ikmn} — составляющие тензора упругих констант. Для изотропного тела

$$A^{ikmn} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\{\mu g^{ik}g^{mn} + (1-2\mu)\,g^{im}g^{kn}) \tag{1.3}$$

Здесь E — модуль упругости, μ — коэффициент поперечного сжатия.

В функционале J к независимому варьированию допускаются перемещения $\mathbf{u}$, напряжения σ^{ik} и деформации ε_{ik}. Считается, что $\delta\mathbf{Q} = \delta\mathbf{P}_{(s)} = 0$.

Если пластина или оболочка имеет симметричное строение относительно некоторой достаточно гладкой поверхности приведения σ и имеет граничный срез Σ, образующие которого направлены по нормали к σ, то первую вариацию функционала J можно представить в виде

$$\delta J = \iint\limits_\sigma \int\limits_{-h}^{h} (\nabla_i\sigma^{ik} + Q^k)\,\delta u_k \sqrt{\frac{g}{a}}\,dz\,d\sigma + \iint\limits_{\sigma_+} (P_+^{\,k} + \sigma_+^{\,ik}n_i^{\,+})\,\delta u_k^{\,+}\,d\sigma_+ + \\ + \iint\limits_{\sigma_-} (P_-^{\,k} + \sigma_-^{\,ik}n_i^{\,-})\,\delta u_k^{\,-}\,d\sigma_- + \iint\limits_{\Sigma_{(p)}} (P_{(\Sigma)}^{\,k} + \sigma^{ik}\nu_i)\,\delta u_k\,d\Sigma_{(p)} +$$

$$+\iint\limits_{\Sigma_{(u)}} (u_k^{(\Sigma)} - u_k)\,\delta\sigma^{ik}\nu_i\,d\Sigma_{(u)} + \iint\limits_{\sigma}\int\limits_{-h}^{h} (\sigma^{ik} - A^{ikmn}\varepsilon_{mn})\,\delta\varepsilon_{ik}\sqrt{\frac{g}{a}}\,dz\,d\sigma +$$

$$+\iint\limits_{\sigma}\int\limits_{-h}^{h}\left[\varepsilon_{ik} - \frac{1}{2}(\nabla_i u_k + \nabla_k u_i)\right]\delta\sigma^{ik}\sqrt{\frac{g}{a}}\,dz\,d\sigma = 0 \qquad (1.4)$$

$$(g = \det \| g_{ik} \|)$$

Здесь $2h$ — толщина пластины или оболочки, являющаяся, вообще говоря, функцией точки на поверхности приведения σ; $x^3 = z$ — координата, отсчитываемая по нормали к поверхности приведения; знак $(+)$ или $(-)$ при какой-либо из величин указывает на то, что эта величина вычисляется либо при $z = h$, либо при $z = -h$; поверхности $z = h$ и $z = -h$ обозначены через σ_+ и σ_- соответственно; $\Sigma_{(p)}$ — часть поверхности Σ, на которой заданы внешние нагрузки, $\Sigma_{(u)}$ — часть этой поверхности, на которой задаются перемещения; $\mathbf{v}$ — орт внутренней нормали к поверхности Σ. Линию пересечения поверхностей σ и Σ обозначим через C. Далее будем считать, что на поверхности σ имеет место координационная сеть x^α $(\alpha = 1, 2)$ с координатными векторами $\rho_\alpha = \mathbf{r}_\alpha|_{z=0}$. Положительный отсчет координаты z будем вести по направлению $\mathbf{m}$, определяемому из соотношения

$$\mathbf{m}c_{\alpha\beta} = \rho_\alpha \times \rho_\beta$$

Здесь $c_{\alpha\beta}$ — дискриминантный тензор на поверхности σ, ненулевые составляющие которого суть

$$c_{12} = -c_{21} = \sqrt{a}, \qquad a = \det \| a_{\alpha\beta} \|, \qquad a_{\alpha\beta} = \rho_\alpha \cdot \rho_\beta$$

Здесь и далее греческие индексы тензорного характера принимают значения 1 и 2, латинские индексы того же характера принимают значения 1, 2, 3. Остальные индексы заключены в круглые скобки.

