Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

К ТЕОРИИ ПЛАСТИН СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ

В. В. Понятовский

(Ленинград)

Строится приближенная теория упругих изотропных пластин постоянной толщины без каких-либо предположений о характере деформации поперечных линейных элементов.

Напряжения σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{yy} разлагаются в ряды по полиномам Лежандра $P_k\,(2z/h)$. Остальные находятся из уравнений равновесия, после чего применяется принцип Кастильяно.

Разложение искомых величин по полиномам Лежандра было применено к теории оболочек Чикала [1]. Однако он пользовался принципом возможных перемещений, что не позволило раскрыть всех преимуществ этих рядов перед степенными рядами.

Примененный в предлагаемой работе принцип Кастильяно дает возможность полнее использовать эти преимущества, заключающиеся в том, что разложение по полиномам Лежандра позволяет выделить ту часть напряжений, главный вектор и главный момент которых равны нулю. Ввиду этого обстоятельства граничные условия формулируются в виде, наиболее удобном для применения принципа Сен-Венана.

Из полученных уравнений путем отбрасывания в них членов порядка $(h/a)^2$ по сравнению с единицей (h — толщина, a — ширина пластины) можно получить уравнения классической теории тонких пластин.

Сохранение членов указанного порядка приводит к уточненным уравнениям, содержащим, кроме членов, имеющихся в работах [2-4], некоторые другие члены того же порядка.

1. Совместим плоскость xy декартовой прямоугольной системы координат xyz со срединной плоскостью пластины. Кроме координат xyz, введем безразмерные координаты

$$\xi = \frac{x}{a}, \qquad \eta = \frac{y}{a}, \qquad \zeta = \frac{2z}{h} \quad (-1 \leqslant \zeta \leqslant 1)$$

Представим напряжения σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{yy} в пластине в виде рядов по полиномам Лежандра от координаты ζ

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{T_{xx}}{h} + \frac{6\zeta}{h^2} M_{xx} + \sum_{k=2}^{\infty} P_k(\zeta)\,\sigma_{kxx} \qquad (xy) \\ \sigma_{xy} &= \frac{T_{xy}}{h} + \frac{6\zeta}{h^2} M_{xy} + \sum_{k=2}^{\infty} P_k(\zeta)\,\sigma_{kxy} \end{aligned} \qquad (1.1)$$

Здесь и далее символ (xy) указывает, что аналогичные зависимости для других величин получаются заменой x на y.

В силу ортогональности полиномов Лежандра $T_{xx}, \ldots, M_{yy}$ имеют смысл усилий и моментов, а $P_k(\zeta)\,\sigma_{kxx}, \ldots$ — напряжения, самоуравновешенные по толщине пластины.

Для простоты будем считать, что поверхности пластины $z = \pm h/2$ загружены только нормальной непрерывно распределенной нагрузкой

$$\sigma_{zz} = \begin{cases} (p+q)/2 & \text{при } z = h/2 \\ (q-p)/2 & \text{при } z = -h/2 \end{cases}$$
$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \qquad \text{при } z = \pm h/2 \tag{1.2}$$

Подставляя выражения (1.1) в уравнения равновесия теории упругости и интегрируя их по z с учетом (1.2), получим выражения для остальных компонент напряжения (массовые силы отсутствуют)

$$\sigma_{xz} = \frac{3}{2h}(1-\zeta^2)V_x + \frac{h}{2a}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{P_{k-1}(\zeta)-P_{k+1}(\zeta)}{2k+1}A_{kx} \quad (xy)$$
$$\sigma_{zz} = \frac{q}{2} + \frac{3\zeta}{4}\left(1-\frac{\zeta^2}{3}\right)p +$$
$$+\frac{h^2}{4a^2}\sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{P_{k-2}(\zeta)}{(2k-1)(2k+1)} - \frac{2P_k(\zeta)}{(2k-1)(2k+3)} + \frac{P_{k+2}(\zeta)}{(2k+1)(2k+3)}\right]B_k \tag{1.3}$$

и уравнения равновесия в усилиях и моментах

$$\frac{\partial T_{xx}}{\partial\xi} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial\eta} = 0, \qquad \frac{\partial V_x}{\partial\xi} + \frac{\partial V_y}{\partial\eta} + ap = 0 \quad (xy)$$
$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial\xi} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial\eta} - aV_x = 0 \quad (xy) \tag{1.4}$$

Здесь

$$A_{kx} = \frac{\partial\sigma_{kxx}}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma_{kxy}}{\partial\eta}, \qquad B_k = \frac{\partial A_{kx}}{\partial\xi} + \frac{\partial A_{ky}}{\partial\eta} \quad (xy) \tag{1.5}$$

Величины V_x и V_y представляют собой перерезывающие усилия, в то время как A_{kx}, A_{ky} определяют касательные напряжения, самоуравновешенные по толщине пластины.

