

О НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ РАСПРОСТРАНЕНИИ ТРЕЩИН

Г. И. Баренблатт, Р. Л. Салганик, Г. П. Черепанов

(Москва)

Процессы распространения трещин давно привлекают внимание исследователей. Стационарное распространение трещин к настоящему времени можно считать в некоторой мере изученным.

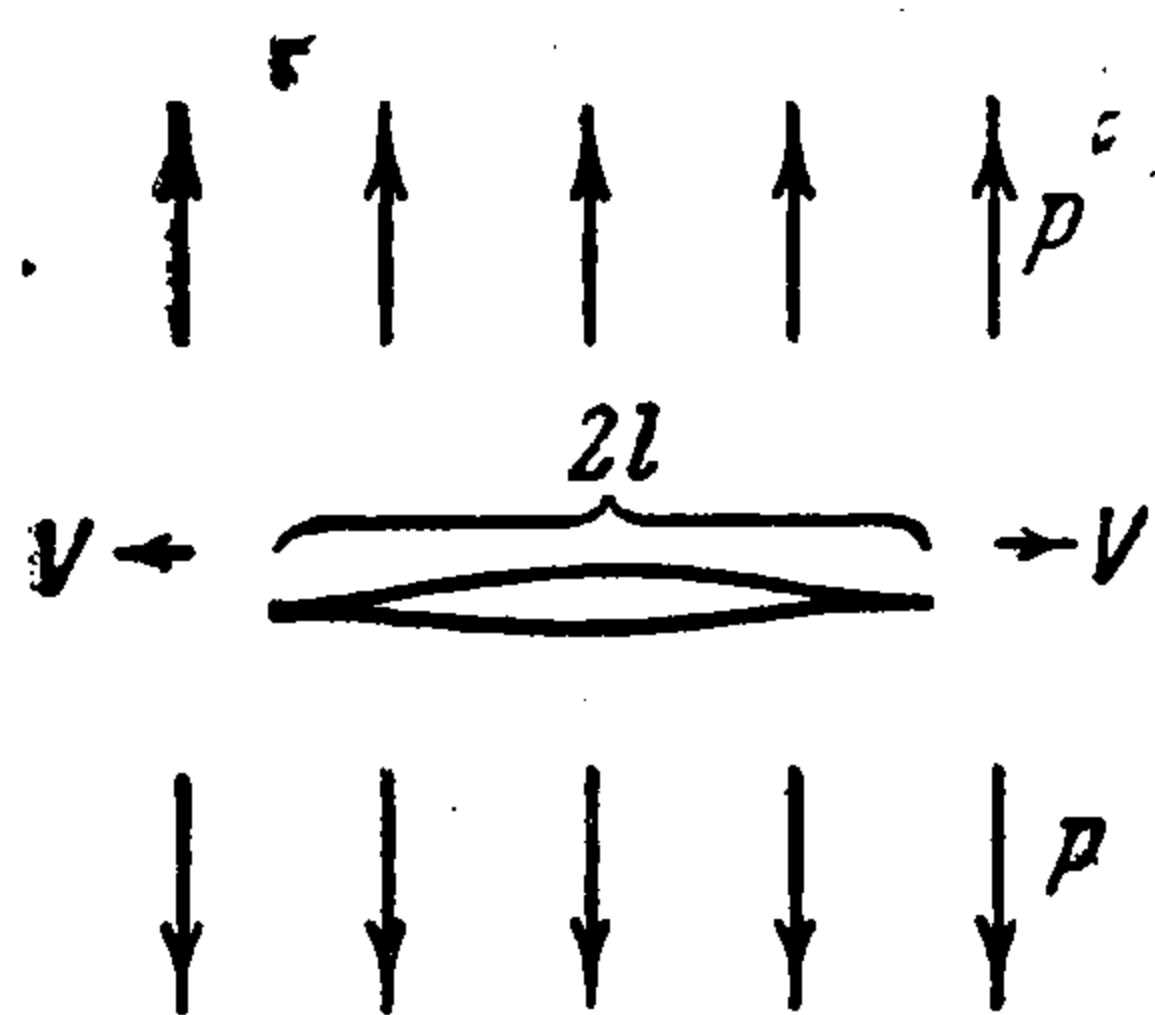
Наиболее простой задачей нестационарного распространения трещин является, по-видимому, задача о расширении с постоянной скоростью прямолинейной трещины в однородном поле напряжений, перпендикулярных линии трещины. Эта задача рассматривалась многими авторами, начиная с Мотта [1], но только в работе Броберга [2] она была впервые исследована как задача динамической теории упругости. Однако Броберг пренебрег действием сил сцепления и поэтому пришел к выводу, что равномерное распространение трещины может происходить только со скоростью, равной скорости распространения релеевских поверхностных волн: для всякой другой скорости распространения на конце трещины получается некомпенсированная особенность поля напряжений.