Зададим перемещения, напряжения и деформации в виде

$$u_\alpha = u_\alpha^{(0)} + zu_\alpha^{(1)} + z^2u_\alpha^{(0)} + z^3u_\alpha^{(3)}, \qquad w = u_3 = w_{(0)} + zw_{(1)} + z^2w_{(2)}$$

$$\sigma^{\alpha\beta} = \sigma_{(0)}^{\alpha\beta} + z\sigma_{(1)}^{\alpha\beta} + z^2\sigma_{(2)}^{\alpha\beta} + z^3\sigma_{(3)}^{\alpha\beta}, \qquad \sigma^{\alpha3} = \sigma_{(0)}^{\alpha3} + z\sigma_{(1)}^{\alpha3} + z^2\sigma_{(2)}^{\alpha3}$$

$$\sigma^{33} = \sigma_{(0)}^{33} + z\sigma_{(1)}^{33}, \qquad \varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta(0)} + z\varepsilon_{\alpha\beta(1)} + z^2\varepsilon_{\alpha\beta(2)} + z^3\varepsilon_{\alpha\beta(3)} \qquad (1.5)$$

$$\varepsilon_{\alpha3} = \varepsilon_{\alpha3(0)} + z\varepsilon_{\alpha3(1)} + z^2\varepsilon_{\alpha3(2)}, \qquad \varepsilon_{33} = \varepsilon_{33(0)} + z\varepsilon_{33(1)} + z^2\varepsilon_{33(2)} + z^3\varepsilon_{33(3)}$$

т. е. перемещения, напряжения и деформации аппроксимируем в функции координаты z приведенными формами, а функции $u_\alpha^{(i)}, w_{(i)}, \sigma_{(i)}^{mn}, \varepsilon_{mn(i)}$, зависящие от координат x^α, определяем из уравнения (1.4). Как будет видно из последующего, произвол, вносимый соотношениями (1.5), сужается до произвола, соответствующего заданию закона изменения перемещений по толщине.

2. Ограничиваясь рассмотрением плиты, из уравнения (1.4) получим: уравнения равновесия

$$\nabla_\alpha \frac{2h^{n+1}}{n+1}\sigma_{(0)}^{\alpha\beta} + \nabla_\alpha \frac{2h^{n+3}}{n+3}\sigma_{(2)}^{\alpha\beta} - n\sigma_{(1)}^{3\beta}\frac{2h^3}{3} + h^n(P_+^\beta + P_-^\beta) + \int\limits_{-h}^{h} Q^\beta z^n\,dz = 0$$

$$\nabla_\alpha \frac{2h^{n+3}}{n+3}\sigma_{(1)}^{\alpha\beta} + \nabla_\alpha \frac{2h^{n+5}}{n+5}\sigma_{(3)}^{\alpha\beta} - (n+1)\,\sigma_{(0)}^{3\beta}\frac{2h^{n+1}}{n+1} - (n+1)\,\sigma_{(2)}^{3\beta}\frac{2h^{n+3}}{n+3} +$$

$$+ h^{n+1}(P_+^\beta - P_-^\beta) + \int\limits_{-h}^{h} Q^\beta z^{n+1}\,dz = 0 \qquad (2.1)$$

$$\nabla_\alpha \frac{2h^{n+1}}{n+1}\sigma_{(0)}^{\alpha3} + \nabla_\alpha \frac{2h^{n+3}}{n+3}\sigma_{(2)}^{\alpha3} - n\sigma_{(1)}^{33}\frac{2h^3}{3} + h^n(P_+^3 + P_-^3) + \int\limits_{-h}^{h} Q^3 z^n\,dz = 0$$

$$\nabla_\alpha \frac{2h^3}{3}\sigma_{(1)}^{\alpha3} - \sigma_{(0)}^{33}\,2h + h(P_+^3 - P_-^3) + \int\limits_{-h}^{h} Q^3 z\,dz = 0, \qquad n = 0, 2$$

