О ДВИЖЕНИИ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Г. С. Шапиро (Москва)

Учет влияния сопротивляющейся среды на движение жестко-пластических тел удается провести достаточно просто в том случае, когда сопротивление среды зависит от скоростей перемещений точек жестко-пластических конструкций. В качестве примера рассмотрена задача о движении бесконечной балки, подвергнутой удару с постоянной скоростью, причем закон сопротивления среды принят в виде степенной функции от скоростей. Результаты могут быть перенесены па задачи о движении в сопротивляющейся среде жестко-пластических пластинок и оболочек.

Задача о движении жестко-пластического тела в сопротивляющейся среде в строгой постановке требует совместного рассмотрения движений тела и среды и является весьма сложной. Существенное упрощение получается в том случае, если закон сопротивления среды задается наперед. В такой постановке решено большое число задач. Например, при движении упругих балок и пластинок, лежащих на упругом основании предполагается, что сопротивление среды пропорционально прогибам этих конструкций (см., например [1]); аналогичное предположение сделано и для упруго-пластических балок [2]. При исследовании действия ударной волны на корабельные конструкции иногда предполагают, что сопротивление среды пропорционально первой степени скорости прогибов. Такое допущение делалось как для цилиндрических оболочек [3], так и для начальной фазы движения пластинок [4]. Допущение о том, что сопротивление среды пропорционально квадрату скорости перемещений, было сделано при исследовании поперечного удара по упруго-пластическим нитям и мембранам [5, 6].

При решении динамических задач для жестко-пластических конструкций приходится, как известно, задаваться полем скоростей смещений, которое должно согласоваться с условием текучести и законом течения пластического потенциала. Если шарниры текучести или шарнирные линии являются стационарными, то задание поля скоростей эквивалентно заданию поля смещений; в этом случае форма решения не будет зависеть от того, определяется ли сопротивление среды скоростями или перемещениями. Если же шарниры текучести или шарниры линии являются нестационарными, то решение получается особенно простым в том случае, когда сопротивление среды зависит от скоростей.

Для примера рассмотрим задачу (решение которой без учета сил сопротивления известно [7, 8]) об ударе с постоянной скоростью по бесконечной балке. Ось балки совместим с осью x. Предположим, что силы сопротивления r связаны со скоростями смещений $\dot{y}$ степенной зависимостью

$$r = \alpha \dot{y}^n \tag{1}$$

где α — постоянный множитель. Заметим, что при $n = 1$, в случае действия ударных волн на корабельные конструкции принимают $\alpha = \rho c$, где ρ — плотность, а c — скорость звука [3, 4]. Задаем поле скоростей в виде [8]

$$\dot{y} = \begin{cases} v_0 [1 - x / \xi(t) & (0 \leqslant x \leqslant \xi(t)) \\ 0 & (x \geqslant \xi(t)) \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $\xi(t)$ — координата нестационарного шарнира текучести. Предполагается, что в точке удара возникает стационарный шарнир текучести, а в обе стороны, удаляясь от него, движутся два нестационарных шарнира текучести.

Уравнение движения балки будет

$$M'' = r + m\ddot{y} \tag{3}$$

Пользуясь равенствами (1) и (2) и интегрируя (3) с учетом, что $M'(0, t) = P/2$, где P — внешняя сила, действующая на балку, имеем

$$M' = -\frac{P}{2} + \alpha v_0{}^n x \left[1 - \frac{n}{2!}\left(\frac{x}{\xi}\right) + \frac{n(n-1)}{3!}\left(\frac{x}{\xi}\right)^2 - \ldots\right] + \frac{m v_0 \dot{\xi} x^2}{2\xi^2} \tag{4}$$

Интегрируя это равенство и замечая, что $M(0, t) = M_0$, имеем

$$M = M_0 - \frac{P}{2}x + \alpha v_0{}^n x^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{n}{3!}\left(\frac{x}{\xi}\right) + \frac{n(n-1)}{4!}\left(\frac{x}{\xi}\right)^2 - \ldots\right] + \frac{m v_0 \dot{\xi} x^3}{6\xi^2} \tag{5}$$