В предлагаемой работе в определенных предположениях учитывается действие сил сцепления и на основе этого учета получается уравнение, определяющее скорость распространения трещины в зависимости от величины приложенного напряжения. Оказывается, что для каждого материала существует некоторая минимальная скорость устойчивого равномерного распространения трещины. Далее, скорость устойчивого распространения трещины возрастает с увеличением разрывающей нагрузки, стремясь к релеевской; по-видимому, в изотропных телах режим равномерного расширения трещины с релеевской скоростью не осуществляется вследствие начала ветвления трещины.

§ 1. Основные представления и гипотезы. Рассматривается следующая задача. Имеется (фиг. 1) бесконечное однородное и изотропное идеально хрупкое упругое тело, растягиваемое постоянным напряжением p . В начальный момент делается надрез длины $2l_0$, больший критического, так что трещина сразу же начинает расширяться. Предполагается, что имеет место плоская деформация. Если рассматривать движение при $t \gg l_0/c$, где c — скорость распространения поперечных волн, то начальная неравномерность, связанная с влиянием бегущей от трещины волны возмущения, перестает сказываться.

Можно предполагать поэтому, что на определенном этапе расширение трещины происходит¹ с постоянной скоростью V . При этом можно считать ввиду относительной малости периода неравномерного распространения,

¹ Как будет показано ниже, равномерное расширение трещины с дорелеевской скоростью не может продолжаться неограниченно.