Соотношения упругости

$$\sigma^{ik}_{(j)} = A^{ikmn}\varepsilon_{mn(j)} \tag{2.2}$$

Зависимости деформации-перемещения

$$2\varepsilon_{\alpha\beta(i)} = \nabla_\alpha u_{\beta(i)} + \nabla_\beta u_{\alpha(i)}, \qquad 2\varepsilon_{\alpha 3(j)} = \nabla_\alpha w_{(j)} + (j+1)\,u_{\alpha(j+1)} \tag{2.3}$$

$$\varepsilon_{33(0)} = w_{(1)}, \quad \varepsilon_{33(1)} = 2w_{(2)}, \quad \varepsilon_{33(2)} = -\frac{\mu}{1-\mu}\nabla_\alpha u^\alpha_{(2)}, \quad \varepsilon_{33(3)} = -\frac{\mu}{1-\mu}\nabla_\alpha u^\alpha_{(3)}$$

Естественные статические условия

$$\begin{gathered}
\left\{\sigma^{\alpha\beta}_{(0)}\frac{2h^{n+1}}{n+1} + \sigma^{\alpha\beta}_{(2)}\frac{2h^{n+3}}{n+3}\right\}\nu_\alpha\nu_\beta + \int_{-h}^{h} P^\alpha_{(\Sigma)}\nu_\alpha z^n\,dz = 0\\
\left\{\sigma^{\alpha\beta}_{(0)}\frac{2h^{n+1}}{n+1} + \sigma^{\alpha\beta}_{(2)}\frac{2h^{n+3}}{n+3}\right\}\nu_\alpha\tau_\beta + \int_{-h}^{h} P^\alpha_{(\Sigma)}\tau_\alpha z^n\,dz = 0\\
\left\{\sigma^{\alpha\beta}_{(1)}\frac{2h^{n+3}}{n+3} + \sigma^{\alpha\beta}_{(3)}\frac{2h^{n+5}}{n+5}\right\}\nu_\alpha\nu_\beta + \int_{-h}^{h} P^\alpha_{(\Sigma)}\nu_\alpha z^{n+1}\,dz = 0\\
\left\{\sigma^{\alpha\beta}_{(1)}\frac{2h^{n+3}}{n+3} + \sigma^{\alpha\beta}_{(3)}\frac{2h^{n+5}}{n+5}\right\}\nu_\alpha\tau_\beta + \int_{-h}^{h} P^\alpha_{(\Sigma)}\tau_\alpha z^{n+1}\,dz = 0 \qquad (2.4)\\
\left\{\sigma^{\alpha 3}_{(0)}\frac{2h^{n+1}}{n+1} + \sigma^{\alpha 3}_{(2)}\frac{2h^{n+3}}{n+3}\right\}\nu_\alpha + \int_{-h}^{h} P^3_{(\Sigma)} z^n\,dz = 0\\
\sigma^{\alpha 3}_{(1)}\frac{2h^3}{3}\nu_\alpha + \int_{-h}^{h} P^3_{(\Sigma)} z\,dz = 0 \qquad (n = 0,\ 2)
\end{gathered}$$

