Прикладная математика и механика. Том XXVI, 1962
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ЛАГРАНЖЕВЫХ УРАВНЕНИЯХ ГИДРОДИНАМИКИ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

А. С. Монин
(Москва)

При описании движений жидкости обычно используется метод Эйлера. В случае несжимаемой жидкости, который рассматривается в настоящей работе, эйлеровой характеристикой потока служит поле скорости u (ξ, t) (давление может быть выражено через квадратичные комбинации скоростей). Уравнения Навье — Стокса (вместе с уравнением неразрывности) в принципе позволяют определить это поле в любой момент времени $t > t_0$ по заданному начальному полю $u_0(\xi) = u(\xi, t_0)$.

В ряде задач гидродинамики возникает необходимость в описании движения индивидуальных (меченых) жидких частиц или эволюции поверхностей или объемов, состоящих из фиксированных жидких частиц. В таких задачах для описания движения жидкости удобнее применять метод Лагранжа. Особый интерес этот метод представляет для статистического описания турбулентных движений.

Так, Тэйлор [1] сформулировал основные понятия теории турбулентной диффузии (которая есть не что иное, как статистический эффект переноса примесей движущимися жидкими частицами) в терминах лагранжевых корреляционных функций поля скорости. Лагранжев метод сулит большие перспективы для дальнейшего развития теории локальной структуры турбулентности, т. е. статистической структуры относительных движений в окрестности фиксированной жидкой частицы; использование приближенных полулагранжевых уравнений гидродинамики уже позволило получить ряд интересных результатов в изучении спектров пассивных примесей [2, 3] и спектра энергии турбулентности [4] в области минимальных масштабов турбулентных неоднородностей, а также в статистическом описании растяжения материальных линий и поверхностей в турбулентном потоке [5]. Наконец, метод Лагранжа дает определенные преимущества для понимания динамики жидкости, как нелинейной механической системы, эволюция которой происходит вследствие наличия внутренних взаимодействий между ее частями.

Вследствие кажущейся громоздкости лагранжевых уравнений гидродинамики вязкой жидкости структура этих уравнений до сих пор в достаточной мере не изучена, и они еще не находят должного применения в конкретных задачах. Некоторые, весьма ограниченные, сведения о лагранжевых характеристиках локально-изотропной турбулентности удается получить [6] и без использования динамических уравнений. Поэтому изучение лагранжевых уравнений является актуальной задачей.

Этой задаче был посвящен доклад Пайрсона [7] на Международном симпозиуме по турбулентности в сентябре 1961 г. в Марселе. Однако Пайрсону не удалось выявить структуру лагранжевых уравнений и записать их в компактной форме; кроме того, осуществленная им попытка изучения линеаризированных лагранжевых уравнений связана с нарушениями условия неразрывности (на что указывает и сам Пайрсон).

§ 1. Уравнения для декартовых координат жидких частиц. Исчерпывающей лагранжевой характеристикой потока несжимаемой жидкости служит функция $\xi(\mathbf{x}, t)$, определяющая для любого момента времени t координаты жидких частиц, идентифицируемых по значениям параметра $\mathbf{x}$. Уравнения гидродинамики в принципе позволяют определить функцию

$\xi(\mathbf{x}, t)$ при любых $t > t_0$ по заданным начальным значениям скоростей жидких частиц

$$\mathbf{V}_0(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial \xi(\mathbf{x}, t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}$$

Связь между лагранжевыми и эйлеровыми характеристиками дается соотношением

$$\partial \xi(\mathbf{x}, t) / \partial t = \mathbf{u}[\xi(\mathbf{x}, t), t] \tag{1.1}$$

Переход от эйлерова описания к лагранжеву сводится к замене в уравнениях гидродинамики независимых переменных (ξ, t) на $(\mathbf{x}, t)$ и переходу от неизвестной функции $\mathbf{u}(\xi, t)$ к новой неизвестной $\xi(\mathbf{x}, t)$, осуществляемому по формуле (1.1).