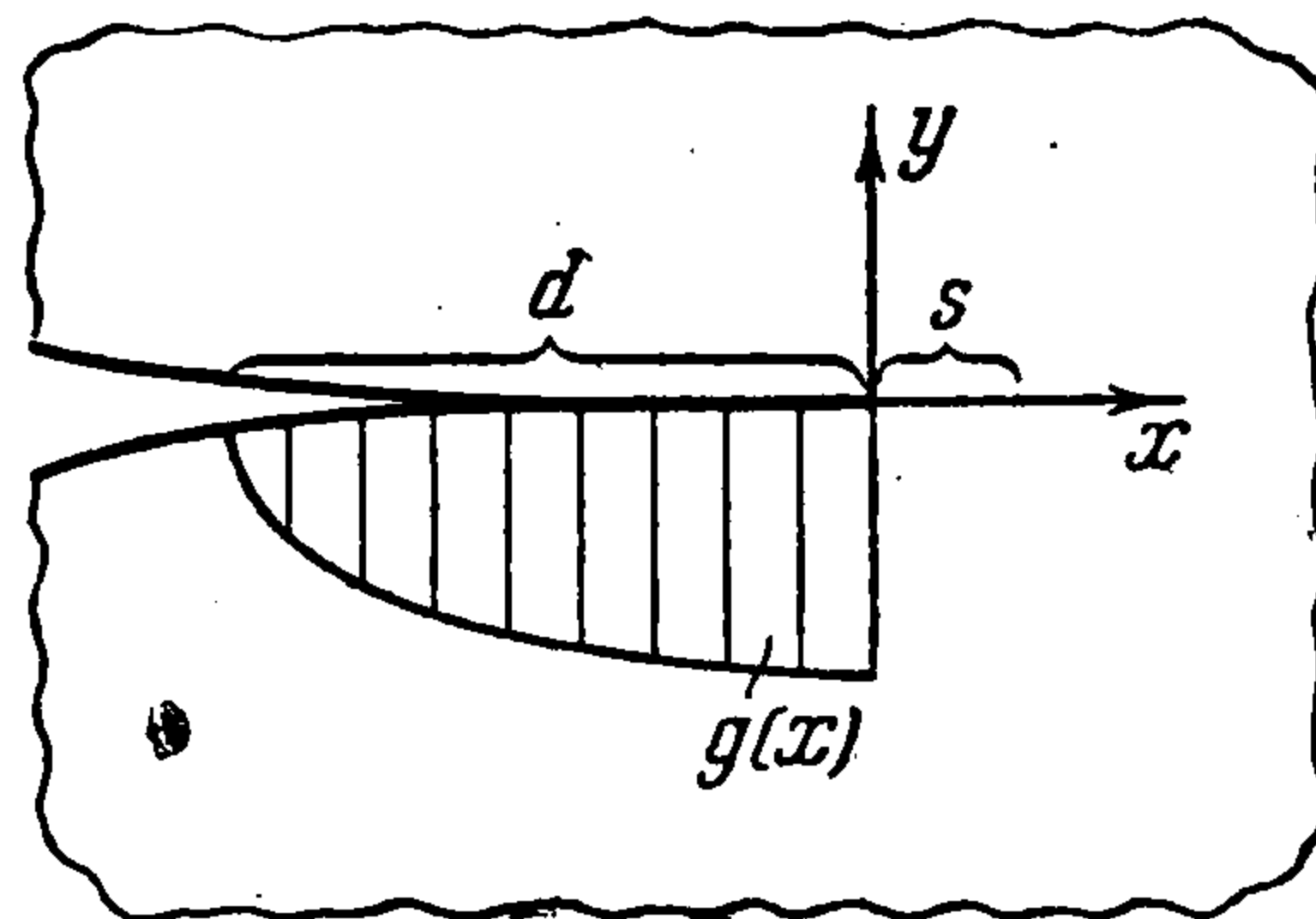
Фиг. 1

что равномерное расширение трещины происходит с самого начала, так что полудлина трещины l определяется соотношением

$$l = Vt \quad (1.1)$$

По аналогии с представлениями, развитыми ранее для статических трещин [3,4], разобьем поверхность трещины ($-l \leq x \leq l$) на две части: внутреннюю область ($-l + d \leq x \leq l - d$) и концевую область ($-l \leq x \leq -l + d, l - d \leq x \leq l$).

Поверхность внутренней области считается свободной от напряжений, поскольку противоположные берега трещины в этой области далеко отстоят один от другого; в концевой области действуют силы сцепления, распределенные по некоторому закону. Для квазихрупких материалов, распространение трещины в которых сопровождается пластическими деформациями в тонком слое вблизи поверхности трещины, следует при теоретическом рассмотрении за поверхность трещины считать границу между упругой и пластической областями и включать в силы сцепления также силы, действующие со стороны пластической головки, образующейся впереди края трещины, на материал, находящийся в упругом состоянии [4].



Фиг. 2

Относительно концевой области и распределения сил сцепления в ней сделаем два общих предположения.

1°. Концевая область поверхности трещины расширяется с постоянной скоростью v , не зависящей от приложенной нагрузки и много меньшей скорости расширения трещины. Таким образом,

$$d = vt \quad (v \ll V) \quad (1.2)$$

2°. Распределение сил сцепления $g(x)$ в концевой области поверхности трещины автономно, т. е. не зависит от приложенной нагрузки и определяется только мгновенным размером концевой области d , расстоянием точки концевой области от конца трещины $r = |l - x|$ и характеристиками материала: модулем упругости E , коэффициентом Пуассона ν и скоростью распространения поперечных волн c .

Для квазихрупкого материала существует также предел текучести σ_0 . Из соображений анализа размерности получаем

$$g(x) = EG\left(\frac{r}{d}, \nu\right) \quad (1.3)$$

где функция G универсальна. Сделанные предположения определяют автономный характер развития концевой области.

§ 2. Связь приложенного напряжения со скоростью распространения трещины. Рассмотрим малую окрестность конца трещины (фиг. 2). Разобьем поле напряжений в каждой точке упругого тела на две части: определяемую одними только силами сцепления и вычисляемую без учета сил сцепления. Ввиду малости скорости расширения концевой области трещины и того, что $t \gg l_0/c$, поле напряжений, обусловливаемое действием одних сил сцепления вблизи концов трещины, можно считать квазистационар-

ным. Как показано ранее [5], при стационарном распространении трещины распределение растягивающего напряжения $\sigma_y^{(1)}$, обусловленного действием одних только сил сцепления, на продолжении трещины имеет вид:

$$\sigma_y^{(1)} = - \frac{1}{\pi \sqrt{s}} \int_0^d \frac{g dr}{\sqrt{r}} \quad (2.1)$$

где s — малое расстояние до конца трещины. Используя (1.3), получаем

$$\sigma_y^{(1)} = - \frac{E}{\pi \sqrt{s}} \int_0^d \frac{G(r/d, \nu) dr}{\sqrt{r}} = - \frac{E \sqrt{vt}}{\pi \sqrt{s}} \int_0^1 \frac{G(u, \nu) du}{\sqrt{u}} \quad (2.2)$$

В силу универсальности функции $G(u, \nu)$ интеграл в правой части (2.2) не зависит от приложенной нагрузки.

Таким образом, величина

$$E \sqrt{v} \int_0^1 \frac{G(u, \nu) du}{\sqrt{u}} \quad (2.3)$$

представляет собой постоянную характеристику материала, которую мы обозначим через R . Размерность константы R имеет вид:

$$[R] = [F] L^{-3/2} T^{-1/2} = M L^{-1/2} T^{-5/2}.$$

Таким образом, соотношение (2.2) приводится к виду

$$\sigma_y^{(1)} = - \frac{R}{\pi} \sqrt{\frac{t}{s}} \quad (2.4)$$

Как показано Бробергом [2], распределение растягивающих напряжений $\sigma_y^{(2)}$, вычисленных без учета сил сцепления, на продолжении трещины вблизи ее конца имеет вид:

$$\sigma_y^{(2)} = p F(m, \nu) \sqrt{\frac{ct}{s}}, \quad m = \frac{V}{c} \quad (2.5)$$