Естественные геометрические краевые условия

$$\begin{gathered}
\left\{u^\alpha_{(0)}\frac{2h^{n+1}}{n+1} + u^\alpha_{(2)}\frac{2h^{n+3}}{n+3}\right\}\nu_\alpha = \int_{-h}^{h} u^\alpha_{(\Sigma)}\nu_\alpha z^n\,dz\\
\left\{u^\alpha_{(0)}\frac{2h^{n+1}}{n+1} + u^\alpha_{(2)}\frac{2h^{n+3}}{n+3}\right\}\tau_\alpha = \int_{-h}^{h} u^\alpha_{(\Sigma)}\tau_\alpha z^n\,dz\\
\left\{u^\alpha_{(1)}\frac{2h^{n+3}}{n+3} + u^\alpha_{(3)}\frac{2h^{n+5}}{n+5}\right\}\nu_\alpha = \int_{-h}^{h} u^\alpha_{(\Sigma)}\nu_\alpha z^{n+1}\,dz\\
\left\{u^\alpha_{(1)}\frac{2h^{n+3}}{n+3} + u^\alpha_{(3)}\frac{2h^{n+5}}{n+5}\right\}\tau_\alpha = \int_{-h}^{h} u^\alpha_{(\Sigma)}\tau_\alpha z^{n+1}\,dz\\
w_{(0)}\frac{2h^{n+1}}{n+1} + w_{(2)}\frac{2h^{n+3}}{n+3} = \int_{-h}^{h} w_{(\Sigma)} z^n\,dz \qquad (2.5)\\
w_{(1)}\frac{2h^3}{3} = \int_{-h}^{h} w_{(\Sigma)}\,z\,dz \qquad (n = 0,\ 2)
\end{gathered}$$

Здесь $\mathbf{v} = v^\alpha \boldsymbol{\rho}_\alpha$, $\boldsymbol{\tau} = \tau^\alpha \boldsymbol{\rho}_\alpha$ — орты внутренней нормали к граничному срезу Σ и касательной к линии C, ориентированные так, что тройка векторов $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{m}$ образует правый триедр; $\nabla_\alpha(\ldots)$ — знак ковариантной производной по метрике $a_{\alpha\beta}$. Кроме того, в уравнение равновесия (2.1) внесено упрощение, соответствующее пренебрежению квадратом производной от толщины по координатам срединной плоскости в сравнении с единицей. Так как пластина имеет симметричное строение, то задача определения ее напряженно-деформированного состояния распадается на задачу изгиба и задачу обжатия по толщине. Порядок дифференциальных уравнений (2.1), как легко видеть, соответствует числу краевых условий (2.4) или (2.5).

3. Для круглой изотропной плиты радиуса r при симметричном изгибе, полагая $x^1 = \eta$, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ ($\rho = \eta r$ — расстояние от какой-либо точки до оси плиты) и предполагая переменность толщины лишь по направлению радиуса, получим

$$\varepsilon_{11\,(i)} = r^2 \frac{du^1_{(i)}}{d\eta}, \qquad \varepsilon_{22\,(i)} = \eta r^2 u^1_{(i)}, \qquad \varepsilon_{33\,(0)} = w_{(1)}, \qquad \varepsilon_{33\,(1)} = 2w_{(2)}$$

$$\varepsilon_{33\,(2)} = -\frac{\mu}{1-\mu}\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\eta u^1_{(2)}, \qquad \varepsilon_{33\,(3)} = -\frac{\mu}{1-\mu}\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\eta u^1_{(3)}$$

$$2\varepsilon_{13\,(i)} = \frac{dw_{(i)}}{d\eta} + (i+1)\, r^2 u^1_{(i+1)} \tag{3.1}$$

$$\sigma^{11}_{(i)} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\mu}{\eta}u^1_{(i)} + (1-\mu)\frac{du^1_{(i)}}{d\eta}\right\} + \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}\frac{1}{r^2}\varepsilon_{33\,(i)}$$

$$\sigma^{22}_{(i)} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\frac{1}{r^2\eta^2}\left\{\mu\frac{du^1_{(i)}}{d\eta} + (1-\mu)\frac{u^1_{(i)}}{\eta}\right\} + \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}\frac{1}{r^2\eta^2}\varepsilon_{33\,(i)} \tag{3.2}$$

$$\sigma^{13}_{(i)} = \frac{E}{2(1+\mu)r^2}\left\{\frac{dw_{(i)}}{d\eta} + (i+1)\, r^2 u^1_{(i+1)}\right\}$$

$$\sigma^{33}_{(i)} = \frac{E(1-\mu)(i+1)}{(1+\mu)(1-2\mu)} w_{(i+1)} + \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\eta u^1_{(i)}$$