Как следует из вышеизложенного, выражения (1.1) и (1.3) удовлетворяют уравнениям равновесия теории упругости и граничным условиям (1.2), если входящие в них усилия и моменты удовлетворяют уравнениям равновесия теории пластин (1.4).

Для определения величин $T_{xx}, \ldots, M_{xx}, \ldots, \sigma_{kxx}, \ldots$ воспользуемся принципом Кастильяно; задача приводится к условному экстремуму, так как усилия и моменты должны подчиняться уравнениям (1.4).

Как обычно, воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа. Для этого внесем в подынтегральное выражение потенциальной энергии пластины левые части уравнений (1.4), умноженные на неопределенные множители. В результате получим функционал

$$\Pi = \frac{h}{4E}\iint\Big\{\int_{-1}^{1}[\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - 2\nu(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz}) +$$
$$+ 2(1+\nu)(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2)]\,d\zeta + 2E\frac{u}{h}\left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y}\right) +$$
$$+ 2E\frac{v}{h}\left(\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y}\right) + 2E\frac{w}{h}\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + p\right) + \tag{1.6}$$
$$+ 2E\frac{\varphi_x}{h}\left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - V_x\right) + 2E\frac{\varphi_y}{h}\left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - V_y\right)\Big\}\,dx\,dy$$

Здесь u, v, w, φ_x, φ_y — множители Лагранжа. Двойной интеграл берется по срединной плоскости пластины.

Подставим в (1.6) формулы напряжений (1.1) и (1.3) и приравняем нулю вариацию полученного функционала.

Из данного вариационного уравнения будут следовать равенства, которые должны быть выполнены в срединной плоскости пластины.

Если в рядах (1.1) удержать только по четыре первых члена ($\sigma_{kxx} = \sigma_{kyy} = \sigma_{kxy} = 0$, $k \geqslant 4$), эти равенства примут следующий вид:

$$\frac{T_{xx}}{h} = \frac{E}{(1-\nu^2)\,a}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \nu\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) + \frac{\nu}{2(1-\nu)}q + \left\{\frac{\nu}{60(1-\nu)}\left(\frac{h}{a}\right)^2 B_2\right\} \quad (xy) \quad (1.7)$$

$$\frac{T_{xy}}{h} = \frac{E}{2(1+\nu)a}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\right)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{2xx} = {}& \frac{\nu h}{12(1-\nu^2)a^2}\left[\frac{\partial^2(T_{xx}+T_{yy})}{\partial \xi^2} + \nu\frac{\partial^2(T_{xx}+T_{yy})}{\partial \eta^2}\right] - \\ & - \frac{1}{24(1-\nu^2)}\left(\frac{h}{a}\right)^2\left(\frac{\partial^2 q}{\partial \xi^2} + \nu\frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2}\right) + \\ & + \frac{1}{21(1-\nu)}\left(\frac{h}{a}\right)^2\left(\frac{\partial A_{2x}}{\partial \xi} + \nu\frac{\partial A_{2y}}{\partial \eta}\right) - \frac{\nu}{42(1-\nu)}\left(\frac{h}{a}\right)^2 B_2 - \\ & - \frac{\nu}{42(1-\nu^2)}\left(\frac{h}{a}\right)^2\left[\frac{\partial^2(\sigma_{2xx}+\sigma_{2yy})}{\partial \xi^2} + \nu\frac{\partial^2(\sigma_{2xx}+\sigma_{2yy})}{\partial \eta^2}\right] - \\ & - \frac{1}{1008(1-\nu^2)}\left(\frac{h}{a}\right)^4\left(\frac{\partial^2 B_2}{\partial \xi^2} + \nu\frac{\partial^2 B_2}{\partial \eta^2}\right) \quad (xy) \quad (1.8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{2xy} = {}& \frac{\nu h}{12(1+\nu)a^2}\frac{\partial^2(T_{xx}+T_{yy})}{\partial \xi\,\partial \eta} - \frac{1}{24(1+\nu)}\left(\frac{h}{a}\right)^2\frac{\partial^2 q}{\partial \xi\,\partial \eta} + \\ & + \frac{1}{42}\left(\frac{h}{a}\right)^2\left(\frac{\partial A_{2x}}{\partial \eta} + \frac{\partial A_{2y}}{\partial \xi}\right) - \frac{\nu}{42(1+\nu)}\left(\frac{h}{a}\right)^2\frac{\partial^2(\sigma_{2xx}+\sigma_{2yy})}{\partial \xi\,\partial \eta} - \\ & - \frac{1}{1008(1+\nu)}\left(\frac{h}{a}\right)^4\frac{\partial^2 B_2}{\partial \xi\,\partial \eta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{6M_{xx}}{h^2} = {}& -\frac{Eh}{2(1-\nu^2)a^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right) + \frac{6}{5(1-\nu)a}\left(\frac{\partial V_x}{\partial \xi} + \nu\frac{\partial V_y}{\partial \eta}\right) + \\ & + \frac{3\nu}{5(1-\nu)}p - \left\{\frac{1}{70}\left(\frac{h}{a}\right)^2\left(\frac{\partial A_{3x}}{\partial \xi} + \nu\frac{\partial A_{3y}}{\partial \eta}\right) - \frac{\nu}{140(1-\nu)}\left(\frac{h}{a}\right)^2 B_3\right\} \quad (xy) \quad (1.9)\end{aligned}$$