где p — растягивающее напряжение на бесконечности, а безразмерная функция $F(m, \nu)$ определяется соотношениями

$$F(m, \nu) = \frac{\sqrt{1 - k^2 m^2} \{4 \sqrt{(1 - k^2 m^2)(1 - m^2)} - (m^2 - 2)^2\}}{f(m, \nu) m^{3/2} \sqrt{2}} \quad (2.6)$$

$$f(m, \nu) = [(1 - 4k^2) m^2 + 4k^2] K(\sqrt{1 - k^2 m^2}) - 4(1 - k^2 m^2) K(\sqrt{1 - m^2}) - \frac{1}{m^2} [m^4 - 4(1 + k^2) m^2 + 8] E(\sqrt{1 - k^2 m^2}) + \frac{8}{m^2} (1 - k^2 m^2) E(\sqrt{1 - m^2}) \quad \left(k = \sqrt{\frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu}} \right) \quad (2.7)$$

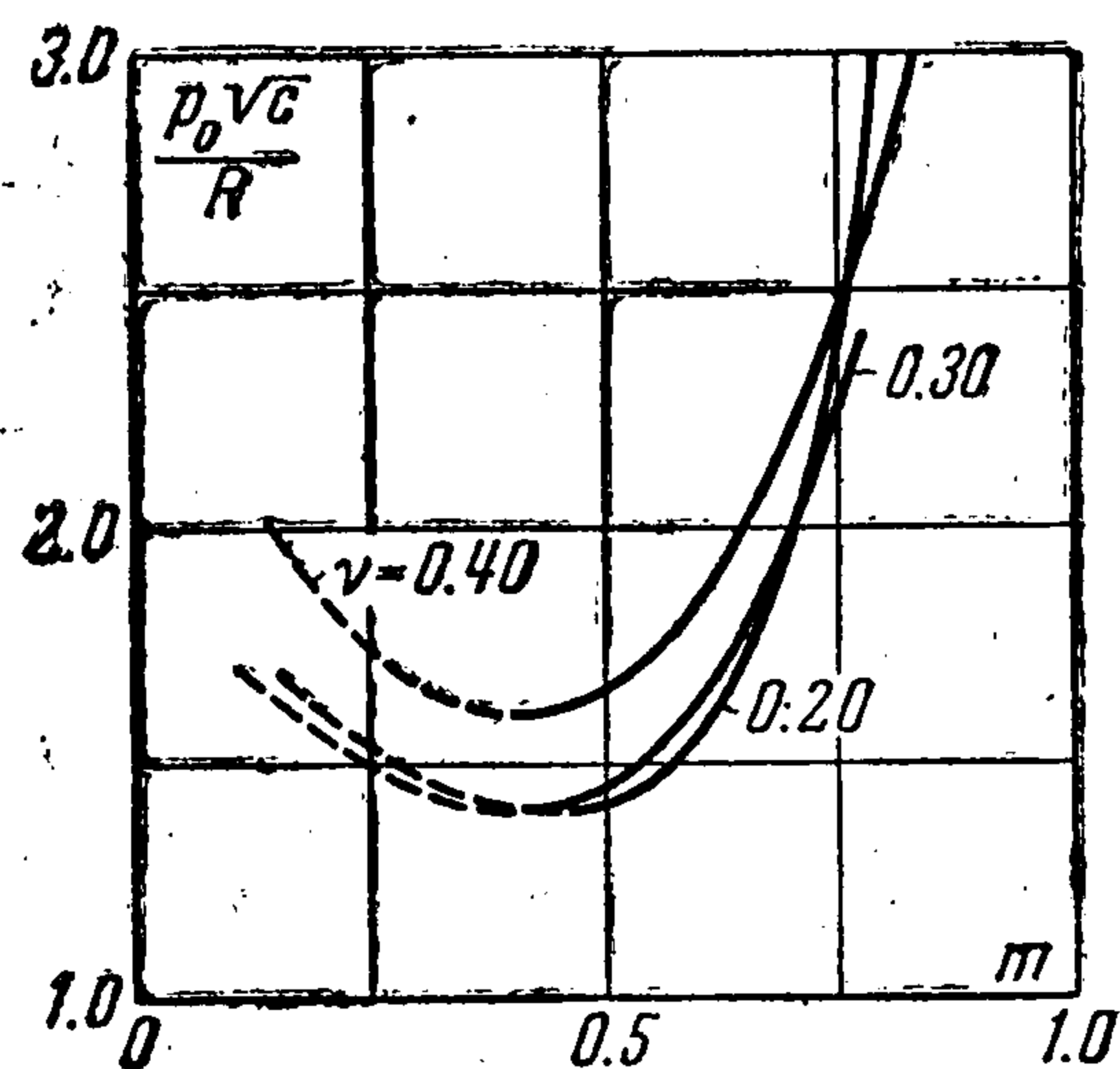
Потребуем теперь конечности напряжений на конце распространяющейся трещины. Для этого необходимо, чтобы величина $\sigma_y = \sigma_y^{(1)} + \sigma_y^{(2)}$ была ограничена при $s \rightarrow 0$, откуда и из (2.4) и (2.5) получаем основное соотношение