В дальнейшем будем использовать в качестве лагранжевых параметров жидких частиц начальные значения их пространственных координат, т. е. положим

$$\mathbf{x} = \xi(\mathbf{x}, t_0) \tag{1.2}$$

Пусть (ξ^1, ξ^2, ξ^3) и (x^1, x^2, x^3) — декартовы компоненты векторов ξ и $\mathbf{x}$. Замена независимых переменных (ξ^1, ξ^2, ξ^3, t) на (x^1, x^2, x^3, t) означает переход от декартовых координат к нестационарным криволинейным и неортогональным координатам, сопутствующим движению жидкости. Действительно, каждая координатная поверхность $x^i = \mathrm{const}$ во все моменты времени состоит из одних и тех же жидких частиц; в начальный момент такие поверхности суть плоскости, но с течением времени они перемещаются вместе с жидкостью и искривляются. Использование сопутствующих координат в гидромеханике было предложено еще в 1948 г. А. Л. Зельмановым [8], который назвал этот метод унитарной трактовкой движений сплошной среды.

В дальнейших выкладках будем использовать для якобианов по переменным x^1, x^2, x^3 обозначение

$$\frac{\partial(A, B, C)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} = [A, B, C] \tag{1.3}$$

Будем использовать без дополнительных оговорок то обстоятельство, что величина $[A, B, C]$ не меняется при циклической перестановке и меняет знак при ациклической перестановке переменных A, B, C.

При переходе от эйлеровых переменных ξ^α к лагранжевым x^β большую роль играет матрица бесконечно малого преобразования

$$T = \left\| \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \right\| \qquad (\det T = |T| = [\xi^1, \xi^2, \xi^3])$$

Согласно (1.2) в начальный момент времени $\partial\xi^\alpha / \partial x^\beta = \delta_{\alpha\beta}$, т. е. матрица T_0 является единичной, и $|T_0| = 1$. Величины $\partial x^\alpha / \partial \xi^\beta$ суть элементы обратной матрицы T^{-1}, т. е. алгебраические дополнения элементов $\partial\xi^\beta / \partial x^\alpha$ в матрице T, деленные на $|T|$. Отсюда для вычисления производных по эйлеровым переменным ξ^i имеем

$$\frac{\partial f}{\partial \xi^i} = \frac{1}{|T|}[\xi^j, \xi^k, f] \qquad (ijk) \tag{1.4}$$

Здесь и в дальнейшем i, j, k — циклическая перестановка индексов 1, 2, 3. Действительно, записав левую часть формулы (1.4) в виде

$$\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^i}$$

(здесь и в дальнейшем по повторяющимся греческим индексам подразумевается суммирование), убеждаемся, что это же выражение получается при разложении детерминанта в правой части по элементам третьей строки.

При помощи формул (1.4) и (1.1) для дивергенции скорости получаем

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi^\alpha}=\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial t}=\frac{1}{|T|}([\partial\xi^1/\partial t, \xi^2, \xi^3]+[\xi^1, \partial\xi^2/\partial t, \xi^3]+$$
$$+[\xi^1, \xi^2, \partial\xi^3/\partial t)])=\frac{1}{|T|}\frac{\partial |T|}{\partial t}$$

Здесь u_α — декартовы компоненты скорости. В случае несжимаемой жидкости дивергенция скорости тождественно равна нулю, т. е.

$$\partial |T|/\partial t=0, \qquad \text{или} \qquad |T|\equiv|T_0|=1$$

Иначе говоря, уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости в лагранжевых переменных принимает вид

$$[\xi^1, \xi^2, \xi^3]=1 \tag{1.5}$$

Далее будем пользоваться формулой (1.4), полагая в правой части $|T|=1$. При помощи этой формулы для оператора Лапласа по эйлеровым переменным получается выражение

$$\triangle_\xi f=\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha}=[\xi^2, \xi^3, [\xi^2, \xi^3, f]]+[\xi^3, \xi^1, [\xi^3, \xi^1, f]]+[\xi^1, \xi^2, [\xi^1, \xi^2, f]] \tag{1.6}$$

Уравнения движения для несжимаемой вязкой жидкости в эйлеровых переменных имеют вид

$$\frac{du_i}{dt}=-\frac{\partial P}{\partial \xi^i}+\nu\triangle u_i \qquad \left(P=\frac{p}{\rho}\right) \tag{1.7}$$

