О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ УПРУГОГО ТЕЛА ПРИ НАЛИЧИИ ПЛОСКОЙ ЩЕЛИ (РАЗРЕЗА)

В. И. Довнорович (Гомель)

Применим методы решения пространственных контактных задач теории упругости к решению задач для упругого тела при наличии плоской щели (разреза).

Пусть известно решение задачи о вдавливании в упругое полупространство при отсутствии сил трения жесткого штампа, т. е. гармоническая в полупространстве $z \geqslant 0$, обращающаяся в нуль на бесконечности, функция $U(x, y, z)$, удовлетворяющая следующим смешанным краевым условиям:

1) внутри площадки S контакта штампа с границей $z = 0$

$$U(x, y, 0) = b + \alpha x + \beta y - \varphi(x, y) \tag{1}$$

2) вне площади S границы $z = 0$

$$\partial U / \partial z = 0 \tag{2}$$

определена, где $z = \varphi(x, y)$ — уравнение поверхности основания штампа, $b + \alpha x + \beta y$ — жесткое перемещение штампа.

Нормальное напряжение под штампом определяется формулой [1]

$$\sigma_z = -[mG / (m-1)] (\partial U / \partial z)_{z=0} \tag{3}$$

Здесь m — величина, обратная коэффициенту Пуассона.

Предполагается, что функция $\varphi(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно и краевая линия штампа не давит на упругое полупространство, т. е., как это следует из (3), гармоническая в полупространстве $z \geqslant 0$ функция

$$V = \partial U / \partial z \tag{4}$$

при $z = 0$ будет непрерывной. Так как $U(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta U = 0$, то, воспользовавшись (4), получаем

$$\partial V / \partial z = \partial^2 U / \partial z^2 = -(\partial^2 U / \partial x^2 + \partial^2 U / \partial y^2) \tag{5}$$

Воспользовавшись (1), (2), (4) и (5), получаем, что гармоническая в полупространстве $z = 0$, обращающаяся в нуль на бесконечности, функция (4) на границе $z = 0$ полупространства удовлетворяет следующим краевым условиям $V(x, y, 0) = 0$ вне площадки S и $\partial V / \partial z = \Delta \varphi(x, y)$ внутри площадки S, где Δ — оператор Лапласа.

Если положить

$$p(x, y) = mG \Delta \varphi(x, y) / (m - 1) \tag{6}$$

то гармоническая функция $V(x, y, z)$ будет представлять собой решение задачи о напряженно-деформируемом состоянии неограниченного упругого тела при наличии плоской щели S, к поверхности которой приложено нормальное (сжимающее) напряжение $\sigma_z(x, y, +0) = \sigma_z(x, y, -0) = -p(x, y)$. Уравнение поверхности щели, расширенной под действием нормального давления $p(x, y)$, имеет вид

$$z = \pm V(x, y, 0), \quad \text{или} \quad z = \mp (m - 1)\sigma_z(x, y) / mG \tag{7}$$

Здесь учитывались равенства (3) и (4).

Если гармоническая функция $U(x, y, z)$ является потенциалом простого слоя с плотностью $\gamma(x, y)$, то

$$\sigma_z = -2\pi mG\gamma(x, y) / (m - 1)$$

Следовательно, уравнение (7) расширенной щели получает вид

$$z = \pm 2\pi\gamma(x, y)$$

Вектор смещений и тензор напряжений, действующие в неограниченном упругом теле при наличии плоской щели S, к поверхности которой приложено нормальное давление $p(x, y)$, выражаются через $V(x, y, z)$, по известным формулам.