$$\frac{p \sqrt{c}}{R} = \frac{1}{\pi F(m, \nu)} \quad (2.8)$$

определяющее скорость трещины в зависимости от приложенного напряжения p . В соотношение (2.8) входят постоянные материала c, ν, R . От-

метим, что для больших скоростей следует, по-видимому, предполагать, что распределение сил сцепления $g(x)$ может зависеть также от скорости расширения трещины V , в связи с чем у универсальной функции G появляется еще один аргумент $m = V/c$ и характеристика R оказывается зависящей от m . Однако для рассматриваемого интервала скоростей, меньших скорости начала ветвления трещины, эту зависимость можно в первом приближении не учитывать.

§ 3. Обсуждение результатов. Зависимость (2.8) графически представлена на фиг. 3 для нескольких значений ν . Как видно, при достаточно малых разрывающих напряжениях p уравнение (2.8) решения не имеет, так что предположенного режима равномерного распространения не существует. Объяснение этого обстоятельства будет дано ниже. При p , больших критического значения, соответствующего минимуму правой части (2.8), каждому значению p соответствуют два значения m , удовлетворяющие уравнению (2.8). Одно из них, меньшее, соответствует неустойчивому распространению трещины, так как с увеличением нагрузки скорость распространения трещины уменьшается; другое соответствует устойчивому распространению трещины, так как с увеличением нагрузки скорость распространения трещины возрастает.



Фиг. 3

Следовательно, на самом деле должно осуществляться большее значение m , так что для данного материала существует минимальная скорость равномерного распространения трещины.

Существенно, что рассматриваемый режим равномерного распространения трещины не может продолжаться бесконечно долго. В самом деле, «развитие» концевой области трещины продолжается, пока ее сопротивление не достигнет некоторого максимума, соответствующего стационарному распространению. Как известно [5], при стационарном распространении трещины, на расстоянии s от ее конца, большом сравнительно с размером d концевой области, но малом сравнительно с характерным размером трещины, растягивающее напряжение σ_y представляется в виде

$$\sigma_y = \frac{N_0}{\sqrt{2s}}, \quad N_0 = \frac{\sqrt{2}K}{\pi} \quad (3.1)$$

где K — модуль сцепления [3, 4]. Согласно (2.5) и (2.8) в процессе неустановившегося динамического распространения трещины распределение напряжений σ_y на продолжении трещины вблизи ее конца также записывается в виде $N_0/\sqrt{2s}$, но N_0 уже определяется соотношением

$$N_0 = pF(m, \nu) \sqrt{2ct} = \frac{R}{\pi} \sqrt{2t} \quad (3.2)$$

Таким образом, увеличение N_0 , определяемого формулой (3.2), может происходить до тех пор, пока оно не достигнет значения, равного $\sqrt{2}K/\pi$, т. е. при $t < T$, где

$$T = K^2/R^2 \quad (3.3)$$

Стало быть, равномерное распространение трещины возможно лишь в интервале времени

$$l_0/c \ll t < T \quad (3.4)$$

Далее, функция $F(m, \nu)$ обращается в нуль при $m = 0$ и $m = m_0$, где m_0 соответствует скорости распространения поверхностных волн Релея, так что правая часть (2.8) обращается в бесконечность при этих значениях m . Таким образом, ввиду неустойчивости распространения трещины с малой скоростью при увеличении нагрузки скорость распространения трещины должна приближаться к релеевской. Однако, как известно ([6], см. также [5]), в изотропном теле релеевская скорость прямолинейного стационарного распространения трещины не достигается, так как раньше начинается ветвление трещины. По-видимому, аналогичное явление имеет место и при нестационарном расширении трещины. Выясним теперь, почему при малых p не получается режима равномерного распространения трещины. В самом деле, полудлина l_0 начальной трещины должна быть больше критической полудлины l_0^* , соответствующей данному p и равной (см., например, [4])

$$l_0^* = \frac{2K^2}{\pi^2 p^2} \quad (3.5)$$

Таким образом, при уменьшении p время l_0/c возрастает и, наконец, становится сравнимым со временем развития концевой области T . Поэтому временной интервал равномерного распространения сокращается и при минимальном значении p , равном p_m , исчезает. Найдем величину отношения cT/l_0 при $p = p_m$, когда интервал равномерного распространения стянулся в точку. Имеем, пользуясь (2.8), (3.3) и (3.5):

$$\frac{cT}{l_0} = \frac{cK^2 \pi^2 p_m^2}{2R^2 K^2} = \frac{c \pi^2 p_m^2}{2 p_m^2 \pi^2 F_m^2 c} = \frac{1}{2 F_m^2} \quad (3.6)$$