$$\frac{6M_{xy}}{h^2} = -\frac{Eh}{2(1+\nu)a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi\,\partial \eta} + \frac{3}{5a}\left(\frac{\partial V_x}{\partial \eta} + \frac{\partial V_y}{\partial \xi}\right) - \left\{\frac{1}{140}\left(\frac{h}{a}\right)^2\left(\frac{\partial A_{3x}}{\partial \eta} + \frac{\partial A_{3y}}{\partial \xi}\right)\right\}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{3xx} = {}& -\frac{\nu}{10(1-\nu)}p - \frac{1}{5(1-\nu)a}\left(\frac{\partial V_x}{\partial \xi} + \nu\frac{\partial V_y}{\partial \eta}\right) + \\ & + \frac{\nu}{10a^2}\left[\frac{\partial^2(M_{xx}+M_{yy})}{\partial \xi^2} + \nu\frac{\partial^2(M_{xx}+M_{yy})}{\partial \eta^2}\right] - \\ & - \frac{1}{90(1-\nu^2)}\left(\frac{h}{a}\right)^2\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} + \nu\frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2}\right) + \frac{1}{45(1-\nu)}\left(\frac{h}{a}\right)^2\left(\frac{\partial A_{3x}}{\partial \xi} + \nu\frac{\partial A_{3y}}{\partial \eta}\right) - \\ & - \frac{\nu}{90(1-\nu)}\left(\frac{h}{a}\right)^2 B_3 - \frac{\nu}{90(1-\nu^2)}\left(\frac{h}{a}\right)^4\left[\frac{\partial^2(\sigma_{3xx}+\sigma_{3yy})}{\partial \xi^2} + \right. \\ & \left. + \nu\frac{\partial^2(\sigma_{3xx}+\sigma_{3yy})}{\partial \eta^2}\right] - \frac{1}{7920(1-\nu^2)}\left(\frac{h}{a}\right)^2\left(\frac{\partial^2 B_3}{\partial \xi^2} + \nu\frac{\partial^2 B_3}{\partial \eta^2}\right) \quad (xy) \quad (1.10)\end{aligned}$$

$$\sigma_{3xy} = -\frac{1}{10a}\left(\frac{\partial V_x}{\partial\eta} + \frac{\partial V_y}{\partial\xi}\right) + \frac{\nu}{10(1+\nu)a^2}\frac{\partial^2(M_{xx}+M_{yy})}{\partial\xi\,\partial\eta} -$$

$$-\frac{1}{90(1+\nu)}\left(\frac{h}{a}\right)^2\frac{\partial^2 p}{\partial\xi\,\partial\eta} + \frac{1}{90}\left(\frac{h}{a}\right)^2\left(\frac{\partial A_{3x}}{\partial\eta} + \frac{\partial A_{3y}}{\partial\xi}\right) -$$

$$-\frac{\nu}{90(1+\nu)}\left(\frac{h}{a}\right)^2\frac{\partial^2(\sigma_{3xx}+\sigma_{3yy})}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{1}{7920(1+\nu)}\left(\frac{h}{a}\right)^4\frac{\partial^2 B_3}{\partial\xi\,\partial\eta}$$

$$\varphi_x = -\frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial\xi} + \frac{12(1+\nu)}{5Eh}V_x - \frac{(1+\nu)}{35E}\frac{h}{a}A_{3x} \qquad (xy) \qquad (1.11)$$