Примеры. 1. Если

$$p(x, y) = \frac{mG}{m-1} \sum_{i+j=0}^{n} [(i+2)(i+1) b_{i+2} + (j+2)(j+1) b_{i, j+2}] x^i y^j$$

и щель S эллиптическая $x^2/a^2+y^2/a^2(1-k^2)\leqslant 1$, то, воспользовавшись (7) и результатами автора [2] для штампа с поверхностью

$$z=\sum_{i+j=2}^{n+2} b_{ij}x^iy^j$$

получим уравнение расширенной щели

$$z=\mp 2\pi\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(1-k^2)}}\sum_{i+j=0}^{n} c_{ij}x^iy^j .$$

Здесь коэффициенты c_{ij} определяются в результате решения определенной алгебраической системы линейных уравнений, коэффициенты которой выражаются через эллиптические интегралы первого и второго родов.

2. Если давление p_0 — постоянное и щель эллиптическая, то уравнение расширенной щели принимает вид трехосного эллипсоида

$$x^2/a^2+y^2/a^2(1-k^2)+z^2/b^2=1 \qquad (b=\pi(m-1)\,p_0\,d_{00}^{20}/mG\,(d_{00}^{20}+d_{00}^{02}))$$

Значения d_{00}^{20} и d_{00}^{02} приведены в монографии автора [2].

3. Если

$$p(x,y)=mG\,(e_{00}+e_{10}x+e_{01}y+e_{20}x^2+e_{11}xy+e_{02}y^2)/(m-1)$$

щель круговая радиуса a, то, воспользовавшись (7) и результатами [2], получим

$$z=\pm\frac{2}{9\pi}\sqrt{a^2-\rho^2}\left[e_{00}+a^2(e_{20}+e_{02})+\frac{2}{3}e_{10}x+\frac{2}{3}e_{01}y+\frac{2}{45}(11e_{02}-e_{20})x^2+\right.$$
$$\left.+\frac{8}{15}e_{11}xy+\frac{2}{45}(11e_{20}-e_{02})y^2\right]$$

4. Если давление p_0 постоянное, то, положив $b=2(m-1)\,p_0a/\pi mG$, получим результат И. Снеддона [3] о форме $x^2/a^2+y^2/a^2+z^2/b^2=1$ круговой щели, расширенной под действием постоянного внутреннего давления p_0.

Отметим, что методы решения задач для упругого тела при наличии плоской щели могут быть применены к решению контактных задач теории упругости, при условии, когда краевая линия штампа не давит на упругое полупространство, т. е. нормальное напряжение на контуре площадки S контакта штампа с полупространством обращается в нуль. Действительно, если функция $V(x,y,z)$ представляет решение задачи для неограниченного упругого тела при наличии плоской щели S, к поверхности которой приложено нормальное давление (6), то, воспользовавшись (4). нормальное напряжение (3) внутри площади S контакта с упругим полупространством штампа с поверхностью основания $z=\varphi(x,y)$ представится в виде

$$\sigma_z=-mGV(x,y,0)/(m-1) \tag{8}$$

Пример. Если воспользоваться результатом И. Снеддона

$$V(x,y,0)=\frac{2a(m-1)}{\pi mG}\int_{\rho/a}^{1}\frac{y\,dy}{(y^2-\rho^2/a^2)}\int_0^1\frac{up(ayu)}{(1-u^2)^{1/2}}du \tag{9}$$

когда к круговой щели радиуса a приложено нормальное давление $p(\rho)$, то, воспользовавшись (6), (8) и (9), получим следующую формулу для нормального напряжения под осесимметричным штампом:

$$\sigma_z=-\frac{2amG}{\pi(m-1)}\int_{\rho/a}^{1}\frac{y\,dy}{(y^2-\rho^2/a^2)^{1/2}}\int_0^1\frac{u\psi(ayu)}{(1-u^2)^{1/2}}du,\qquad \psi(ayu)=\Delta\varphi(\rho)\,|_{\rho=ayu} \tag{10}$$

При $z=A\rho^2$ формула (10) приводит к результату Герца, при $z=A\rho$ получаем результат А. Лява для конического штампа.

Поступила 24 VI 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.
2. Довнорович В. И. Пространственные контактные задачи теории упругости. Минск, Изд-во Белорусского ун-та, 1959.
3. Снеддон И. Преобразования Фурье. М., ИИЛ, 1955.