Условие $M'(\xi, t) = 0$ дает

$$-\frac{P}{2} + \alpha v_0^n \xi \left[1 - \frac{n}{2!} + \frac{n(n-1)}{3!} - \ldots\right] + \frac{m v_0 \dot{\xi}}{2} = 0 \tag{6}$$

а из условия $M(\xi, t) = -M_0$ имеем

$$2M_0 - \frac{P}{2}\xi + \alpha v_0^n \xi^2 \left[\frac{1}{2!} - \frac{n}{3!} + \frac{n(n-1)}{4!} - \ldots\right] + \frac{m v_0 \dot{\xi}\xi}{6} = 0 \tag{7}$$

Из уравнений (6) и (7) вытекает дифференциальное уравнение для ξ

$$\xi\dot{\xi} + \frac{3\alpha v_0^{n-1}\sigma(n)}{n}\xi^2 = \frac{6M_0}{m v_0} \qquad \left(\sigma(n) = \frac{1}{2!} - \frac{2n}{3!} + \frac{3n(n-1)}{4!} - \ldots\right) \tag{8}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\xi = \left\{\frac{2M_0}{\alpha v_0^n \sigma(n)}\left(1 - \exp\left[-\frac{6\alpha v_0^{n-1}\sigma(n)}{m}t\right]\right]\right\}^{1/2} \tag{9}$$

Случай движения без сил сопротивления можно получить из (9) путем предельного перехода, положив $\alpha \to 0$. Находим

$$\xi = \left(\frac{12 M_0 t}{v_0 m}\right)^{1/2}. \tag{10}$$

Эта формула совпадает с решением, полученным Конрой [7] и Гопкинсом [8] Сопоставляя (9) и (10), можно увидеть разницу в поведении балки, вызванную наличием сил сопротивления.

При $t \to \infty$ вся свободная балка будет охвачена движением, тогда как при наличии сил сопротивления возмущение охватит участок

$$\xi = \frac{2M_0}{\alpha v_0^n \sigma(n)}$$

Из (9) имеем

$$\xi = \left(\frac{12 M_0}{\alpha v_0}\left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha t}{m}\right)\right]\right)^{1/2} \quad \text{при } n = 1 \tag{11}$$

$$\xi = \left\{\frac{24}{7\alpha v_0^2}\left[1 - \exp\left(-\frac{7}{2}\frac{\alpha v_0 t}{m}\right)\right\}^{1/2} \quad \text{при } n = 2 \tag{12}$$

Пользуясь (6) или (7), а также (9), можно видеть, что, как и в случае отсутствия сил сопротивления, в начальный момент времени P имеет особенность вида $t^{-1/2}$. Кроме того, следует убедиться, что при $0 \leqslant x \leqslant \xi$ выполняется условие $|M| \leqslant M_0$. Справедливость этого условия, по крайней мере для $n = 1$ и $n = 2$, легко устанавливается непосредственным анализом формул (4) и (6).

Решение (9) получено в предположении, что на балку действует сила P. Можно показать, что при снятии силы P вся балка должна прийти в состояние движения, независимо от того, существуют или нет силы сопротивления. В предположении отсутствия сил сопротивления это было показано в работе [8].

Поступила 19 XII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Операционное исчисление. М.— Л., ГТТИ, 1950.
2. Цейтлин А. И. Упруго-пластические деформации бесконечной балки при импульсивной нагрузке. «Исследования по динамике сооружений и расчету конструкций на упругом основании» ЦНИИСК. М., Госстройиздат, 1961.
3. Кейл А. Проблемы пластичности корабельных конструкций при взрывном и ударном нагружении. Сб. пер. Механика, М., ИИЛ, 1961, № 2 (66).
4. Коул Р. Подводные взрывы М., ИИЛ, 1950.
5. Рахманов П. А. Исследования поперечного удара по гибкой нити, находящейся в сплошной среде. Докл. АН АзССР, 1960, № 6.
6. Рахманов П. А. Об исследовании поперечного удара по гибкой пластинке, находящейся в сплошной среде. Докл. АН АзССР, 1960, № 12.
7. Conroy M. Plastic — rigid analysis of long beams under impact loading. Journ. of. Appl. Mech., 19, № 4, 1952.
8. Hopkins H. On the behaviour of infinitely long rigid — plastic beams under transverse concentrated load. Journal of Mech. and Phys. of Solids, 1955, 4, N 1.