Уравнения изгиба примут вид

$$\begin{aligned}
&\frac{2h^{n+3}}{n+3}\frac{1}{r^2}\left\{(1-\mu)\frac{d}{d\eta}\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\eta u^1_{(1)} + 2\mu\frac{dw_{(2)}}{d\eta}\right\} + \\
&+\frac{2h^{n+2}}{r^2}\frac{dh}{d\eta}\left\{\frac{\mu}{\eta}u^1_{(1)} + (1-\mu)\frac{du^1_{(1)}}{d\eta} + 2\mu w_{(2)}\right\} + \frac{2h^{n+5}}{n+5}\frac{1-2\mu}{(1-\mu)r^2}\frac{d}{d\eta}\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\eta u^1_{(3)} + \\
&+\frac{2h^{n+4}(1-2\mu)}{r^2(1-\mu)}\frac{dh}{d\eta}\left\{\frac{\mu}{\eta}u^1_{(3)} + \frac{du^1_{(3)}}{d\eta}\right\} - \frac{(1-2\mu)h^{n+1}}{r^2}\left\{\frac{dw_0}{d\eta} + r^2 u^1_{(1)}\right\} - \\
&-\frac{(n+1)(1-2\mu)h^{n+3}}{(n+3)r^2}\left\{\frac{dw_{(2)}}{d\eta} + 3r^2u^1_{(3)}\right\} + \\
&+\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E}\left\{h^{n+1}(P^1_+ - P^1_-) + \int_{-h}^{h} Q^1 z^{n+1}\,dz\right\} = 0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{2h^{n+1}}{(n+1)r^2}\left\{\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\eta\frac{dw_0}{d\eta} + r^2\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\eta u^1_{(1)}\right\} + \frac{2h^n}{r^2}\frac{dh}{d\eta}\left\{\frac{dw_0}{d\eta} + r^2u^1_{(1)}\right\} + \\
&+\frac{2h^{n+3}}{(n+3)r^2}\left\{\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\eta\frac{dw_{(2)}}{d\eta} + r^2\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\eta u^{(1)}_{(3)}\right\} + \frac{2h^{n+2}}{r^2}\frac{dh}{d\eta}\left\{\frac{dw_{(2)}}{d\eta} + r^2u^1_{(3)}\right\} - \\
&-\frac{4nh^3}{3(1-2\mu)}\left\{2(1-\mu)w_{(2)} + \mu\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\eta u^1_{(1)}\right\} + \\
&+\frac{2(1+\mu)}{E}\left\{h^n(P_+{}^3 + P_-{}^3) + \int_{-h}^{h} Q^3 z^n\,dz\right\} = 0
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Уравнения обжатия плиты примут вид