Здесь p — давление, ρ — плотность, ν — кинематический коэффициент вязкости. Пользуясь формулами (1.1), (1.4) и (1.6), преобразуем (1.7) к лагранжевым переменным следующим образом:

$$\frac{\partial^2\xi^i}{\partial t^2}=-[\xi^j, \xi^k, P]+\nu([\xi^2, \xi^3, [\xi^2, \xi^3, \partial\xi^i/\partial t]]+[\xi^3, \xi^1, [\xi^3, \xi^1, \partial\xi^i/\partial t]]+$$
$$+[\xi^1, \xi^2, [\xi^1, \xi^2, \partial\xi^i/\partial t]]) \tag{1.8}$$

Уравнения (1.5) и (1.8) образуют полную систему уравнений динамики несжимаемой жидкости в лагранжевых переменных.

Нелинейным относительно основных динамических переменных слагаемым в уравнениях движения соответствуют силы, описывающие взаимодействие между компонентами механической системы. В уравнениях Навье — Стокса (1.7) нелинейные относительно переменных u_i слагаемые содержатся в выражении для ускорения du_i/dt; им соответствуют силы инерционного взаимодействия между пространственными неоднородностями поля скорости $\mathbf{u}$ (ξ, t); через эти силы выражается также и градиент давления (подчеркнем, что силы вязкости описываются в (1.7) линейными выражениями).

Однако инерционные взаимодействия имеют относительный характер — они устраняются при переходе к сопутствующей системе отсчета. В лагранжевых уравнениях движения (1.8), наоборот, нелинейными относительно основных динамических переменных ξ^i выражениями описываются реальные силы взаимодействия между жидкими частицами — силы градиента давления и вязкости.

Отметим, что силы вязкого взаимодействия описываются в лагранжевых уравнениях нелинейными выражениями пятой степени относительно переменных ξ^i (тогда как в уравнениях Навье — Стокса инерционные взаимодействия описываются нелинейными выражениями второй степени относительно переменных u_i).

Отношение характерных для данной задачи значений нелинейных и линейных слагаемых в уравнениях движения можно назвать константой взаимодействия. Так, в случае уравнений Навье — Стокса константой инерционного взаимодействия является отношение характерных значений сил инерции и сил вязкости, т. е. число Рейнольдса R. В случае лагранжевых уравнений константой вязкого взаимодействия является отношение характерных значений сил вязкости и полного ускорения, т. е. $1 / R$. При достаточно больших числах R (характерных для развитой турбулентности) инерционные взаимодействия, учитываемые при эйлеровом описании движения, являются сильными; наоборот, вязкие взаимодействия, учитываемые при лагранжевом описании, являются слабыми.

Укажем некоторые частные случаи, в которых вид лагранжевых уравнений несколько упрощается. Пусть движение происходит только в плоскостях $x^3 = \mathrm{const}$, т. е. $\xi^3 \equiv x^3$ (плоское движение). Тогда, используя для двумерных якобианов символ двучленной квадратной скобки

$$\frac{\partial (A, B)}{\partial (x^1, x^2)} = [A, B] \tag{1.9}$$

уравнения (1.5) и (1.8) можно привести к виду

$$
\begin{aligned}
&[\xi^1, \xi^2] = 1 \\
&\frac{\partial^2 \xi^1}{\partial t^2} = -[P, \xi^2] + \nu([\xi^1, [\xi^1, \partial\xi^1/\partial t]] + [\xi^2, [\xi^2, \partial\xi^1/\partial t]] + \\
&\qquad + [\xi^1, \xi^2, [\xi^1, \xi^2, \partial\xi^1/\partial t]]) \\
&\frac{\partial^2 \xi^2}{\partial t^2} = -[\xi^1, P] + \nu([\xi^1, [\xi^1, \partial\xi^2/\partial t]] + [\xi^2, [\xi^2, \partial\xi^2/\partial t]] + \\
&\qquad + [\xi^1, \xi^2, [\xi^1, \xi^2, \partial\xi^2/\partial t]])
\end{aligned} \tag{1.10}
$$

Третье уравнение движения приводится к виду $[\xi^1, \xi^2, P] = 0$ и означает, что зависимость P от четырех аргументов x^1, x^2, x^3, t сводится к зависимости от трех аргументов $\xi^1(\mathbf{x}, t)$, $\xi^2(\mathbf{x}, t)$ и t. В случае двумерного плоского движения (когда $\xi^3 \equiv x^3$, а ξ^1 и ξ^2 не зависят от x^3) третьи слагаемые в круглых скобках в (1.10) обращаются в нуль, а третье уравнение движения принимает вид $\partial P / \partial x^3 = 0$.