Кроме того, на контуре области должно иметь место равенство

$$\oint(u_n\delta T_{nn} + u_s\delta T_{ns} + w\delta V_n + \varphi_n\delta M_{nn} + \varphi_s\delta M_{ns})\,ds +$$

$$+\oint\sum_{k=2}^{\infty}\{[\ldots]_k\,\delta\sigma_{knn} + [\ldots]_k\,\delta\sigma_{kns} + [\ldots]_k\delta A_{kn}\}\,ds = 0 \qquad (1.12)$$

Величины под знаком интеграла суть составляющие соответствующих векторов и тензоров, отнесенных к внешней нормали n и касательной s к контуру области. Величины, стоящие в квадратных скобках, не будут в дальнейшем использованы, и потому мы их не приводим.

Из равенства (1.12) следуют статические и геометрические (однородные) граничные условия.

Отметим, что если в рядах (1.1) сохранить только по два первых члена, то получим теорию пластин Рейсснера [4]. Если, кроме того, в функционале (1.6) пренебречь напряжениями $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$, то получим теорию пластин Кирхгоффа.

Рассматривая полученные уравнения, легко заметить, что задача определения напряжений в пластине распадается на две независимые задачи.

Первая заключается в решении уравнений типа (1.7), (1.8) и первого уравнения (1.4) при соответствующих граничных условиях, следующих из (1.12). Вторая задача состоит в решении уравнений типа (1.9), (1.10), (1.11) и второго уравнения (1.4) при соответствующих граничных условиях.

В дальнейшем ограничимся случаем, когда в рядах (1.1) удерживаются только первые четыре члена ($k = 2, 3$).

Из полученной системы уравнений можно вывести (исключая усилия, моменты и перемещения, выступающие как множители Лагранжа) систему для определения самоуравновешенных по толщине пластины напряжений σ_{kxx}, σ_{kxy}, σ_{kyy}. В этих уравнениях коэффициенты при производных различного порядка суть малые числа, притом тем меньшие, чем выше порядок производной. Ввиду этого общее решение такой однородной системы будет выражаться через быстро изменяющиеся функции, а частное решение с достаточной степенью точности легко вычислить приближенно. Оно и будет определяющим при исследовании напряженного состояния пластины вдали от ее края, в то время как быстро изменяющаяся часть решения в силу принципа Сен-Венана (так как σ_{knn}, σ_{kns}, A_{kn} на краю пластины определяют напряжения, самоуравновешенные по толщине) будет локализоваться у края пластины и весьма быстро затухать по мере удаления от него.

В предлагаемой работе при определении напряжений ограничимся рассмотрением только частного решения упомянутых выше уравнений, не вдаваясь в рассмотрение напряженного состояния, локализующегося у краев пластины. При этом в формулах для напряжений σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{yy} будут удерживаться члены порядка $(h/a)^2$ и отбрасываться члены порядка $(h/a)^4$ по сравнению с единицей.

2. Рассмотрим сначала вторую задачу. Перерезывающие усилия и моменты, возникающие в пластине под действием поверхностной нагрузки (1.2), имеют следующий порядок:

$$V_x, \quad V_y \approx pa, \quad M_{xx}, \quad M_{xy}, \quad M_{yy} \approx pa^2 \tag{2.1}$$

(предполагается, что внешняя нагрузка такова, что порядок рассматриваемых величин не меняется при дифференцировании по ξ, η).

Частное решение уравнений (1.10) с точностью до членов порядка $(h/a)^2$ по сравнению с единицей имеет следующий вид:

$$\sigma_{3xx} = -\frac{\nu}{10(1-\nu)}p - \frac{1}{5(1-\nu)a}\left(\frac{\partial V_x}{\partial \xi} + \nu\frac{\partial V_y}{\partial \eta}\right) + \frac{\nu}{10a^2}\left[\frac{\partial^2(M_{xx}+M_{yy})}{\partial \xi^2} + \nu\frac{\partial^2(M_{xx}+M_{yy})}{\partial \eta^2}\right] \quad (xy)$$

$$\sigma_{3xy} = -\frac{1}{10a}\left(\frac{\partial V_x}{\partial \eta} + \frac{\partial V_y}{\partial \xi}\right) + \frac{\nu}{10(1+\nu)a^2}\frac{\partial^2(M_{xx}+M_{yy})}{\partial \xi\,\partial \eta} \tag{2.2}$$

Из этих уравнений и уравнений (2.1) и (1.5) заключаем, что в уравнениях (1.9) члены, заключенные в фигурные скобки, малы по сравнению с левыми частями (1.9), как $(h/a)^4$ по сравнению с единицей, и согласно принятой системе упрощения должны быть отброшены.