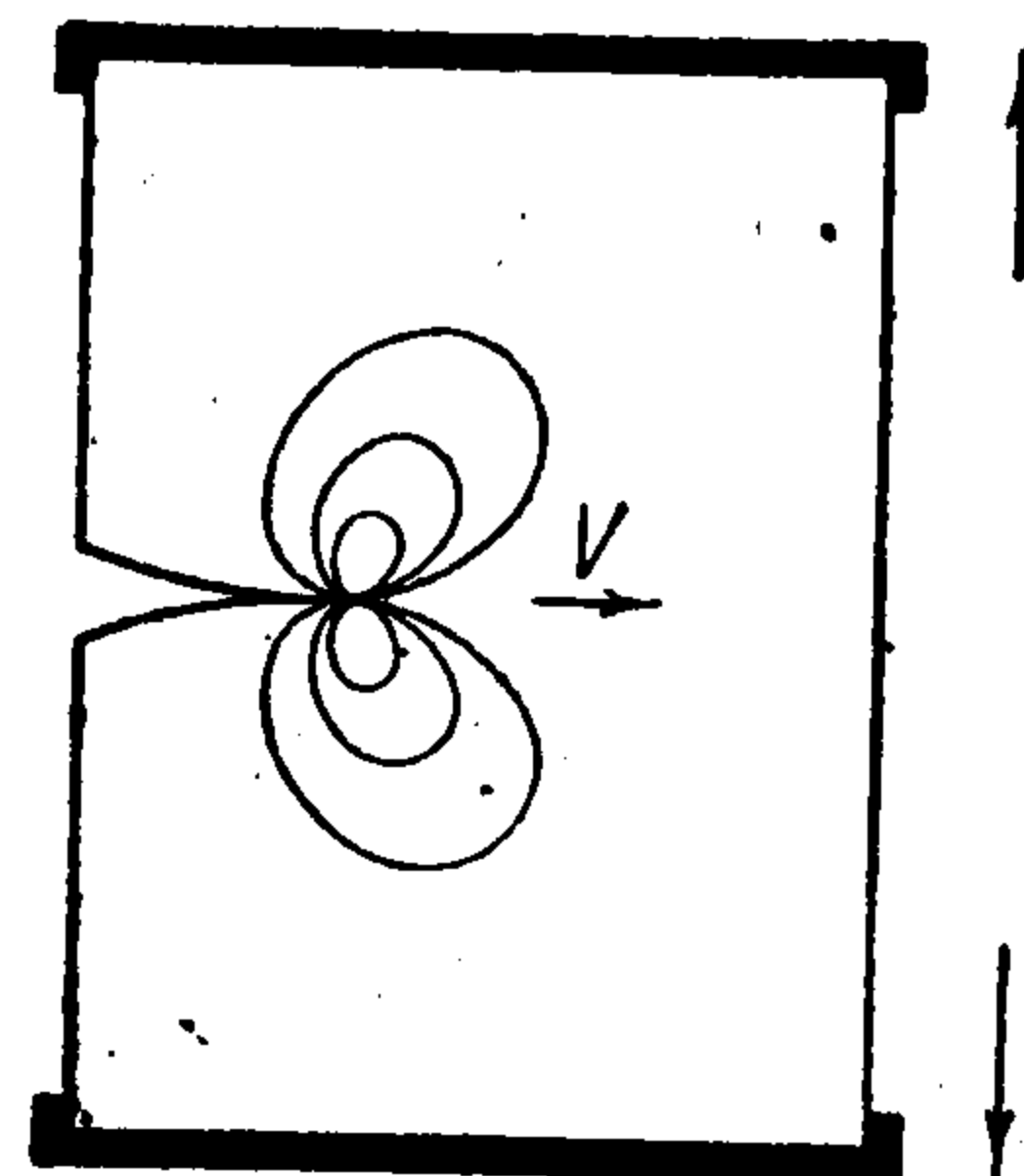
где F_m — максимальное значение функции $F(m, \nu)$ при данном m . Из фиг. 3 видно, что F_m составляет величину $\sim 1/1.5\pi \sim 0.2$, так что $cT/l_0 \sim 10$. При $p > p_m$ для интервала времени равномерного распространения, очевидно, получаем

$$10 \frac{l_0}{c} < t < T \quad (3.7)$$

При $t > T$ силы сцепления оказываются не в состоянии поддержать равномерное распространение трещины. Скорость расширения трещины увеличивается, пока не достигается скорость ветвления трещины, после чего прямолинейное распространение трещины прекращается. Если материал анизотропен, то ветвление трещины может не начаться, так что расширение трещины будет ускоряться вплоть до достижения режима равномерного распространения с релеевской скоростью.