$$\begin{aligned}
&\frac{2h^{n+1}}{(n+1)r^2}\left\{(1-\mu)\frac{d}{d\eta}\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\eta u^1_{(0)} + \mu\frac{dw_{(1)}}{d\eta}\right\} + \frac{2h^n}{r^2}\frac{dh}{d\eta}\left\{\frac{\mu}{\eta}u^1_{(0)} + (1-\mu)\frac{du^1_{(0)}}{d\eta} + \mu w_{(1)}\right\} + \\
&+\frac{2h^{n+3}}{n+3}\frac{1-2\mu}{(1-\mu)r^2}\frac{d}{d\eta}\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\eta u^1_{(2)} + \frac{2h^{n+2}}{r^2}\frac{1-2\mu}{1-\mu}\frac{dh}{d\eta}\left\{\frac{\mu}{\eta}u^1_{(2)} + \frac{du^1_{(2)}}{d\eta}\right\} - \\
&-\frac{nh^3(1-2\mu)}{3r^2}\left\{\frac{dw_{(1)}}{d\eta} + 2r^2u^1_{(2)}\right\} + \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E}\left\{h^n(P_+{}^1 + P_-{}^1) + \int_{-h}^{h} Q^1 z^n\,dz\right\} = 0
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{2h^3}{3r^2}\left\{\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\eta\frac{dw_{(1)}}{d\eta} + r^2\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\eta u^1_{(2)}\right\} + \frac{2h^2}{r^2}\frac{dh}{d\eta}\left\{\frac{dw_{(1)}}{d\eta} + r^2u^1_{(2)}\right\} - \\
&-\frac{4h}{1-2\mu}\left\{(1-\mu)w_{(1)} + \mu\frac{1}{\eta}\frac{d}{d\eta}\eta u^1_{(1)}\right\} + \frac{2(1+\mu)}{E}\left\{h(P_+{}^3 - P_-{}^3) + \int_{-h}^{h} Q_z{}^3\,dz\right\} = 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Предложенный метод построения уточненных теорий пластин и оболочек, отличающийся достаточной прозрачностью, дает возможность без излишних ухищрений получить уравнения задачи. Однако нужно отметить, что решение уравнений (2.1) или в более простом варианте уравнений (3.3)—(3.6) возможно лишь при использовании современных счетно-решающих устройств. На этом пути может быть применен метод конечных разностей. Кроме того, вариационное уравнение (1.4) дает возможность решать задачи о напряженно-деформированном состоянии плит и оболочек, на граничном срезе которых поставлены краевые условия, меняющиеся по своему характеру по толщине. Например, круглая толстая плита может быть жестко заделана на участке $-h \leqslant z \leqslant \zeta$ граничного среза и свободна от каких-либо нагрузок на участке $\zeta \leqslant z \leqslant h\ (-h < \zeta < h)$.

О поправках, вносимых за счет уточнения уравнений равновесия и краевых условий, сказано в работе [6].

Поступила 15 IX 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Кильчевский Н. А. Обобщение современной теории оболочек. ПММ, 1939, т. II, вып. 4.
2. Chien W. Z. The intrinsic theory of thin shells and plates. Quart. of Appl. Math. 1944. vol. I, No. 4; vol. II, No 1, 2.
3. Блох В. Н. К общей теории упругих толстых плит. Инж. сб., 1954, т. XVIII.
4. Муштари Х. М. Теория изгиба плит средней толщины. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 2.
5. Муштари Х. М., Терегулов И. Г. К теории оболочек средней толщины. ДАН СССР, 1959, т. 128, № 6; Теория пологих ортотропных оболочек средней толщины. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 6.
6. Терегулов И. Г. К теории пластин средней толщины. Тр. конф. по теории оболочек. Казань, 1960.
7. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates. J. Math. Phys., 1944, vol. 23.
8. Гольденвейзер А. Л. О теории изгиба пластинок Рейсснера. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1958, № 4.
9. Терегулов И. Г. К вариационным методам в нелинейной теории упругости. ДАН СССР, 1961, т. 142, № 3.

О РАСЧЕТЕ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В УПРУГИХ ОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ С ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ГРАНИЦАМИ РАЗДЕЛА

К. И. Огурцов

(Ленинград)

Количественные исследования точных решений динамических задач теории упругости в настоящее время производятся обычно приближенными асимптотическими методами различной модификации в зависимости от рассматриваемого участка возмущенной слоистой среды. При этом в ряде случаев бывает трудно оценить точность и область применимости получаемых формул.

Для выполнения более точных и полных исследований, характеризующихся для всего волнового поля единообразием метода (что очень важно при составлении простой стандартной схемы массовых вычислений), полезно иногда контурные интегралы, которыми описываются решения, приводить к интегралам, распространенным по отрезкам вещественной оси, а затем применять обычные методы численного интегрирования. В качестве исходных можно брать любые из известных форм точных решений [1-4] для сосредоточенных воздействий. К распределенным воздействиям можно затем переходить, как известно, применяя принцип суперпозиции. Представляется удобным пользоваться, например, решениями в виде формул, описанных в справочнике [3]. Приведению этих формул к наиболее простым (по отношению к расчетам) вещественным интегралам и посвящается настоящая статья.