В случае плоскопараллельного движения вдоль оси x^1 (т. е. при $\xi^2 \equiv x^2$, $\xi^3 \equiv x^3$) уравнение неразрывности эквивалентно формуле

$$\xi^1 = x^1 + \int_{t_0}^{t} v(x^2, x^3, t)\, dt \tag{1.11}$$

а уравнение движения приобретает линейный вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x^1} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2 v}{(\partial x^3)^2}\right) \tag{1.12}$$

Другие два уравнения движения показывают, что P есть функция лишь от $\xi^1(\mathbf{x}, t)$ и t.

§ 2. Проблема турбулентности. При статистическом описании турбулентного движения жидкости будем рассматривать поле $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t)$ как случайную функцию точек пространства-времени. Для полного статистического описания турбулентности можно использовать метод, предложенный Хопфом [9] и заключающийся в нахождении характеристического функционала случайной функции $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t)$, определяемого формулой

$$\Phi\{\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t)\} = \langle e^{i(\xi,\eta)} \rangle, \qquad (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \int \xi^{\alpha}(\mathbf{x}, t)\, \eta_{\alpha}(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x}dt \tag{2.1}$$

где интеграл распространен на всю область пространства-времени, в которой происходит движение жидкости, а символ $\langle A \rangle$ означает математическое ожидание случайной величины A.

Функционал Φ представляет собой исчерпывающую статистическую характеристику случайного поля $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t)$, так как при функциональных аргументах вида

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}_k\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)\, \delta(t - t_k)$$

значения Φ суть характеристические функции распределений вероятностей для значений поля $\boldsymbol{\xi}$ на любом конечном множестве точек пространства-времени $(\mathbf{x}_k, t_k)$.

Кроме функционала Φ, введем в рассмотрение оператор

$$\Pi\{\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t); \mathbf{x}, t\} = \langle P(\mathbf{x}, t)\, e^{i(\xi,\eta)} \rangle \tag{2.2}$$

Для функционалов или операторов Ψ на множестве функций $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t)$ введем оператор вариационной производной $D_k(\mathbf{x}, t)$, полагая

$$D_k(\mathbf{x}, t)\, \Psi\{\eta\} = \frac{\delta\Psi\{\eta\}}{\delta\eta_k(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x}dt} \tag{2.3}$$

В частности, понадобится следующая формула вариационного дифференцирования:

$$D_k(\mathbf{x}, t)\, e^{i(\xi,\eta)} = i\xi^k(\mathbf{x}, t)\, e^{i(\xi,\eta)} \tag{2.4}$$

Наконец, будем использовать тождество

$$[A, B, C] = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} A \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} B \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} C \tag{2.5}$$

Здесь $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = +1$, если (α, β, γ) — циклическая, и $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = -1$, если (α, β, γ) — ациклическая перестановка индексов $(1, 2, 3)$; $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = 0$, если хотя бы два из индексов α, β, γ одинаковы.

Умножив уравнения (1.5) и (1.8) на $e^{i(\xi, \eta)}$ и затем применив операцию математического ожидания, при помощи формул (2.4) — (2.5) эти уравнения можно привести к виду

$$i\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} D_1 \frac{\partial}{\partial x^\beta} D_2 \frac{\partial}{\partial x^\gamma} D_3 \Phi = \Phi \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} D_i \Phi = i\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} D_j \frac{\partial}{\partial x^\beta} D_k \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \Pi + \nu \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{\mu\nu\rho} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Big(D_2 \frac{\partial}{\partial x^\beta} D_3 \frac{\partial^2}{\partial x^\gamma \partial x^\mu} D_2 \frac{\partial}{\partial x^\nu} D_3 + $$
$$+ D_3 \frac{\partial}{\partial x^\beta} D_1 \frac{\partial^2}{\partial x^\gamma \partial x^\mu} D_3 \frac{\partial}{\partial x^\nu} D_1 + D_1 \frac{\partial}{\partial x^\beta} D_2 \frac{\partial^2}{\partial x^\gamma \partial x^\mu} D_1 \frac{\partial}{\partial x^{\nu_1}} D_2 \Big) \frac{\partial^2}{\partial x^\rho \partial t} D_i \Phi \tag{2.7}$$