§ 4. Опыты Уэллса и Поста. Определение константы R . Уэллс и Пост [7] опубликовали отчет о весьма интересных опытах, относящихся к неустановившемуся динамическому распространению трещин и в известной мере реализующих обсуждаемую в предлагаемой работе теоретическую схему. Исследование Уэллса и Поста было выполнено по следующей схеме (фиг. 4). На прямоугольных пластинках из прозрачного материала CR-39 делалась небольшая начальная трещина по перпендикуляру в середине одной из сторон. Противоположные края пластинки, парал-

лельные надрезу, помещались в жесткие металлические зажимы, которые раздвигались в направлении, перпендикулярном трещине, так что трещина начинала расширяться. Движущаяся трещина освещалась четырьмя последовательными вспышками поляризованного света и фотографировалась; получающиеся изохроматические петли определяли распределение напряжений вблизи концов движущейся трещины. В частности, ввиду того, что действие сил сцепления сказывается на поле напряжений только на расстояниях порядка нескольких размеров концевой области от конца трещины, можно определить из этих опытов коэффициент интенсивности напряжений N_0 . Это было выполнено Ирвином [8,9]; значения N_0^2 в функции длины трещины l представлены на фиг. 5 (отмечены кружками), горизонтальные черточки обозначают среднюю скорость распространения трещины на соответствующих участках. Как видно, средняя скорость распространения трещины может в некотором приближении считаться постоянной, а зависимость величины N_0^2 от длины трещины близка к пропорциональной.