Получающиеся выражения для моментов

$$\frac{6M_{xx}}{h^2} = -\frac{Eh}{2(1-\nu^2)a^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right) + \frac{6}{5(1-\nu)a}\left(\frac{\partial V_x}{\partial \xi} + \nu\frac{\partial V_y}{\partial \eta}\right) + \frac{3\nu}{5(1-\nu)}p \quad (xy) \tag{2.3}$$

$$\frac{6M_{xy}}{h^2} = -\frac{Eh}{2(1+\nu)a^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi\,\partial \eta} + \frac{3}{5a}\left(\frac{\partial V_x}{\partial \eta} + \frac{\partial V_y}{\partial \xi}\right)$$

совпадают с формулами, полученными Рейсснером [4] и С. А. Амбарцумяном [2]. Эти формулы получились бы, если в (1.11) отбросить последний член справа. Поэтому следует принять

$$\varphi_x = -\frac{1}{a}\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{12(1+\nu)}{5Eh}V_x \quad (xy) \tag{2.4}$$

Сформулированная краевая задача совпадает с краевой задачей в постановке Е. Рейсснера [4], но отличается от краевой задачи в постановке С. А. Амбарцумяна [2]. Так, условием заделки края пластины в работе Е. Рейсснера будет равенство

$$-\frac{\partial w}{\partial n} + \frac{12(1+\nu)}{5Eh}V_n = 0 \tag{2.5}$$

а в работе С. А. Амбарцумяна — равенство

$$-\frac{\partial w}{\partial n} + \frac{3(1+\nu)}{Eh}V_n = 0 \tag{2.6}$$

Условие (2.5) получено вариационным путем. Левая часть его имеет смысл обобщенного перемещения, на котором производит работу момент M_{nn}. Левая же часть (2.6) не имеет такого смысла. Поэтому условие заделки (2.6) не отвечает требованию, чтобы опорные реакции не производили работы, и его следует признать непоследовательным. Результатом этого будет несамосопряженность соответствующей краевой задачи. Таким образом, краевая задача в принятой постановке совпадает с краевой задачей изгиба пластин Рейсснера. Различие состоит в формулах, по которым вычисляются напряжения после того, как будут найдены усилия, моменты и перемещение w. Так, напряжения σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{yy} согласно (1.1), (2.2) и (2.3) определяются формулами

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} = &-\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\\ &+\frac{3}{1-\nu}\frac{z}{h}\left(1-\frac{4z^2}{3h^2}\right)\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}+\nu\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{3z}{2h}\left(1-\frac{4z^2}{3h^2}\right)p-\\ &-\frac{\nu E z^3}{6(1-\nu)}\Delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\frac{\nu E h^3}{40(1-\nu)}\frac{z}{h}\Delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \quad (xy) \qquad (2.7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} = &-\frac{Ez}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\frac{3z}{2h}\left(1-\frac{4z^2}{3h^2}\right)\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)-\\ &-\frac{\nu E z^3}{6(1-\nu^2)}\frac{\partial^2\Delta w}{\partial x\,\partial y}+\frac{\nu E h^3}{40(1-\nu^2)}\frac{z}{h}\frac{\partial^2\Delta w}{\partial x\,\partial y} \qquad \left(\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\end{aligned}$$

Первые члены в правых частях этих формул дают напряжения, вычисляемые согласно классической теории пластин. Остальные слагаемые дают поправку порядка $(h/a)^2$ по сравнению с единицей.

Если в рядах (1.1) удержать еще члены $P_5(\zeta)\,\sigma_{5xx}$, $P_5(\zeta)\,\sigma_{5xy}$, $P_5(\zeta)\,\sigma_{5yy}$, то полученная за их счет поправка имела бы еще более высокий порядок малости по сравнению с единицей, чем $(h/a)^2$.