В этих уравнениях все операторы D_k и Π берутся в точке $(\mathbf{x}, t)$. Оператор D_k линейный, поэтому уравнения (2.6)—(2.7) образуют систему линейных уравнений относительно Φ и Π. Отсюда, в частности, следует, что $\Pi = L\Phi$, где L — некоторый линейный оператор. Таким образом, задача полного статистического описания турбулентности сводится к решению линейных уравнений, что является принципиальным преимуществом изложенного метода (заметим, однако, что аппарат для решения уравнений в вариационных производных еще не создан).

Функция $\xi(\mathbf{x}, t)$ однозначно определяется начальным полем скорости

$$\mathbf{V}_0(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial \xi(\mathbf{x}, t)}{\partial t}\right]_{t=t_0}.$$

Полное статистическое описание этого поля дается характеристическим функционалом

$$V\{\mathbf{y}(\mathbf{x})\} = \left\langle \exp\left[i \int V_{0\alpha}(\mathbf{x})\, y_\alpha(\mathbf{x})\, dx\right]\right\rangle \tag{2.8}$$

Таким образом, полагая

$$\eta_0(\mathbf{x}, t, \tau) = \mathbf{y}(\mathbf{x}) \frac{\delta(t - t_0 - \tau) - \delta(t - t_0)}{\tau} \tag{2.9}$$

следует потребовать, чтобы функционал Φ удовлетворял начальному условию

$$\lim_{\tau \to 0} \Phi\{\eta_0(\mathbf{x}, t, \tau)\} = V\{\mathbf{y}(\mathbf{x})\} \tag{2.10}$$

в котором функционал V является заданным.

§ 3. Ковариантные лагранжевы уравнения и их линеаризация. Уравнение неразрывности и уравнения Навье—Стокса можно преобразовать к лагранжевым переменным так, чтобы в них фигурировали в качестве неизвестных функций лишь контравариантные компоненты скоростей жидких частиц, определяемые соотношениями

$$v^i = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial t} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha}, \qquad \frac{\partial \xi^i}{\partial t} = v^\alpha \frac{\partial \xi^i}{\partial x^\alpha} \tag{3.1}$$

и компоненты метрического тензора сопутствующего пространства

$$g_{ik}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^k} \tag{3.2}$$

Подчеркнем, что величины g_{ik} зависят от t, т. е., что метрика сопутствующего пространства нестационарна. В начальный момент $t = t_0$ имеем $g_{ik} = \delta_{ik}$.

Матрица $G = \|g_{ik}\|$ есть произведение матриц $T^* = \|\partial\xi^k / \partial x^i\|$, $T = \|\partial\xi^i / \partial x^k\|$, детерминанты которых одинаковы и в случае несжимаемой жидкости равны единице; следовательно, в этом случае детерминант $|G|$ матрицы $\|g_{ik}\|$ тождественно равен единице.

Введем также обратную матрицу $G^{-1} = \|g^{ik}\|$ и символы Кристоффеля второго рода

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{i\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{\alpha k}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\alpha} \right) = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^j \partial x^k} \tag{3.3}$$

и будем пользоваться тождеством

$$\Gamma^\alpha_{\alpha k} = 0$$

вытекающим из условия $|G| = 1$.

Выражение для дивергенции скорости можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial t} = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(v^\gamma \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\gamma} \right) = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial v^\gamma}{\partial x^\beta} + v^\gamma \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}$$

Множитель при v^γ во втором слагаемом равен $\Gamma^\beta_{\beta\gamma} = 0$, первое же слагаемое приводится к виду $\partial v^\beta / \partial x^\beta$. Таким образом, уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости можно записать в виде

$$\frac{\partial v^\beta}{\partial x^\beta} = 0 \tag{3.4}$$

Найдем теперь выражение для контравариантной компоненты ускорения. Дважды пользуясь второй формулой (3.1), получаем

$$w^i = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial t^2} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left(v^\beta \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \right) = \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^\beta \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(v^\gamma \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\gamma} \right) =$$

$$= \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^\beta \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^\beta} + v^\gamma \Gamma^i_{\beta\gamma} \right)$$

Выражение в скобках в последней формуле является ковариантной производной $\nabla_\beta v^i$.