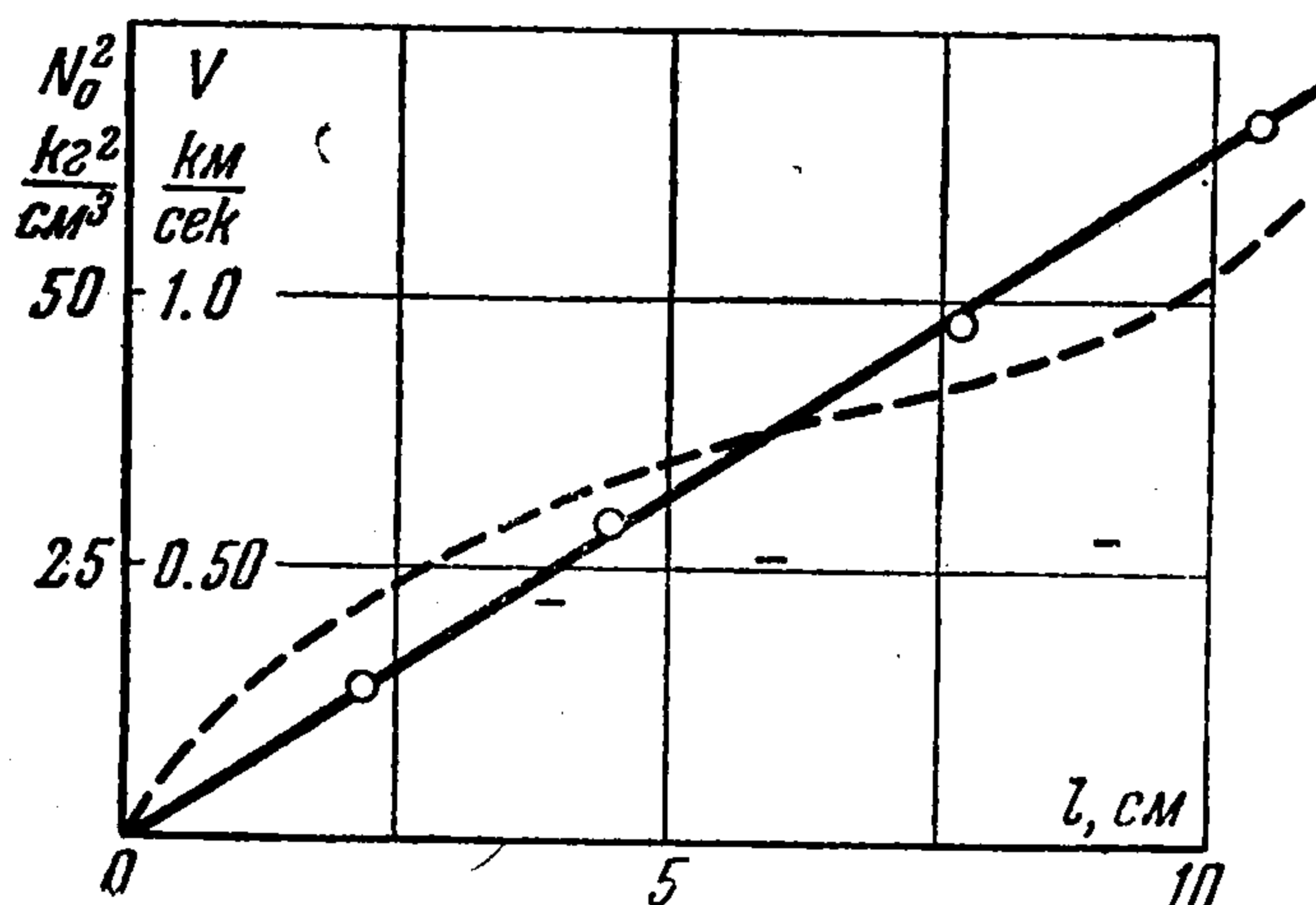


Фиг. 4

В силу (1.1) и (3.2) имеем

$$N_0^2 = \frac{R^2 l}{\pi^2 V} \quad (4.1)$$

Далее, время l_0/c составляет для опытов Уэллса и Поста величину порядка 0.5×10^{-5} сек ($l_0 \sim 0.3$ см, $c \sim 0.8 \times 10^5$ см/сек), время распространения трещины по всей ширине пластинки имеет величину примерно 2.5×10^{-4} сек. Оценим время развития концевой области T . Согласно (3.3) и (4.1) имеем



Фиг. 5

$$T = \frac{K^2}{R^2} = \frac{K^2 l}{\pi^2 N_0^2 V} \quad (4.2)$$

Возьмем для оценки T данные, соответствующие второй точке справа $N_0^2 = 0.45 \times 10^2$ кг²/см³; $l = 7.8$ см и среднее значение скорости $V = 0.5 \times 10^5$ см/сек.

Для материалов типа СР-39, использованного в работе Уэллса и Поста, модуль сцепления K в статических условиях имеет порядок величины нескольких сот кг/см^{3/2}. Полагая $K = 100$ кг/см^{3/2}, получаем $T = 3 \times 10^{-3}$ сек., таким образом, неравенство (3.7) выполняется и можно считать, что, несмотря на ограниченность пластинки, предложенная теория применима в условиях опытов Уэллса и Поста. Приведенные на фиг. 5 данные позволяют определять величину R для материала СР-39. Именно, проведем прямую, проходящую через начало координат фиг. 5 и наиболее близкую в смысле среднеквадратичного отклонения ко всем четырем опытным точкам. Согласно (4.1) тангенс угла наклона этой прямой равен $R^2 / \pi^2 V$.

Принимая среднее значение скорости равным $V = 0.5 \cdot 10^5$ см/сек, находим $R = 1.6 \times 10^3$ кг/см^{3/2} сек^{1/2}. Отметим, что Ирвин [8, 9] сделал попытку построить квазистатическое описание опытов Уэллса и Поста. Соответствующая кривая приведена на фиг. 5 пунктиром. Однако эта кривая построена путем подбора на основе малоестественного предположения о том, что продольный размер растягиваемой пластинки растет со временем, причем скорость роста выбрана из соображений наилучшего согласия с экспериментом. Данное Ирвином описание нам представляется недостаточным.

Авторы благодарят С. С. Григоряна за ценное обсуждение и выражают свою признательность Л. Я. Семеновой за помощь при проведении вычислений.

Поступила 30 XI 1961

Институт механики
Московского университета

ЛИТЕРАТУРА

1. Mott N. F. Fracture of metals; theoretical consideration. Engineering, 1948, vol. 165, 16—18.
2. В р о б е р г К. В. The propagation of a brittle crack. Arkiv för Fysik, 1960, vol. 18, 159—192.
3. Б а р е н б л а т т Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 3—5.
4. Б а р е н б л а т т Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении. ПМТФ, 1961, № 4.
5. Б а р е н б л а т т Г. И. и Ч е р е п а н о в Г. П. О расклинивании хрупких тел. ПММ, 1960 т. XXIV, вып. 4.
6. Yoffe E. The moving Griffith crack. Phil. mag., 1951, ser. VII, vol. 42, 739—750.
7. Wells A. A. and Post D. The dynamic stress distribution surrounding a running crack,— a photoelastic analysis. Proc. Soc. Exper. Stress Analysis, 1958, vol. 16, № 1.
8. Irwin G. R. The dynamic stress distribution surrounding a running crack,— a photoelastic analysis. Discussion, Proc. Soc. Exper. Stress Analysis, 1958, vol. 16, № 1.
9. Irwin G. R. Fracture, in «Encyclopedia of Physics», vol. 6, pp. 551—590, Springer — Verlag, Berlin, 1958.