В теории пластин Рейсснера напряжения

$$\sigma_{xx} = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\frac{12}{5(1-\nu)}\frac{z}{h}\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}+\nu\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)+\frac{6\nu}{5(1-\nu)}\frac{z}{h}p$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\frac{6}{5}\frac{z}{h}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial x}\right) \quad (xy) \qquad (2.8)$$

Для сравнения приведем формулы С. А. Амбарцумяна [2]

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} = &-\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\\ &+\frac{3}{1-\nu}\frac{z}{h}\left(1-\frac{4z^2}{3h^2}\right)\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}+\nu\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{3z}{2h}\left(1-\frac{4z^2}{3h^2}\right)p \quad (xy)\\ \sigma_{xy} = &-\frac{Ez}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\frac{3z}{2h}\left(1-\frac{4z^2}{3h^2}\right)\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)\end{aligned} \qquad (2.9)$$

и формулы, полученные Х. М. Муштари [3]

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} = &-\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\frac{3}{1-\nu}\frac{z}{h}\left(1-\frac{4z^2}{3h^2}\right)\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}+\nu\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)+\\ &+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{3z}{2h}\left(1-\frac{4z^2}{3h^2}\right)p-\frac{\nu E z^3}{6(1-\nu)(1-\nu^2)}\Delta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \quad (xy)\\ \sigma_{xy} = &-\frac{Ez}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{3z}{2h}\left(1-\frac{4z^2}{3h^2}\right)\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)-\frac{\nu E z^3}{6(1-\nu^2)}\frac{\partial^2\Delta w}{\partial x\partial y}\end{aligned} \qquad (2.10)$$

Сопоставление формул (2.8) — (2.10) с формулами (2.7) показывает, что в первых отсутствуют некоторые члены, имеющие, вообще говоря, тот же порядок, что и удерживаемые.

Причина этого заключается в том, что Рейсснер исходит из линейного распределения напряжений σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{yy} по толщине пластины; другие же авторы [2,3], определяя перемещения и напряжения, вводят те или иные упрощающие задачу предположения, погрешность которых не оценивается.

3. Обратимся теперь к задаче безмоментной деформации пластины. Предположим, что напряжения, вызываемые усилиями, приложенными к краю пластины, имеют тот же порядок, что и напряжения от изгиба (т. е. $p(a/h)^2$) и пусть $q \approx p$.

Частное решение уравнений (1.8) с точностью до членов порядка $(h/a)^2$ по сравнению с единицей будет

$$\sigma_{2xx} = \frac{\nu h}{12(1-\nu^2)a^2}\left[\frac{\partial^2 (T_{xx}+T_{yy})}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 (T_{xx}+T_{yy})}{\partial \eta^2}\right]$$

$$\sigma_{2xy} = \frac{\nu h}{12(1+\nu)a^2}\frac{\partial^2 (T_{xx}+T_{yy})}{\partial \xi \partial \eta} \qquad (xy) \qquad (3.1)$$

Учитывая, что T_{xx}, $T_{yy} \approx ph(a/h)^2$ и принимая во внимание (1.5), заключаем, что в (1.7) слагаемое в фигурных скобках мало по сравнению с левой частью (1.7), как $(h/a)^4$ по сравнению с единицей, и согласно принятой системе упрощения должно быть отброшено. Получаем

$$\frac{T_{xx}}{h} = \frac{E}{(1-\nu^2)a}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \nu\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) + \frac{\nu}{2(1-\nu)}q \qquad (xy)$$

$$\frac{T_{xy}}{h} = \frac{E}{2(1+\nu)a}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\right) \qquad (3.2)$$

Эти формулы имеются и в работах [2,3], где они определяют безмоментные напряжения. В настоящей же работе согласно (3.1) и (1.1) напряжения выражаются формулами

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\nu}{2(1-\nu)}q +$$

$$+ \frac{\nu E h^2}{24(1-\nu)(1-\nu^2)}\left(\frac{12z^2}{h^2} - 1\right)\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] \qquad (xy)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\nu E h^2}{24(1-\nu^2)}\left(\frac{12z^2}{h^2} - 1\right)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

Если в рядах (1.1) удержать еще члены $P_4(\zeta)\sigma_{4xx}$, $P_4(\zeta)\sigma_{4xy}$, $P_4(\zeta)\sigma_{4yy}$, то получатся поправки более высокого порядка малости по сравнению с единицей, чем $(h/a)^2$.

Поступила 12 VII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Cicala Placido. Sulla teoria elastica della parete sotile. Giorn. genio civile, 1959, 97, № 4, 6, 9.
2. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, 1961.
3. Муштари Х. М. Теория изгиба плит средней толщины. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1959, № 2.
4. Reissner E. On the theory of bending of elastic Plates. J. Math. and Phys., vol. XXIII, 1944.