Далее, контравариантная компонента градиента давления имеет вид $g^{i\alpha} \partial P / \partial x^\alpha$, а лапласиана скорости $g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta v^i$ (отметим, что ковариантные производные перестановочны, так как сопутствующее пространство евклидово, и, следовательно, соответствующий тензор Римана—Кристоффеля равен нулю).

Таким образом, уравнения движения можно записать в виде

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^\alpha \nabla_\alpha v^i = - g^{i\alpha} \frac{\partial P}{\partial x^\alpha} + \nu g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta v^i \tag{3.5}$$

Используем лагранжевы уравнения гидродинамики (3.4) — (3.5) для описания малых колебаний жидкости относительно состояния покоя. Величины v^i будем считать малыми и линеаризируем уравнения (3.5), пренебрегая квадратичными относительно v^i слагаемыми и заменяя величины g^{ik} и символы Кристоффеля значениями, соответствующими покоящейся жидкости (т. е. $g^{ik} = \delta_{ik}$ и $\Gamma^i_{jk} = 0$).

Линеаризированные уравнения движения будут иметь вид

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x^i} + \nu \Delta v^i \tag{3.6}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа по переменным x^α.

Эти уравнения вместе с уравнением неразрывности (3.4) позволяют определить величины $v^i(\mathbf{x}, t)$ по заданным начальным значениям $v^i(\mathbf{x}, t_0) = u_i(\mathbf{x})$ (где u_i суть декартовы компоненты скорости в начальный момент).

Согласно (3.1) величины v^i выражаются через декартовы координаты жидких частиц ξ^α нелинейно; однако при использовании уравнений (3.4) и (3.6) линеаризировать эти выражения нет необходимости, так что уравнение неразрывности остается точным. Это является значительным преимуществом изложенной процедуры линеаризации лагранжевых уравнений по сравнению с линеаризацией уравнений для декартовых координат жидких частиц, осуществленной Пайрсоном [7] и связанной с нарушениями условия неразрывности. Отметим, что после определения величин $v^i(\mathbf{x}, t)$ при помощи уравнений (3.4)—(3.6) декартовы координаты жидких частиц $\xi^i(\mathbf{x}, t)$ могут быть найдены из вторых уравнений (3.1), которые при известных v^i линейны относительно величин ξ^i.

Поступила 22 XII 1961

Институт физики атмосферы
АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Taylor G. I. Diffusion by contionuous movements. Proc. Lond. Math. 1921, 20, 196.
2. Batchelor G. K. Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid, Part I., J. of Fluid Mech. 1959, № 5, p. 1, 113.
3. Batchelor G. K., Hiwells I. D., Townsend A. A. Small-scale variation of convected guantities like temperature in turbulent fluid, Part II. J. of Fluid Mech. 1959, vol. 5, p. 1, 134.
4. Новиков Е. А. О спектре энергии турбулентного потока несжимаемой жидкости. ДАН СССР, 1961, т. 139, № 2.
5. Batchelor G. K. The effect of homogeneous turbulence on material lines and surfaces. Proc. Roy. Soc. A, 1952, 213, 349.
6. Монин А. С. О лагранжевых характеристиках турбулентности. ДАН СССР, 1960, т. 134, № 2.
7. Pierson W. J. On the transformation of the Navier Stokes equations into Lagrangian form with selected linear solutions, Rep. at the Intern. Symposium on turbulence, JUGG and IYTAM, 1961, Sept. Marseille.
8. Зельманов А. Л. Применение сопутствующих координат в нерелятивистской механике. ДАН СССР, 1948, т. XI, № 6.
9. Hopf E. Statistical hydromechanics and functional calculus, J. Rat. Mech. Anal. 1952, 1, 87.